Formalismes de Représentation et Raisonnements

TD 3 - Logique des prédicats, Substitution, Modèles

Chuyuan Li

1 Substitution

1. Soit $F = \forall x\Big(u\big(h(x,y), g(y), z\big)\Big) \vee \Big(\forall y \exists z\big(v(y,z) \rightarrow w(x,y,z)\big)\Big)$
   (a) Quelles sont les variables libres, liées de F ?
   (b) Effectuer, étape par étape, la substitution $F[f(x,y,z)/x]$?
   (c) Effectuer, étape par étape, la substitution $F[t(x,y)/y]$
2. Composer les substitutions suivantes (calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$). La composante de substitution se produit de gauche à droite. Ainsi, $\sigma_1 \circ \sigma_2$ implique que σ_1 doit être appliqué en premier, suivi de σ_2. Par exemple : $\psi(\sigma_1\sigma_2) = (\psi\sigma_1)\sigma_2$

   (a) $\sigma_1 : [x/y]$
   $\sigma_2 : [y/x]$
   (b) $\sigma_1 : [h(y)/y, h(y)/z]$
   $\sigma_2 : [y/x, y/z, f(z)/w]$
   (c) $\sigma_1 : [b/y, a/x, y/z]$
   $\sigma_2 : [f(y)/x, z/y]$
   (d) $\sigma_1 : [f(a)/x, g(b,z)/y, x/z]$
   $\sigma_2 : [w/x, h(z)/y, a/z]$

2 Modèles

2.1 Traduction et vérité

Soit la situation suivante :

Il y a quatre individus, Amélie, Brice, Christian, Delphine. Amélie et Delphine sont des filles ; Brice et Christian des garçons. Amélie et Brice ont chacun un chat ; Christian et Delphine ont chacun un chien. Amélie lit. Brice, Christian, et Delphine mangent. (Note : ce qui n'est pas précisé est faux. Par exemple, Amélie ne mange pas.)

1. Décrire le modèle M correspondant à cette situation. Préciser le domaine D et l'interprétation I.

2. Formaliser les phrases ci-dessous dans le langage des prédicats. Pour chacune des formules correspondantes, dites si elle est vraie ou fausse dans le modèle M en justificant votre réponse
   (a) Amélie mange ou lit.
   (b) Si Brice et Christian mangent, alors Delphine ne lit pas.
   (c) Delphine a un chat ou un chien.
   (d) Tout le monde a un chat ou un chien.
   (e) Si quelqu'un lit, tout le monde mange.
   (f) Si tous les garçons ont un chien, toutes les filles ont un chat.
   (g) Tous ceux qui mangent ne lisent pas. (il existe plus qu'une lecture)

2.2 Exercice classique

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{a, P, f\}$ où a est une constante, P un prédicat binaire et f une fonction unaire. Proposer un ou plusieurs modèles pour chacune des formules suivantes :

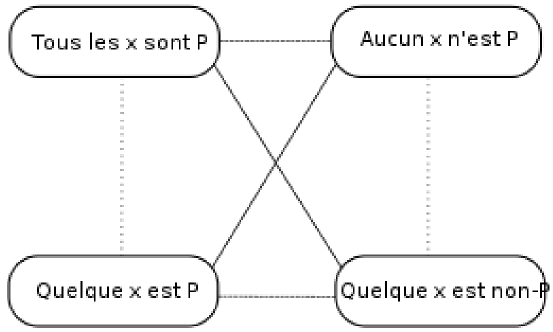
1. $F = \forall x \forall y \left(P(x, y) \vee P(y, x)\right)$
2. $G = \forall x\ P(x, f(x))$
3. $H = \forall x \forall y \left(P(x, f(y)) \rightarrow P(x, y)\right)$

3 Reprise du TD2 : logique des prédicats

1. Traduisez les énoncés suivants en formules de la logique des prédicats (on donnera à chaque fois l'interprétation des prédicats utilisés – par exemple A(x, y) = x aime y). En cas d'énoncé ambigu, on proposera deux formules, et expliquera pourquoi il est ambigu.
   (a) Jean est plus grand que Marie.
   (b) Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu.
   (c) Si Jean est un homme, alors il est mortel.
   (d) Un chat est entré.
   (e) Certains enfants ne sont pas malades.
   (f) Tous les éléphants ont une trompe.
   (g) Tous les hommes n'aiment pas Marie.
   (h) Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.
   (i) Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente.
   (j) Tous les fermiers apprécient un ministre.

2. La relation entre les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est assez facile à voir si on considère, par exemple, que *rien n'est éphémère* ($\forall x \neg E(x)$) peut aussi se dire *Il n'existe pas de chose éphémère* ($\neg \exists x E(x)$).

   Cette équivalence est souvent illustrés sous la forme du **carré d'opposition**, qui permet de faire apparaître les interprétations des quantificateurs :

   Traduisez les quatre propositions du carré d'opposition en logique des prédicats. Dans chaque cas, il y a deux possibilités de traduction, avec les deux quantificateurs.

3. Traduisez en logique des prédicats les propositions suivantes, et, en cas d'ambiguïté, donnez toutes les traductions correspondantes.
   (a) Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer.
   (b) Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question.
   (c) Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.
   (d) Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise.
   (e) Tout le monde a lu un livre de logique.

4. Traduisez les phrases suivante en logique des prédicats. Attention, pour les phrases compliquées, essayez faire niveau par niveau.
   (a) Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.
   (b) Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.
   (c) Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée.