FORMALISMES DE REPRÉSENTATION ET RAISONNEMENT - CM2

Chuyuan Li

January 23, 2023

Université de Lorraine

Logique propositionnelle :

- Définitions : variable propositionnelle, littéral, clause, FNC
- Preuves : règle de résolution, FNC, à la main, c'est long
- Algorithmique : recherche en largeur (divergence), recherche Shortest-Clause (convergence)
  - Question : si la conclusion est g et on obtient une contradiction dite f et ¬f, est-ce que on peut s'arrêter ?

LA DERNIÈRE FOIS

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

La construction de l'algorithme Recherche en largeur :

Niveau 0 Propositions de la base de connaissances, négation de la conclusion.

Niveau k Propositions obtenues grâce à l'application de la règle de résolution à deux propositions dont au moins une du niveau $k - 1$.

Arrêt Lorsque l'application de la règle donne lieu à **une contradiction** ou n'est plus possible.

1 Fini avec logique propositionnelle
2 Logique des prédicats

Définition (Clause de Horn)
Une **clause de Horn** est une clause qui possède **au plus** un littéral positif. Exemple : $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$.

Équivalence : $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$.
Les p_i sont les **prémisses** de la **conséquence** q.

calculs linéaires (limitations)

On ne **peut pas** conclure un littéral négatif : $p \to \neg q$.
On ne **peut pas** conclure une disjonction : $p_1 \wedge p_2 \to q_1 \vee q_2$.

Attention : ne s'applique qu'aux clauses de Horn.

Attention : ne s'applique qu'aux clauses de Horn.

Principe : appliquer toute règle dont les prémisses sont validées par la base des énoncés et ajouter ses conclusions à la base des énoncés jusqu'à ce que la conclusion soit satisfaite.

CHAÎNAGE AVANT (FORWARD CHAINING)

Attention : ne s'applique qu'aux clauses de Horn.

Principe : appliquer toute règle dont les prémisses sont validées par la base des énoncés et ajouter ses conclusions à la base des énoncés jusqu'à ce que la conclusion soit satisfaite.

Attention : on veut la conclusion, pas la négation de la conclusion.

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \land m) \to p$
3. $(b \land l) \to m$
4. $(a \land p) \to l$
5. $(a \land b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

——————————

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

———————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

———————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5
9. m — $7 \wedge 8$ et 3

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

———————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5
9. m — $7 \wedge 8$ et 3
10. p — $8 \wedge 9$ et 2

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

———————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5
9. m — $7 \wedge 8$ et 3
10. p — $8 \wedge 9$ et 2
11. q — 10 et 1

Algorithme : Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que (F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable) **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si F $\in$ BF **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

EXERCICE/EXEMPLE

Base de règles :

R1 : si Bénédicte et Denis et Etienne viennent alors Farida vient
R2 : si Gérard et Denis viennent alors Amélie vient
R3 : si Coralie et Farida viennent alors Amélie vient
R4 : Si Bénédicte alors Xavier vient
R5 : si Xavier et Amélie viennent alors Herman vient
R6 : si Coralie alors Denis vient
R7 : si Xavier et Coralie viennent alors Amélie vient
R8 : si Xavier et Bénédicte viennent alors Denis vient

Base de faits = {Bénédicte , Coralie}

1. Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?
2. Saturer la base de faits avec les règles en suivant l'algorithme de chaînage avant.
3. Herman fait-il partie de la base de faits saturée ?

On peut envisager la recherche de preuve dans l'autre sens :

- On part de ce que l'on veut prouver, et on cherche quelles pourraient en être les prémisses.
- On remonte ainsi jusqu'aux énoncés de la base d'énoncés donnée.
- On construit ainsi un arbre de déduction inverse.

Pour prouver un littéral α :

1. Empiler α sur la pile.
2. Répeter les actions suivantes jusqu'à ce que la pile soit vide ou que les actions ne soient plus possibles :
   i. Dépiler le littéral α le plus haut dans la pile.
   ii. Choisir un énoncé dont α est la conséquence. Si aucune correspondance, FAIL.
   iii. Empiler les prémisses de cet énoncé (dans l'ordre) sur la pile.

Éviter les boucles infinies : vérifier si λ est déjà dans la pile.

Éviter de répéter des traitements : vérifier si λ est déjà vrai (cela a été prouvé) OU déjà faux.

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \land m) \rightarrow p$
3. $(b \land l) \rightarrow m$
4. $(a \land p) \rightarrow l$
5. $(a \land b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \land m) \to p$
3. $(b \land l) \to m$
4. $(a \land p) \to l$
5. $(a \land b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \land m) \to p$
3. $(b \land l) \to m$
4. $(a \land p) \to l$
5. $(a \land b) \to l$
6. a
7. b

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \land m) \to p$
3. $(b \land l) \to m$
4. $(a \land p) \to l$
5. $(a \land b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \land m) \to p$
3. $(b \land l) \to m$
4. $(a \land p) \to l$
5. $(a \land b) \to l$
6. a
7. b [q]

——————————

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b [q]

——————————

8. p 1 [p]

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b [q]

——————————

8. p 1 [p]
9. $l \wedge m$ 2 [l,m]

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \land m) \to p$
3. $(b \land l) \to m$
4. $(a \land p) \to l$
5. $(a \land b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1.	$p \to q$		
2.	$(l \land m) \to p$		
3.	$(b \land l) \to m$		
4.	$(a \land p) \to l$		
5.	$(a \land b) \to l$		
6.	a		
7.	b		[q]
	————————		
8.	p	1	[p]
9.	$l \land m$	2	[l,m]
10.	$b \land l$	3	[l,b]

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

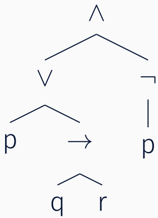
1.	$p \rightarrow q$		
2.	$(l \wedge m) \rightarrow p$		
3.	$(b \wedge l) \rightarrow m$		
4.	$(a \wedge p) \rightarrow l$		
5.	$(a \wedge b) \rightarrow l$		
6.	a		
7.	b		[q]
	———————		
8.	p	1	[p]
9.	$l \wedge m$	2	[l,m]
10.	$b \wedge l$	3	[l,b]
11.	$a \wedge b$	5	[a,b]

ARBRE DE DÉCOMPOSITION

$$P = (p \vee (q \rightarrow r)) \wedge \neg p$$

ARBRE DE DÉCOMPOSITION

$$P = (p \vee (q \to r)) \wedge \neg p$$



LOGIQUE DES PRÉDICATS

Définition (Termes élémentaires)

1. Les constantes sont des **termes**. Notées a, b, c. Exemples : 0, 1, Alice, Bob, Claude.
2. Les variables sont des **termes**. Notées x, y, z, t. Exemples : un booléen, une personne.
3. Les constantes et les variables sont des termes élémentaires du langage.

« À part 0 et 1, aucun nombre n'est égal à son carré. »

EXEMPLE

« À part 0 et 1, aucun nombre n'est égal à son carré. »

DÉFINITIONS : LANGAGE PRÉDICATIF (2)

Définition (Fonctions, prédicats)

- Une **fonction** n-**aire** (d'**arité** n) s'applique sur un n-tuple de **termes** et produit un **terme**.
  Notées f, g, h.
  Exemples : ^{2} (1), $+$ (2), équipe-de-foot (11).
- Un **prédicat** n-**aire** (d'**arité** n) s'applique sur un n-tuple de **termes** et produit une **expression logique**, qui peut être évaluée.
  Notés p, q.
  Exemples : est-le-carré-de (2), est-la-somme-de (3), sont-une-équipe-de-foot (11).

EXERCICE

Soient les constantes a et b ; les fonctions unaires f et g et la fonction binaire h, avec la représentation :

$$a = \text{“Alice”}, b = \text{“Bob”}, f = \text{“frère de”}, g = \text{“ami de”}, h = \text{“fils de”}.$$

1. Que représente $g(h(a, b))$?
2. Écrire le terme qui traduit l’expression « le fils d’Alice et du frère de Bob ».

Définition (Quantificateurs)

Alice est un être humain VS Bob est un être humain ?

Définition (Quantificateurs)

Alice est un être humain	VS	Bob est un être humain	?
est-être-humain(a)	VS	est-être-humain(b)	?

Définition (Quantificateurs)

Alice est un être humain	VS	Bob est un être humain	?
est-être-humain(a)	VS	est-être-humain(b)	?

Quantificateur universel Notation et utilisation : $\forall x.$

Quantificateur existentiel Notation et utilisation : $\exists x.$

Définition (Variable liée, libre)

Une occurence de x est dite liée dans une formule si elle apparaît sous la forme $\forall x$ ou $\exists x$.

Si une variable n'est pas liée, elle est libre.

Définition (Variable liée, libre)

Une occurence de x est dite **liée** dans une formule si elle apparaît sous la forme $\forall x$ ou $\exists x$.
Si une variable n'est pas liée, elle est **libre**.

- $f(x, 0) \vee \forall x.f(x, y)$
- $\exists x.(\exists y.f(x, y)) \vee f(x, y)$

Définition (Variable liée, libre)

Une occurence de x est dite **liée** dans une formule si elle apparaît sous la forme $\forall x$ ou $\exists x$.
Si une variable n'est pas liée, elle est **libre**.

- $f(x, 0) \vee \forall x.f(x, y)$
- $\exists x.(\exists y.f(x, y)) \vee f(x, y)$

Attention : derrière le point, des parenthèses invisibles !

Définition (Variable liée, libre)

Une occurence de x est dite **liée** dans une formule si elle apparaît sous la forme $\forall x$ ou $\exists x$.
Si une variable n'est pas liée, elle est **libre**.

- $f(x, 0) \vee \forall x.f(x, y)$
- $\exists x.(\exists y.f(x, y)) \vee f(x, y)$

Attention : derrière le point, des parenthèses invisibles !
Attention : Si une variable peut être capturée par plusieurs quantificateurs, elle l'est par le plus proche.

$$\forall x.\exists x.f(x)$$

RETOUR DE L'ARBRE DE DÉCOMPOSITION

$$G = r(x) \lor ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \land r(a)) \land \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

RETOUR DE L'ARBRE DE DÉCOMPOSITION

$$G = r(y) \lor ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \land r(a)) \land \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

RETOUR DE L'ARBRE DE DÉCOMPOSITION

$$G = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$