FORMALISMES DE REPRÉSENTATION ET RAISONNEMENT - CM3

Chuyuan Li

6 février 2023

Université de Lorraine

LA DERNIÈRE FOIS

Logique propositionnelle :

- Définitions : clauses de Horn
- Algorithmique : chaînage avant, chaînage arrière

Logique des prédicats :

- Définitions : termes (?), fonctions vs. prédicats (?), quantificateurs ($\forall$, $\exists$), variables libres/liées.

Substitutions

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Attention !

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule $F(x)$ à la formule $F(t)$.

Attention !

- $F(x) = \exists y(y^2 = x)$

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Attention !

- $F(x) = \exists y(y^2 = x)$
- $F(2x) = \exists y(y^2 = 2x)$

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Attention !

- $F(x) = \exists y(y^2 = x)$
- $F(2x) = \exists y(y^2 = 2x)$
- $F(y^2) = \exists y(y^2 = y^2)$

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Attention !

- $F(x) = \exists y(y^2 = x)$
- $F(2x) = \exists y(y^2 = 2x)$
- $F(y^2) = \exists y(y^2 = y^2)$: tautologie !

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Attention !

- $F(x) = \exists y(y^2 = x)$
- $F(2x) = \exists y(y^2 = 2x)$
- $F(y^2) = \exists y(y^2 = y^2)$: tautologie !
- $F(-y) = \exists y(y^2 = -y)$

Définition (Substitution)

La substitution d'un terme t à une variable libre x est la transformation permettant de passer de la formule F(x) à la formule F(t).

Attention !

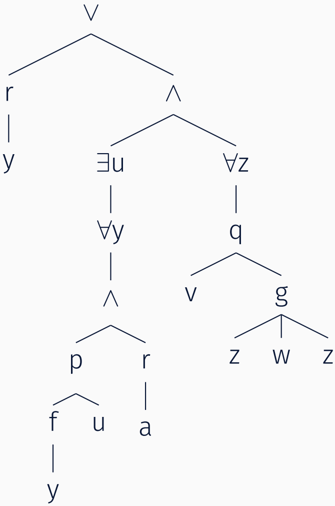
- $F(x) = \exists y(y^2 = x)$
- $F(2x) = \exists y(y^2 = 2x)$
- $F(y^2) = \exists y(y^2 = y^2)$: tautologie !
- $F(-y) = \exists y(y^2 = -y)$: $\perp$

Pour substituer un terme t à une variable x dans une formule $F(x)$:

1. On remplace x par une variable fraîche à chaque occurrence liée de x. $F(x)$ devient $F_1(x)$ où n'apparaît aucune occurrence liée de x.
2. On remplace de la même façon les variables liées de $F_1(x)$ qui apparaissent dans le terme t. $F_1(x)$ devient $F_2(x)$ dont aucune variable liée ne figure dans t.
3. On effectue la substitution de t à x dans $F_2(x)$. On obtient $F[t/x]$.

SUBSTITUTION DE LA VARIABLE Y PAR LE TERME F(Z)

$$G = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$



G[F(Z) / Y] ÉTAPE 1

$$G = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

On écrit $G_1(y)$ où n'apparaît aucune occurrence liée de y (la variable à substituer) :

$$G_1(y) = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall \alpha.\ p(f(\alpha), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

$$G_1(y) = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall \alpha.\ p(f(\alpha), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

On écrit $G_2(y)$ dont aucune variable liée n'apparaît dans f(z) (le terme substituant).

$$G_2(y) = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall \alpha.\ p(f(\alpha), u) \wedge r(a)) \wedge \forall \beta.\ q(v, g(\beta, w, \beta)))$$

G[F(Z) / Y] ÉTAPE 3

$$G_2(y) = r(y) \vee ((\exists u.\ \forall \alpha.\ p(f(\alpha), u) \wedge r(a)) \wedge \forall \beta.\ q(v, g(\beta, w, \beta)))$$

On effectue la substitution de f(z) à y dans G_2(y). On obtient G[f(z)/y].

$$G[f(z)/y] = r(f(z)) \vee ((\exists u.\ \forall \alpha.\ p(f(\alpha), u) \wedge r(a)) \wedge \forall \beta.\ q(v, g(\beta, w, \beta)))$$

Soit $H(x) = \big(\forall x. \forall y.\ A(x, y)\big) \rightarrow B(x, y)$

1) Les variables liées et libres ?

2) $H[f(x, y)/x]$?

Modèles

ILLUSTRATION INTRODUCTIVE

$$F = \exists x \, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

$$F = \exists x \, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 1 $a = -1, f(x) = x^2, R =$ '$=$'. F est-elle vraie, fausse ?

$$F = \exists x\ R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 1 $a = -1$, $f(x) = x^2$, $R =$ '$=$'. F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 2 $f(x) =$ « père de x », $R(x, y) =$ « x est le frère de y »
F est-elle vraie, fausse ?

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage prédicatif. Soit D un ensemble non-vide appelé **domaine d'interprétation**. Soit I une fonction qui associe :

- à chaque constante une valeur de D
- à chaque symbole de fonction n-aire une fonction totale de D^n dans D
- à chaque symbole de prédicat n-aire une relation n-aire dans D : un ensemble de n-tuples d'éléments de D

I est appelée **fonction d'interprétation**.

DÉFINITION : MODÈLE

Définition

« Un modèle, c’est juste un environnement où les formules elles marchent ! »

Définition

« Un modèle, c'est juste un environnement où les formules elles marchent ! »

La donnée d'un domaine d'interprétation et de la fonction d'interprétation définit un **modèle** : $\mathcal{M} = \{\mathrm{D}, \mathrm{I}\}$.

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{P, f\}$ où P est un prédicat binaire et f une fonction unaire, et l'interprétation suivante :

Domaine : l'ensemble $\mathcal{H}$ des êtres humains,

$P(x, y)$: « x est père de y »,

$f(x)$: « frère de x ».

Lesquelles des formules ci-dessous sont satisfaites dans le modèle $\mathcal{M} = \{\mathcal{H}, \text{« être père de »}, \text{« frère de »}\}$?

1. $F = \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow P(x, f(y))\right)$
2. $G = \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)\right)$
3. $H = \forall x \forall y \forall z \left((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)\right)$

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? **OUI**, avec $\sigma = [rouge/y]$.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? OUI, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec σ = [rouge/y].
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? **OUI**, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- $f(g(f(x), y), h(verte, y))$? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- $f(h(x, rouge), h(verte, x))$? **NON**, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? **OUI**, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- $f(g(f(x), y), h(verte, y))$? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- $f(h(x, rouge), h(verte, x))$? **NON**, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.
- $f(g(x, rouge), h(verte, x, rouge))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? **NON**, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.
- f(g(x, rouge), h(verte, x, rouge)) ? **NON**, car l'arité n'est pas la même.

EXERCICE

Soit le modèle défini par le domaine $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, et la fonction d'interprétation F :

- $F(\text{mia}) = d_1$
- $F(\text{honey-bunny}) = d_2$
- $F(\text{vincent}) = d_3$
- $F(\text{pumpkin}) = d_4$
- $F(\text{client}) = \{d_1, d_2, d_4\}$
- $F(\text{voleur}) = \{d_2, d_3, d_4\}$
- $F(\text{aime}) = \{(d_2, d_4)\}$

1. Donner un dessin simple de ce modèle.
2. Les deux énoncés suivants sont-ils vrais dans ce modèle ? Expliquer.
   a. $\exists x.\text{aime}(x, \text{vincent})$
   b. $\exists x \exists y(\text{voleur}(x) \wedge \text{client}(y) \wedge \text{aime}(x, y))$

Unification