

# FORMALISMES DE REPRÉSENTATION ET RAISONNEMENT - CM4

---

Chuyuan Li

27 février 2023

Université de Lorraine

## Substitutions

- Travail sur les variables, 3 étapes
- Composition des substitutions

## Modèles

- Définitions : domaine d'interprétation, fonction d'interprétation,  
 $\mathcal{M} = \{\mathcal{D}, \mathcal{I}\}$
- Instances

- 1 Unification
- 2 Réduction naturelle (1)

# UNIFICATION

**Entrée :** deux termes  $t$  et  $u$

**Sortie :** si  $\sigma$  existe,  $\sigma$  telle que  $t_\sigma = u_\sigma$

## Exemple

$t = f(t_1, \dots, t_k)$  et  $u = g(u_1, \dots, u_{k'})$ ?

- Si  $f \neq g$ , il est impossible de trouver  $\sigma$ .
- Si  $f = g$  (et donc  $k = k'$ ), il faut trouver un  $\sigma$  tel que  $t_1\sigma = u_1\sigma$ ,  
 $t_2\sigma = u_2\sigma, \dots$

**Entrée** : ensemble de couples de termes à unifier  $\mathcal{U}$  (récursivité!).

Soient  $(s, t) \in \mathcal{U}$  et  $\sigma$  l'unificateur en construction :

suppression Si  $s = t$ , on les supprime de  $\mathcal{U}$ .

décomposition Si  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  et  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction, on supprime le couple de  $\mathcal{U}$ , et on y ajoute les couples  $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ .

association Si  $s = x$  où  $x$  est une variable, et  $t \neq x$ , et : (de même en inversant  $s$  et  $t$ )

- $x$  n'est pas déjà modifié par  $\sigma$ ,
- $x$  n'apparaît pas dans  $t_\sigma$

alors on met à jour  $\sigma$  par  $\sigma[t\sigma/x]$  et on supprime le couple  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$ . Puis on met à jour  $\mathcal{U}$  en appliquant  $\sigma$ .

fusion Si  $s = x$  où  $x$  est une variable,  $t \neq x$ , et  $x$  est modifié par  $\sigma$ , on remplace le couple à unifier  $(x, t)$  par  $(\sigma(x), t)$ .

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

Soient  $f, g, h, n$  des symboles de fonctions et  $x, y, z, v$  des variables.  
Écrire l'exécution de l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( f(h(x, y), g(x)), f(h(n(y), h(z, z)), v) \right) \right\}$$

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( f(h(x, y), g(x)), f(h(n(y), h(z, z)), v) \right) \right\}$$

Suppression ? Décomposition ? Association ? Fusion ?

**Entrée** : ensemble de couples de termes à unifier  $\mathcal{U}$  (récursivité!).

Soient  $(s, t) \in \mathcal{U}$  et  $\sigma$  l'unificateur en construction :

suppression Si  $s = t$ , on les supprime de  $\mathcal{U}$ .

décomposition Si  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  et  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction, on supprime le couple de  $\mathcal{U}$ , et on y ajoute les couples  $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ .

association Si  $s = x$  où  $x$  est une variable, et  $t \neq x$ , et : (de même en inversant  $s$  et  $t$ )

- $x$  n'est pas déjà modifié par  $\sigma$ ,
- $x$  n'apparaît pas dans  $t_\sigma$

alors on met à jour  $\sigma$  par  $\sigma[t\sigma/x]$  et on supprime le couple  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$ . Puis on met à jour  $\mathcal{U}$  en appliquant  $\sigma$ .

fusion Si  $s = x$  où  $x$  est une variable,  $t \neq x$ , et  $x$  est modifié par  $\sigma$ , on remplace le couple à unifier  $(x, t)$  par  $(\sigma(x), t)$ .

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( f(h(x, y), g(x)), f(h(n(y), h(z, z)), v) \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( f(h(x, y), g(x)), f(h(n(y), h(z, z)), v) \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( h(x, y), h(n(y), h(z, z)) \right), \left( g(x), v \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( f(h(x, y), g(x)), f(h(n(y), h(z, z)), v) \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( h(x, y), h(n(y), h(z, z)) \right), \left( g(x), v \right) \right\}$$

Suppression ? Décomposition ? Association ? Fusion ?

**Entrée** : ensemble de couples de termes à unifier  $\mathcal{U}$  (récursivité!).

Soient  $(s, t) \in \mathcal{U}$  et  $\sigma$  l'unificateur en construction :

suppression Si  $s = t$ , on les supprime de  $\mathcal{U}$ .

décomposition Si  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  et  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction, on supprime le couple de  $\mathcal{U}$ , et on y ajoute les couples  $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ .

association Si  $s = x$  où  $x$  est une variable, et  $t \neq x$ , et : (de même en inversant  $s$  et  $t$ )

- $x$  n'est pas déjà modifié par  $\sigma$ ,
- $x$  n'apparaît pas dans  $t_\sigma$

alors on met à jour  $\sigma$  par  $\sigma[t\sigma/x]$  et on supprime le couple  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$ . Puis on met à jour  $\mathcal{U}$  en appliquant  $\sigma$ .

fusion Si  $s = x$  où  $x$  est une variable,  $t \neq x$ , et  $x$  est modifié par  $\sigma$ , on remplace le couple à unifier  $(x, t)$  par  $(\sigma(x), t)$ .

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( h(x, y), h(n(y), h(z, z)) \right), \left( g(x), v \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( g(x), v \right), \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( h(x, y), h(n(y), h(z, z)) \right), \left( g(x), v \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( g(x), v \right), \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

Attention : U est une file : FIFO

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( h(x, y), h(n(y), h(z, z)) \right), \left( g(x), v \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( g(x), v \right), \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( h(x, y), h(n(y), h(z, z)) \right), \left( g(x), v \right) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( g(x), v \right), \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

Suppression ? Décomposition ? Association ? Fusion ?

**Entrée** : ensemble de couples de termes à unifier  $\mathcal{U}$  (récursivité!).

Soient  $(s, t) \in \mathcal{U}$  et  $\sigma$  l'unificateur en construction :

suppression Si  $s = t$ , on les supprime de  $\mathcal{U}$ .

décomposition Si  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  et  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction, on supprime le couple de  $\mathcal{U}$ , et on y ajoute les couples  $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ .

association Si  $s = x$  où  $x$  est une variable, et  $t \neq x$ , et : (de même en inversant  $s$  et  $t$ )

- $x$  n'est pas déjà modifié par  $\sigma$ ,
- $x$  n'apparaît pas dans  $t_\sigma$

alors on met à jour  $\sigma$  par  $\sigma[t\sigma/x]$  et on supprime le couple  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$ . Puis on met à jour  $\mathcal{U}$  en appliquant  $\sigma$ .

fusion Si  $s = x$  où  $x$  est une variable,  $t \neq x$ , et  $x$  est modifié par  $\sigma$ , on remplace le couple à unifier  $(x, t)$  par  $(\sigma(x), t)$ .

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ (g(x), v), (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(g(x))/v] \circ \sigma = [g(x)/v] \circ [] = [g(x)/v]$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ (g(x), v), (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(g(x))/v] \circ \sigma = [g(x)/v] \circ [] = [g(x)/v]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \sigma(x, n(y)), \sigma(y, h(z, z)) \right\} = \left\{ (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ (g(x), v), (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(g(x))/v] \circ \sigma = [g(x)/v] \circ [] = [g(x)/v]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \sigma(x, n(y)), \sigma(y, h(z, z)) \right\} = \left\{ (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

$$\sigma = [] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( g(x), v \right), \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(g(x))/v] \circ \sigma = [g(x)/v] \circ [] = [g(x)/v]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \sigma(x, n(y)), \sigma(y, h(z, z)) \right\} = \left\{ \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

Suppression ? Décomposition ? Association ? Fusion ?

**Entrée** : ensemble de couples de termes à unifier  $\mathcal{U}$  (récursivité!).

Soient  $(s, t) \in \mathcal{U}$  et  $\sigma$  l'unificateur en construction :

suppression Si  $s = t$ , on les supprime de  $\mathcal{U}$ .

décomposition Si  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  et  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction, on supprime le couple de  $\mathcal{U}$ , et on y ajoute les couples  $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ .

association Si  $s = x$  où  $x$  est une variable, et  $t \neq x$ , et : (de même en inversant  $s$  et  $t$ )

- $x$  n'est pas déjà modifié par  $\sigma$ ,
- $x$  n'apparaît pas dans  $t_\sigma$

alors on met à jour  $\sigma$  par  $\sigma[t\sigma/x]$  et on supprime le couple  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$ . Puis on met à jour  $\mathcal{U}$  en appliquant  $\sigma$ .

fusion Si  $s = x$  où  $x$  est une variable,  $t \neq x$ , et  $x$  est modifié par  $\sigma$ , on remplace le couple à unifier  $(x, t)$  par  $(\sigma(x), t)$ .

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

$$\sigma = [g(x)/v] \quad \mathcal{U} = \left\{ (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

$$\sigma = [g(x)/v] \quad \mathcal{U} = \left\{ (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = ?$$

$$\sigma = [g(x)/v] \quad \mathcal{U} = \left\{ (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = ?$$

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = [g(n(y))/v, n(y)/x]$$

$$\sigma = [g(x)/v] \quad \mathcal{U} = \left\{ (x, n(y)), (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = ?$$

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = [g(n(y))/v, n(y)/x]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \sigma(y, h(z, z)) \right\} = ?$$

$$\sigma = [g(x)/v] \quad \mathcal{U} = \left\{ \left( x, n(y) \right), \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = ?$$

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = [g(n(y))/v, n(y)/x]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \sigma(y, h(z, z)) \right\} = ?$$

$$\mathcal{U} = \left\{ \sigma(y, h(z, z)) \right\} = \left\{ \left( y, h(z, z) \right) \right\}$$

$$\sigma := [g(n(y))/v, n(y)/x]$$

$$\mathcal{U} = \{ \sigma(y, h(z, z)) \} = \{ (y, h(z, z)) \}$$

Suppression ? Décomposition ? Association ? Fusion ?

**Entrée** : ensemble de couples de termes à unifier  $\mathcal{U}$  (récursivité!).

Soient  $(s, t) \in \mathcal{U}$  et  $\sigma$  l'unificateur en construction :

suppression Si  $s = t$ , on les supprime de  $\mathcal{U}$ .

décomposition Si  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  et  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  où  $f$  est une fonction, on supprime le couple de  $\mathcal{U}$ , et on y ajoute les couples  $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ .

association Si  $s = x$  où  $x$  est une variable, et  $t \neq x$ , et : (de même en inversant  $s$  et  $t$ )

- $x$  n'est pas déjà modifié par  $\sigma$ ,
- $x$  n'apparaît pas dans  $t_\sigma$

alors on met à jour  $\sigma$  par  $\sigma[t\sigma/x]$  et on supprime le couple  $(s, t)$  de  $\mathcal{U}$ . Puis on met à jour  $\mathcal{U}$  en appliquant  $\sigma$ .

fusion Si  $s = x$  où  $x$  est une variable,  $t \neq x$ , et  $x$  est modifié par  $\sigma$ , on remplace le couple à unifier  $(x, t)$  par  $(\sigma(x), t)$ .

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

$$\sigma = [g(n(y))/v, n(y)/x] \quad \mathcal{U} = \left\{ (y, h(z, z)) \right\}$$

$$\sigma = [g(n(y))/v, n(y)/x] \quad \mathcal{U} = \left\{ (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y] \circ [g(n(y))/v, n(y)/x] = ?$$

$$\sigma = [g(n(y))/v, n(y)/x] \quad \mathcal{U} = \left\{ (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y] \circ [g(n(y))/v, n(y)/x] = ?$$

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y, g(n(h(z, z)))/v, n(h(z, z))/x]$$

$$\sigma = [g(n(y))/v, n(y)/x] \quad \mathcal{U} = \left\{ (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y] \circ [g(n(y))/v, n(y)/x] = ?$$

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y, g(n(h(z, z)))/v, n(h(z, z))/x]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = ?$$

$$\sigma = [g(n(y))/v, n(y)/x] \quad \mathcal{U} = \left\{ (y, h(z, z)) \right\}$$

Mettre à jour  $\sigma$  :

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y] \circ [g(n(y))/v, n(y)/x] = ?$$

$$\sigma := [\sigma(h(z, z))/y] \circ \sigma = [h(z, z)/y, g(n(h(z, z)))/v, n(h(z, z))/x]$$

Mettre à jour  $\mathcal{U}$  :

$$\mathcal{U} = ?$$

$$\mathcal{U} = \emptyset$$

Suppression ? Décomposition ? Association ? Fusion ?

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

$$\sigma := [h(z, z)/y, g(n(h(z, z)))/v, n(h(z, z))/x]$$

$$\sigma(s) = ? \text{ et } \sigma(t) = ?$$

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

$$\sigma := [h(z, z)/y, g(n(h(z, z)))/v, n(h(z, z))/x]$$

$$\sigma(s) = ? \text{ et } \sigma(t) = ?$$

$$\sigma(s) = f(h(n(h(z, z)), h(z, z)), g(n(h(z, z))))$$

$$\sigma(t) = f(h(n(h(z, z)), h(z, z)), g(n(h(z, z))))$$

### Définition

Soient  $t$  et  $u$  deux termes. Alors, soit  $t$  et  $u$  ne sont pas unifiables, soit il existe un unificateur le plus général (ou mgu)  $\sigma$  tel que :

- $t_\sigma = u_\sigma$
- Pour tout unificateur  $\sigma'$  de  $t$  et  $u$ , il existe  $\sigma''$  tel que  $\sigma' = \sigma\sigma''$  (autrement dit,  $\sigma'$  substitue trop par rapport à  $\sigma$ ).

On note :  $\sigma = \text{mgu}(t, u)$ .

### Définition

Soient  $t$  et  $u$  deux termes. Alors, soit  $t$  et  $u$  ne sont pas unifiables, soit il existe un unificateur le plus général (ou mgu)  $\sigma$  tel que :

- $t_\sigma = u_\sigma$
- Pour tout unificateur  $\sigma'$  de  $t$  et  $u$ , il existe  $\sigma''$  tel que  $\sigma' = \sigma\sigma''$  (autrement dit,  $\sigma'$  substitue trop par rapport à  $\sigma$ ).

On note :  $\sigma = \text{mgu}(t, u)$ .

Lorsqu'il réussit, l'algorithme vu précédemment donne exactement le  $\text{mgu}(t, u)$ .

- Une formule est **close** si elle ne comporte pas de variables libres.
- Pour une formule close  $F$  et un modèle  $\mathcal{M}$ , on note  $\mathcal{M} \models F$  si l'interprétation de  $F$  est vraie dans  $\mathcal{M}$ . On dit «  $\mathcal{M}$  **satisfait**  $F$  » ou encore «  $\mathcal{M}$  est un modèle **pour**  $F$  ».
- Si l'interprétation de  $F$  dans  $\mathcal{M}$  est fausse, on note  $\mathcal{M} \not\models F$ .

Pour deux formules closes  $F$  et  $G$  et un modèle  $\mathcal{M}$ , on a :

- $\mathcal{M} \models \neg F$  ssi  $\mathcal{M} \not\models F$
- $\mathcal{M} \models (F \wedge G)$  ssi  $\mathcal{M} \models F$  et  $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \vee G)$  ssi  $\mathcal{M} \models F$  ou  $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)$  ssi  $\mathcal{M} \models \neg F$  ou  $\mathcal{M} \models G$

Pour deux formules  $F(x)$  et  $G(x)$  admettant  $x$  comme variable libre,  $\mathcal{M}$  un modèle et  $\mathbf{a}$  un élément du domaine de  $\mathcal{M}$ , on a :

- $\mathcal{M} \models \neg F(\mathbf{a})$  ssi  $\mathcal{M} \not\models F(\mathbf{a})$
- $\mathcal{M} \models (F \wedge G)(\mathbf{a})$  ssi  $\mathcal{M} \models F(\mathbf{a})$  et  $\mathcal{M} \models G(\mathbf{a})$
- $\mathcal{M} \models (F \vee G)(\mathbf{a})$  ssi  $\mathcal{M} \models F(\mathbf{a})$  ou  $\mathcal{M} \models G(\mathbf{a})$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)(\mathbf{a})$  ssi  $\mathcal{M} \not\models F(\mathbf{a})$  ou  $\mathcal{M} \models G(\mathbf{a})$
- $\mathcal{M} \models \forall x F(x)$  ssi, quelque soit  $\mathbf{a}$  dans le domaine, on a  $\mathcal{M} \models F(\mathbf{a})$
- $\mathcal{M} \models \exists x F(x)$  ssi pour au moins un élément  $\mathbf{a}$  du domaine, on a  $\mathcal{M} \models F(\mathbf{a})$

**Modèle étendu**  $\mathcal{M}[x/a]$  : modèle obtenu à partir de  $\mathcal{M}$  en substituant la variable  $x$  au terme  $a$  dans le domaine de  $\mathcal{M}$ .

- $\mathcal{M} \models \forall x \phi$  ssi  $\mathcal{M}[x/a] \models \phi$  pour tout élément  $a$  dans le domaine de  $\mathcal{M}$
- $\mathcal{M} \models \exists x \phi$  ssi  $\mathcal{M}[x/a] \models \phi$  pour un élément  $a$  dans le domaine de  $\mathcal{M}$

- Une formule est **valide** si elle est vraie dans toute interprétation et toute affectation des variables libres. Sinon, elle est **invalid**.
- Une formule est **insatisfiable** si elle est fausse dans toute interprétation et toute affectation des variables libres. Sinon elle est **satisfiable**.

- Une **théorie** ( $T$ ) est un ensemble de formules closes. Si un modèle ( $\mathcal{M}$ ) **satisfait** toutes les formules d'une théorie ( $T$ ), alors  **$\mathcal{M}$  est un modèle de  $T$**  ( $\mathcal{M} \models T$ ).
- Une théorie **consistante** est une théorie qui a au moins un modèle. Sinon la théorie est **contradictoire**.

Problème SAT ou B-SAT ou problème de **satisfaisabilité booléenne** : c'est un problème de décision.

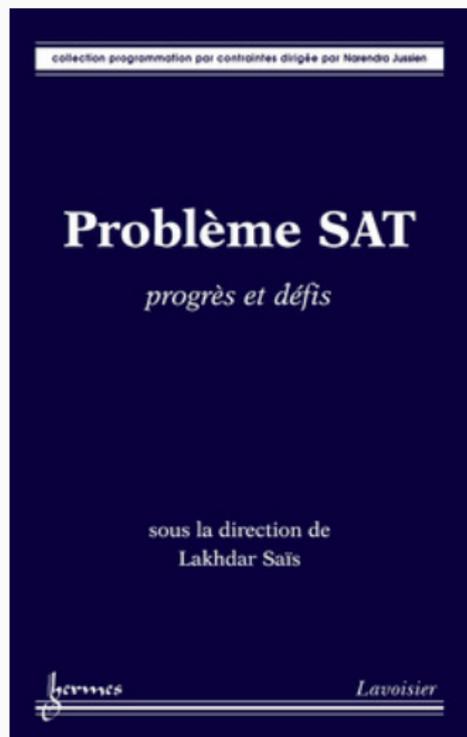
**Entrée** : formule de logique propositionnelle

**Sortie** : existence/non existence d'une assignation des variables propositionnelles qui rend la formule vraie

Pour chacune des formules, donner une assignation des variables propositionnelles qui rend la formule vraie ou prouver qu'il n'en existe pas :

1.  $a \wedge \neg b$
2.  $a \wedge \neg a$
3.  $(a \wedge b) \vee \neg a$
4.  $\{\neg a \vee \neg b \vee c, a \vee d, b \vee e, \neg c \vee e, d \vee \neg e, \neg d \vee e, \neg d \vee \neg e\}$

Référence :



# DÉDUCTION NATURELLE (1)

---

On démontre en construisant des **arbres d'inférence** grâce à l'application de **règles d'inférence**.

Un seul axiome :  $\Gamma, p \vdash p$ , où  $\Gamma$  est l'**antécédent**, un ensemble de prédicats appelés **hypothèses**.

Attention : l'axiome est la seule condition d'arrêt.

$$\text{Ax} \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de l'implication :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'implication (modus ponens) :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Élimination du faux

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction du et :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du et à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du et à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du ou à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du ou à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du ou :

$$\vee E \frac{\Gamma \vdash p \vee q \quad \Gamma, p \vdash r \quad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Montrer :  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$ .

$$\rightarrow I \frac{\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash r}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r}$$

$$\rightarrow E \quad \frac{\rightarrow I \quad \frac{\boxed{1} \quad \Gamma \vdash q \rightarrow r \quad \Gamma \vdash q \quad \boxed{2}}{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash r}}{p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r}}{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash r}$$

$$\wedge E_d \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash p \wedge q}{\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash q}$$

$$\text{Ax} \quad \frac{\wedge E_d \quad \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash p \wedge q}{\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash q}}{\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash q}$$

$$\rightarrow E \frac{\boxed{1.1} \quad \Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \boxed{1.2} \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash q \rightarrow r}$$

$$\rightarrow E \quad \frac{\text{Ax} \quad \boxed{1.1} \quad \overline{\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}), (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vdash \mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})} \quad \boxed{1.2} \quad \Gamma \vdash \mathbf{p}}{\Gamma = \mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}), (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vdash \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow E \quad \text{Ax} \quad \frac{\boxed{1.1} \quad \Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)}{\Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash q \rightarrow r} \quad \wedge E_g \quad \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash p \wedge q}{\boxed{1.2} \quad \Gamma \vdash p} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow E \quad \text{Ax} \quad \frac{\quad}{\boxed{1.1} \quad \Gamma \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)} \quad \quad \quad \wedge E_g \quad \text{Ax} \quad \frac{\quad}{\boxed{1.2} \quad \Gamma \vdash p} \quad \frac{p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash p \wedge q}{\quad} \\
 \hline
 \Gamma = p \rightarrow (q \rightarrow r), (p \wedge q) \vdash q \rightarrow r
 \end{array}$$