FORMALISMES DE REPRÉSENTATION ET RAISONNEMENT - CM5

Chuyuan Li

13 mars 2023

Université de Lorraine

LA DERNIÈRE FOIS

Unification

- Unificateur le plus général (mgu)
- Algorithme récursif

Déduction naturelle

- Règles d’inférence pour la logique propositionnelle
- Arbres d’inférence, antécédent, conclusion

1. Réduction naturelle (2)
2. Résolution en logique des prédicats
3. (Si nous avons du temps) Correction des 3 questions DM en déduction naturelle

DÉDUCTION NATURELLE (2)

Règles d'inférence : l'IMPLICATION, le FAUX, le ET, le OU

Qu'est ce qui manque ?

Introduction du quantificateur universel :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\, F} \text{ si x n'est libre dans } \Gamma$$

Élimination du quantificateur universel :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\, F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

RÈGLES D'INFÉRENCE : QUANTIFICATEUR EXISTENTIEL

Introduction du quantificateur existentiel :

$$\exists\mathrm{I} \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\, F(x)}$$

Élimination du quantificateur existentiel :

$$\exists\mathrm{E} \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\, F \qquad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$

EXEMPLE

Montrer : $\forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x\ F(x)) \wedge (\forall x\ G(x))$.

DÉPART

$$\wedge\mathrm{I}\quad \frac{\boxed{1}\ \Gamma \vdash \forall x\ F(x) \qquad \boxed{2}\ \Gamma \vdash \forall x\ G(x)}{\Gamma = \forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x\ F(x)) \wedge (\forall x\ G(x))}$$

BRANCHE $\boxed{1}$

$$\forall I \quad \frac{\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash F}{\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash \forall x\, F(x)}$$

$$\wedge E_g \quad \dfrac{\forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash F \wedge G}{\forall I \quad \dfrac{\forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash F}{\forall x\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash \forall x\ F(x)}}$$

$$\forall E\;\dfrac{\mathrm{Ax}\;\dfrac{}{\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash \forall x\,(F(x) \wedge G(x))}}{\wedge E_g\;\dfrac{\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash F \wedge G}{\forall I\;\dfrac{\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash F}{\forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash \forall x\, F(x)}}}$$

Et la branche $\boxed{2}$?

DÉPART

$$\wedge\mathrm{I}\quad \frac{\boxed{1}\ \Gamma \vdash \forall x\, F(x) \qquad \boxed{2}\ \Gamma \vdash \forall x\, G(x)}{\Gamma = \forall x\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x\, F(x)) \wedge (\forall x\, G(x))}$$

BRANCHE $\boxed{2}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\,(F(x) \land G(x)) \vdash \forall x\,(F(x) \land G(x))}\;\mathrm{Ax}}{\forall x\,(F(x) \land G(x)) \vdash F \land G}\;\forall E}{\forall x\,(F(x) \land G(x)) \vdash G}\;\land E_d}{\forall x\,(F(x) \land G(x)) \vdash \forall x\, G(x)}\;\forall I
$$

Lorsque l'on cherche à démontrer un énoncé à l'aide de la déduction naturelle :

- On commence par chercher à déconstruire le plus possible la conclusion :
  - utilisation des règles d'introduction (attention, ça ne marche pas toujours !)
- Puis, on cherche à reconstruire les hypothèses :
  - utilisation des règles d'élimination (attention, ça ne marche pas toujours !)

Résolution en logique des prédicats

Modus ponens :

$$\frac{\neg p \lor q \qquad p}{q}$$

Modus ponens :

$$\frac{\neg p \lor q \qquad p}{q}$$

Règle de résolution :

$$\frac{\neg p \lor L_1 \lor \ldots \lor L_m \qquad p \lor M_1 \lor \ldots \lor M_n}{L_1 \lor \ldots \lor L_m \lor M_1 \lor \ldots \lor M_n}$$

Soit un prédicat « chemin » (c) d'arité 2, une fonction « voisin » (v) d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici » (i). On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \forall x.\ c(x, v(x)) \\ \phi_2 &= \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big((c(x, z) \land c(z, y)) \rightarrow c(x, y) \Big) \\ \phi &= \exists a.\ c(i, v(v(a))) \end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

RÈGLE DE RÉSOLUTION

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

RÈGLE DE RÉSOLUTION

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Comment faire en sorte de pouvoir utiliser cette règle ?

FORME NORMALE EN LOGIQUE DES PRÉDICATS

1. Mettre les quantificateurs au début de la formule : mise sous **forme prénexe**
2. Supprimer les quantificateurs existentiels ($\exists$) : **skolémisation**
3. Passer en **forme normale conjonctive** (FNC)

Définition

Une formule F est en **forme prénexe** lorqu'elle est de la forme $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\, \phi$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ pour $i \in \mathbb{N}$
- ϕ est une formule ne contenant pas de quantificateurs

Définition

Une formule F est en **forme prénexe** lorqu'elle est de la forme $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\ \phi$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ pour $i \in \mathbb{N}$
- ϕ est une formule ne contenant pas de quantificateurs

À partir d'une formule F, on peut construire une formule F′ sémantiquement équivalente qui soit sous forme prénexe.

TRANSFORMATIONS

La formule	se transforme en
(1)$\neg(\forall x.\ \phi)$	$\exists x.\ \neg\phi$
(2)$\neg(\exists x.\ \phi)$	$\forall x.\ \neg\phi$
(3)$\phi \vee \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
(4)$\phi \vee \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
(5)$(\forall x.\ \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
(6)$(\exists x.\ \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
(7)$\phi \wedge \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
(8)$\phi \wedge \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
(9)$(\forall x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
(10)$(\exists x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
(11)$\phi \rightarrow \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
(12)$\phi \rightarrow \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
(13)$(\forall x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
(14)$(\exists x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

ATTENTION

1. On effectue éventuellement un renommage (de x vers x') pour éviter la capture de variables libres.
2. Attention au quantificateur à gauche d'une implication $\rightarrow$ lignes (13) et (14).
3. Attention au quantificateur avec la négation $\rightarrow$ lignes (1) et (2).

Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x.\ c(x, v(x))$$
$$\phi_2 = \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big((c(x, z) \wedge c(z, y)) \rightarrow c(x, y) \Big)$$
$$\neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

Qu'en pensez vous ?

AUTRE EXEMPLE

Soit $F = \exists x. \Big(r(x) \wedge \forall y. (\neg s(x, y) \vee \neg b(y, c)) \Big)$. Mettre F sous forme prénexe.

La formule	se transforme en
(1)$\neg(\forall x.\ \phi)$	$\exists x.\ \neg\phi$
(2)$\neg(\exists x.\ \phi)$	$\forall x.\ \neg\phi$
(3)$\phi \vee \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
(4)$\phi \vee \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
(5)$(\forall x.\ \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
(6)$(\exists x.\ \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
(7)$\phi \wedge \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
(8)$\phi \wedge \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
(9)$(\forall x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
(10)$(\exists x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
(11)$\phi \rightarrow \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
(12)$\phi \rightarrow \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
(13)$(\forall x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
(14)$(\exists x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

$$F = \exists x. \Big(r(x) \land \forall y. (\neg s(x, y) \lor \neg b(y, c)) \Big)$$

MISE SOUS FORME PRÉNEXE

$$
\begin{aligned}
F &= \exists x. \Big(r(x) \wedge \forall y. (\neg s(x,y) \vee \neg b(y,c)) \Big) \\
&\equiv \exists x.\ \forall y.\ \Big(r(x) \wedge (\neg s(x,y) \vee \neg b(y,c)) \Big)
\end{aligned}
$$

Le résultat peut varier selon l'ordre d'application des règles.
Cela peut changer la difficulté de prouver/réfuter la forme prénexe : $\forall x.\exists y.\phi$ est plus facile à prouver (mais plus difficile à réfuter) que $\exists y.\forall x.\phi$.

Définition

Une formule F est en **sous forme normale de Skolem** lorsqu'elle est en forme prénexe et $Q_i = \forall$ pour $i \in \mathbb{N}$.

PRINCIPE

$$\forall x. \exists y.\ p(x, y)$$

PRINCIPE

$$\forall x. \exists y.\ p(x, y)$$

« pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ »

$$\forall x. \exists y.\ p(x, y)$$

« pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ »

On peut définir une fonction f qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que $p(x, y)$ est vrai. On a alors :

$$\forall x.\ p(x, f(x))$$

ATTENTION

1. S'il y a plusieurs quantificateurs universels, la fonction dépend de toutes les variables qui viennent avant la variable liée au quantificateur existentiel dans la formule.

2. En général, la formule skolémisée n'est pas équivalente à la formule d'origine, mais l'une est satifiable si et seulement si l'autre l'est (d'où l'utilisation des formes normales de Skolem dans la résolution).

Mettre sous forme normale de Skolem les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ c(x, v(x)) \\
\phi_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big((c(x, z) \land c(z, y)) \to c(x, y)\Big) \\
\neg\phi &= \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Qu'en pensez vous ?

AUTRE EXEMPLE

Soit $G = \forall x.\exists y.\ ((r(x) \vee \neg p(y)) \rightarrow s(x, y))$. Mettre F sous forme normale de Skolem.

DÉROULEMENT DE L'EXEMPLE

$$G = \forall x. \exists y. ((r(x) \vee \neg p(y)) \rightarrow s(x, y))$$

On définit une fonction f d'arité 1 qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que

$$((r(x) \vee \neg p(f(x))) \rightarrow s(x, f(x)))$$

est vraie.

$$G = \forall x. \exists y. \left((r(x) \vee \neg p(y)) \rightarrow s(x, y) \right)$$

On définit une fonction f d'arité 1 qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que

$$((r(x) \vee \neg p(f(x))) \rightarrow s(x, f(x)))$$

est vraie. On a alors :

$$G' = \forall x. \left((r(x) \vee \neg p(f(x))) \rightarrow s(x, f(x)) \right)$$

3. CONVERSION SOUS FNC

C'est quoi FNC ?

C'est quoi FNC ?

1. Élimination des implications.
   - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
   - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
   - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
   - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
3. Distribution des disjonctions (OU) sur les conjonctions (ET)
   - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ c(x, v(x)) \\
\phi_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big((c(x,z) \land c(z,y)) \rightarrow c(x,y)\Big) \\
\neg\phi &= \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Qu'en pensez vous ?

$$\phi_1 = \forall x.\ c(x, v(x)) \quad \textbf{OK}$$

$$\phi_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big((c(x, z) \land c(z, y)) \to c(x, y)\Big)$$

$$\neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big) \quad \textbf{OK}$$

Qu'en pensez vous ?

MISE SOUS FORME NORMALE CONJONCTIVE

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \rightarrow c(x,y)\Big) \\
&\equiv \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \vee c(x,y)\Big) \\
&\equiv \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)
\end{aligned}
$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$

$$F_2 = \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big(\neg c(x, z) \vee \neg c(z, y) \vee c(x, y)\Big)$$

$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

- Règle de résolution :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

- Mise sous forme normale (logique des prédicats)
  - Mise sous forme prénexe
  - Mise sous forme normale de Skolem
  - Mise sous forme normale conjonctive

Soit un prédicat « chemin » (c) d'arité 2, une fonction « voisin » (v) d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici » (i). On définit les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$\phi_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x, z) \wedge c(z, y)\big) \rightarrow c(x, y)\Big)$$
$$\phi = \exists a.\ c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION

- Contraposée

ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION

- Contraposée
- Mise sous forme normale
  - Mise sous forme prénexe
  - Mise sous forme normale de Skolem (Skolémisation)
  - Mise sous forme normale conjonctive (FNC)

ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION

- Contraposée
- Mise sous forme normale
    - Mise sous forme prénexe
    - Mise sous forme normale de Skolem (Skolémisation)
    - Mise sous forme normale conjonctive (FNC)
- **Substitution et résolution**

FORMULES DE TRAVAIL

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)$$
$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

FORMULES DE TRAVAIL

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$

$$F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)$$

$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

On va chercher à appliquer la règle de résolution à F_2 et F_3.

SUBSTITUTION

Soit u une variable fraîche.

$$F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \lor \neg c(z,y) \lor c(x,y)\Big)$$

$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v(v(a))\Big)$$

Soit u une variable fraîche.

$$F_2 = \forall x. \forall y. \forall z. \left(\neg c(x, z) \lor \neg c(z, y) \lor c(x, y)\right)$$
$$F_3 = \neg \phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

$$F_2\Big[i/x, v(v(u))/y\Big] = \forall u. \forall z.\ \Big(\neg c(i, z) \lor \neg c\big(z, v(v(u)\big) \lor c\big(i, v(v(u))\big)\Big)$$
$$F_3\Big[u/a\Big] = \forall u.\ \neg c\Big(i, v\big(v(u)\big)\Big)$$

Soit u une variable fraîche.

$$F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \left(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\right)$$
$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\left(i, v\left(v(a)\right)\right)$$

$$F_2\left[i/x, v(v(u))/y\right] = \forall u.\forall z.\ \left(\neg c(i,z) \vee \neg c\left(z, v(v(u)\right) \vee \mathbf{c\left(i, v(v(u))\right)}\right)$$
$$F_3\left[u/a\right] = \forall u.\ \mathbf{\neg c\left(i, v\left(v(u)\right)\right)}$$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions, on obtient :

$$\forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big) = F_4$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)$$
$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$
$$F_4 = \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)\\
F_2 &= \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big(\neg c(x, z) \lor \neg c(z, y) \lor c(x, y)\Big)\\
F_3 &= \neg \phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)\\
F_4 &= \forall u. \forall z.\ \Big(\neg c(i, z) \lor \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big)
\end{aligned}
$$

On va chercher à appliquer la règle de résolution à F_4 et F_1.

SUBSTITUTION

$$F_4 = \forall u.\forall z.\ \left(\neg c(i, z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\right)$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$

$$F_4 = \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i, z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big)$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$

$$F_4\Big[v(i)/z, i/u\Big] = \neg c\big(i, v(i)\big) \vee \neg c\big(v(i), v(v(i))\big)$$

$$F_1\Big[v(i)/x\Big] = c\big(v(i), v(v(i))\big)$$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions, on obtient :

$$\neg c\big(i, v(i)\big) = F_5$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$

$$F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)$$

$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

$$F_4 = \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big)$$

$$F_5 = \neg c\big(i, v(i)\big)$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$

$$F_2 = \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)$$

$$F_3 = \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

$$F_4 = \forall u. \forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big)$$

$$F_5 = \neg c\big(i, v(i)\big)$$

On va chercher à appliquer la règle de résolution à F_1 et F_5.

SUBSTITUTION

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$F_5 = \neg c\big(i, v(i)\big)$$

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$F_5 = \neg c\big(i, v(i)\big)$$

$$F_1\Big[i/x\Big] = c\big(i, v(i)\big)$$

SUBSTITUTION

$$F_1 = \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$F_5 = \neg c\big(i, v(i)\big)$$

$$F_1\Big[i/x\Big] = c\big(i, v(i)\big)$$

Qu'en pensez vous ?

On aboutit à une contradiction : ainsi, $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Correction s’il est possible de réfuter par résolution un ensemble de clauses, alors cet ensemble est insatisfaisable.

Complétude si un ensemble de clauses est insatisfaisable, alors il est possible de le réfuter par résolution.

Terminaison la méthode de résolution en logique des prédicats ne **termine** pas en particulier lorsque l’ensemble de clauses est satisfaisable.

La résolution est **correcte** et **complète**, mais ne termine pas nécessairement.

Correction s'il est possible de réfuter par résolution un ensemble de clauses, alors cet ensemble est insatisfaisable.

Complétude si un ensemble de clauses est insatisfaisable, alors il est possible de le réfuter par résolution.

Terminaison la méthode de résolution en logique des prédicats ne **termine** pas en particulier lorsque l'ensemble de clauses est satisfaisable.

Vériconditionnelle Chaque proposition est vraie ou fausse (on exclut : plausibilité, rectitude politique, modalité…)

Compositionnelle La signification (valeur de vérité) d'une proposition complexe dépend uniquement de la signification des propositions qui la composent (principe de Frege)

Formelle Les règles d'écriture, propriétés, conséquences d'une formule sont définies rigoureusement.

Calculable On peut définir deux types de règles de calcul :

- **Syntaxiques** Permettent de définir des inférences valides en fonction de la forme des prémisses
- **Sémantiques** S'appuyent sur la compositionnalité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

Alice$_1$ Charlie est une doctorante.

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

Alice$_1$ Charlie est une doctorante.

· Le sens : compositionnalité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

Alice$_1$ Charlie est une doctorante.

Bob$_2$ Elle préfère le thé ou le café ?

· Le sens : compositionnalité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

Alice_1 Charlie est une doctorante.
Bob_2 Elle préfère le thé ou le café ?

- Le sens : compositionnalité
- Le contexte : dynamicité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

Alice$_1$ Charlie est une doctorante.

Bob$_2$ Elle préfère le thé ou le café ?

Alice$_3$ Oui.

- Le sens : compositionnalité
- Le contexte : dynamicité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

Alice_1	Charlie est une doctorante.
Bob_2	Elle préfère le thé ou le café ?
Alice_3	Oui.

- Le sens : compositionnalité
- Le contexte : dynamicité
- La compréhension : logique

A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. (done) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$
2. (DM) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$
3. (DM) $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
4. (DM) $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$