Formalismes de Représentation et Raisonnements

TD 5 - Déduction naturelle (2)

1 Déduction naturelle

A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. (a) (done) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$
   (b) (DM) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$
   (c) (DM) $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
   (d) (DM) $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
   (e) $p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash r$
   (f) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
2. (a) $\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x\ (F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))$

2 Forme normale en logique des prédicats

1. Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :
   (a) $\big(P(a) \vee P(b)\big) \rightarrow \exists x.\ P(x)$
   (b) $\forall x.\ \forall y.\ \Big[\big(P(x) \rightarrow P(y)\big) \rightarrow \Big(\big(\exists x.\ P(x)\big) \rightarrow \big(\forall x.\ P(x)\big)\Big)\Big]$
2. Mettre sous forme normale de Skolem les formules suivantes :
   (a) $\exists x.\ \big(P(a) \vee P(b) \rightarrow P(x)\big)$
   (b) $\forall x.\ \exists y.\ \big(P(y) \rightarrow P(x)\big)$
   (c) $\exists y.\ \forall x.\ \big(P(y) \rightarrow P(x)\big)$

3 Résolution en logique des prédicats

Soient les prédicats p, r d'arité 1, les prédicats q, s d'arité 2, les variables x, y et la constante i. On définit les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x.\ p(x) \rightarrow q(x,i)$$
$$\phi_2 = \forall x. \exists y.\ \Big(\big(r(x) \vee \neg p(y)\big) \rightarrow s(x,y)\Big)$$
$$\phi_3 = \forall x.\ p(x)$$
$$\phi = \forall x.\ \Big(r(x) \rightarrow \exists y.\ \big(s(x,y) \wedge q(y,i)\big)\Big)$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \vdash \phi$.