

La réalité augmentée

2. GÉOMÉTRIE DE LA RA

- 2.1 Modèle de caméra = perspective centrale
- 2.2 Géométrie des points de fuite
- 2.3 Détection automatique de points de fuite

2. Géométrie de la RA

2.1 MODÈLE DE CAMÉRA = PERSPECTIVE CENTRALE

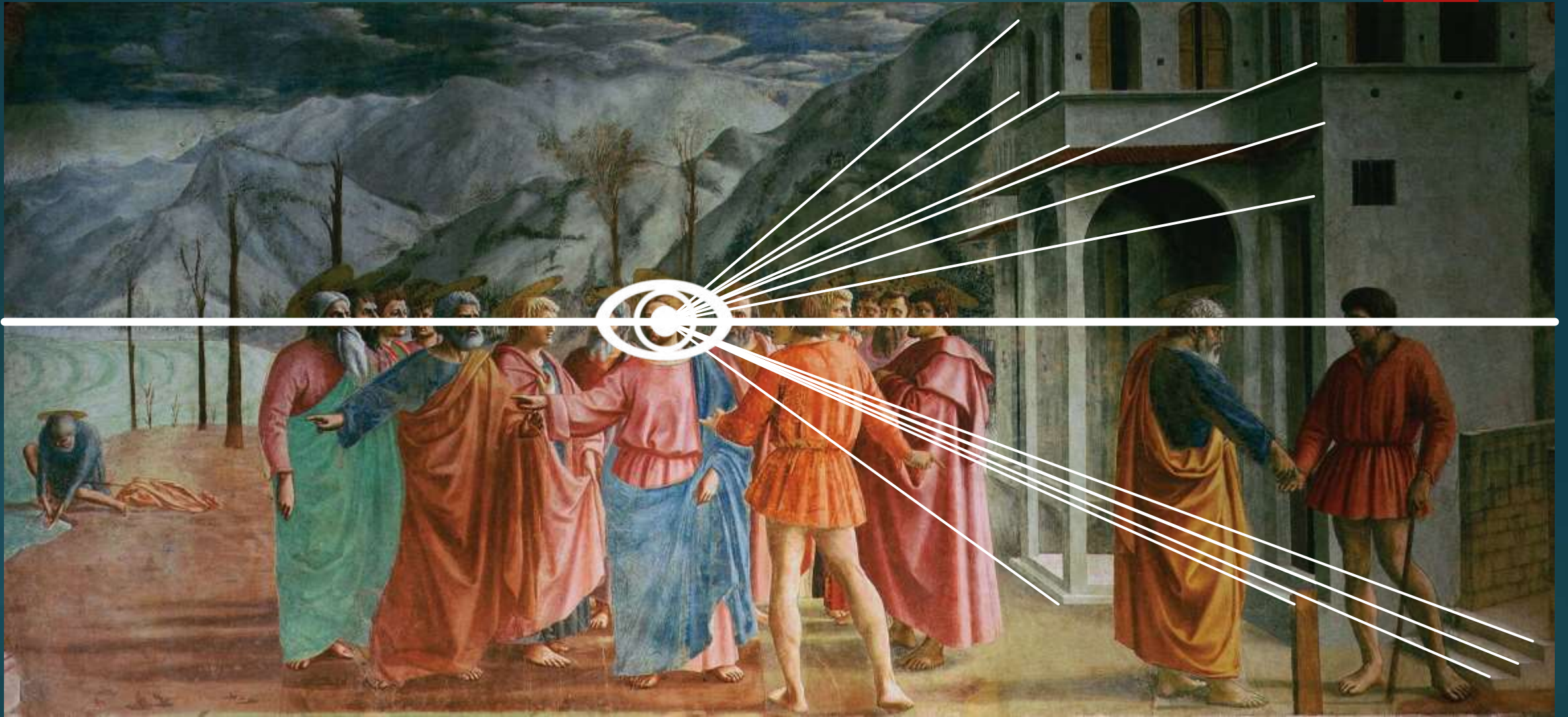
La perspective centrale



Ambrogio Lorenzetti, Les effets du bon gouvernement, 1340



Masaccio, *Paiement du tribut*, fresque, 255 × 598 cm,
chapelle Brancacci, église Sainte-Marie du Carmel,
Florence, 1424-1427



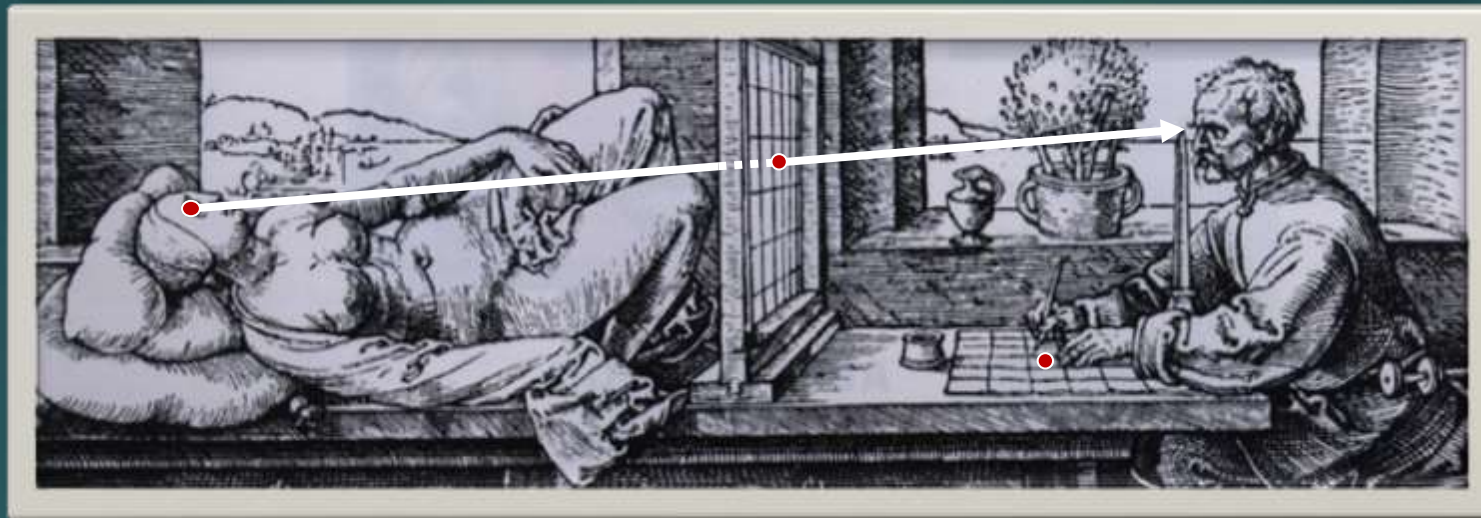
Masaccio, *Paiement du tribut*, fresque, 255 × 598 cm,
chapelle Brancacci, église Sainte-Marie du Carmel,
Florence, 1424-1427

La perspective centrale

« Quand donc la lumière du jour entoure le flux issu des yeux, alors le feu intérieur qui s'échappe, le semblable allant vers le semblable, après s'être combiné avec la lumière du jour se constitue en un seul corps ayant les mêmes propriétés tout le long de la droite issue des yeux, quel que soit l'endroit où le feu qui jaillit de l'intérieur entre en contact avec le feu qui provient des objets extérieurs »

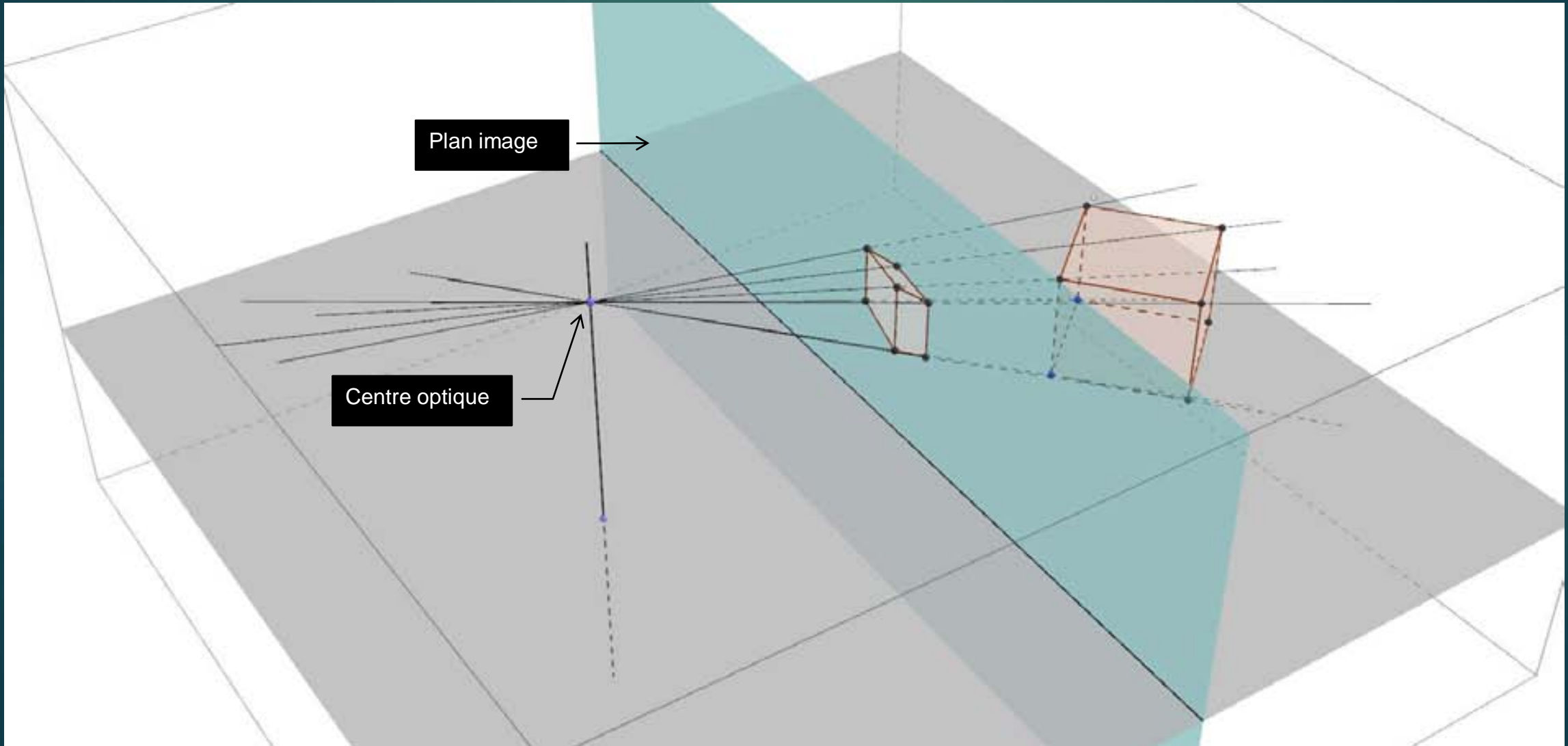
Platon, *Timée*, vers -360

La perspective centrale

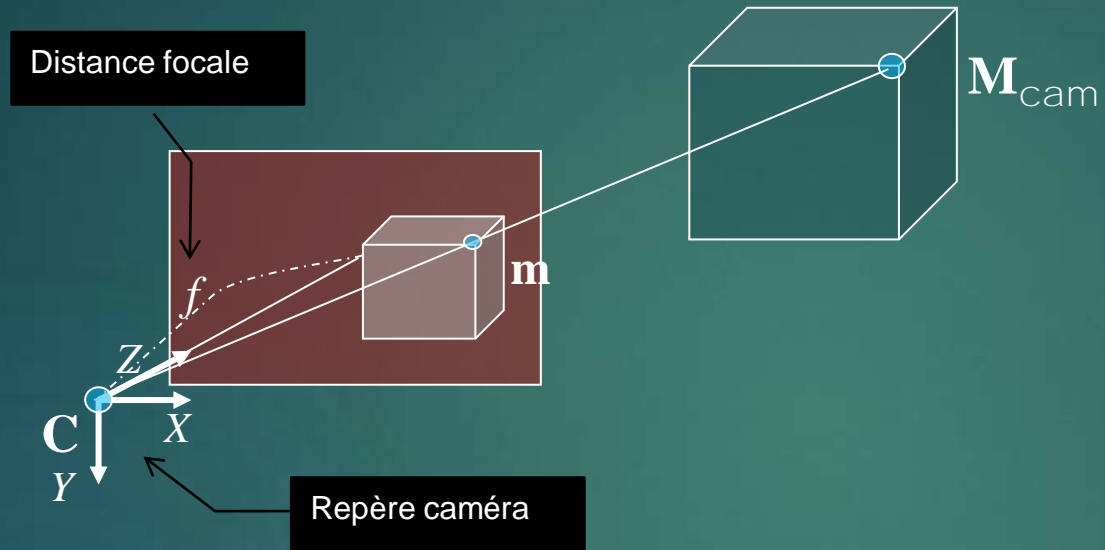


Albrecht Durer, Instructions pour mesurer (Le dessinateur de la femme couchée), 1527

La perspective centrale

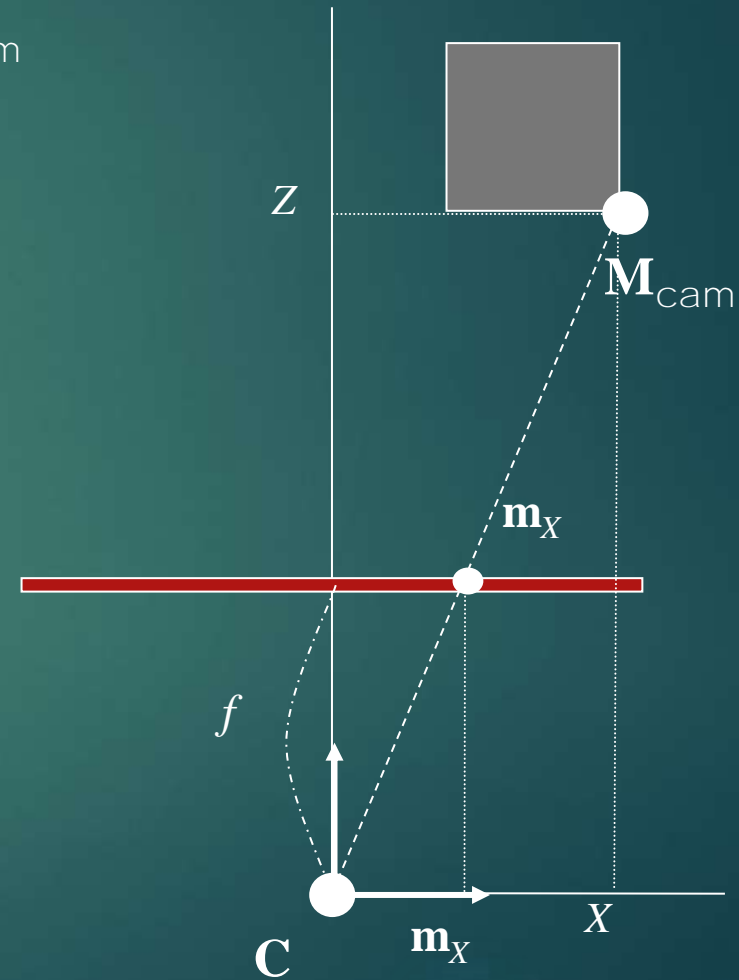


Projection dans le plan image



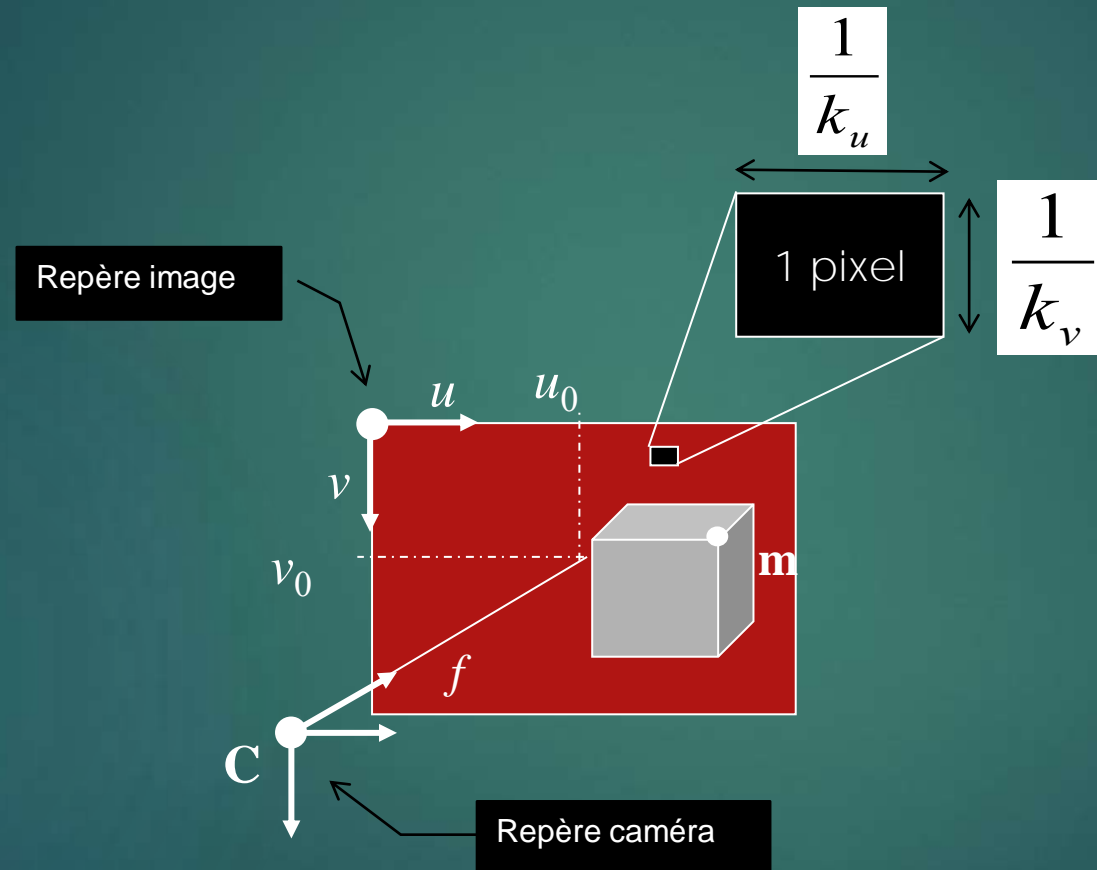
Calcul des coordonnées de m dans le plan image à partir des coordonnées de M_{cam} , exprimées dans le repère caméra (Thalès) :

$$\frac{m_x}{f} = \frac{X}{Z} \rightarrow m_x = f \frac{X}{Z}$$



Passage aux coordonnées pixels

10



$$\mathbf{m}_u = u_0 + k_u \mathbf{m}_X, \quad \mathbf{m}_v = v_0 + k_v \mathbf{m}_Y$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{m}_X = f \frac{X}{Z}, \quad \mathbf{m}_Y = f \frac{Y}{Z} \\ \mathbf{m}_u = u_0 + k_u \mathbf{m}_X, \quad \mathbf{m}_v = v_0 + k_v \mathbf{m}_Y \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}_u = u_0 + k_u f \frac{X}{Z} \\ \mathbf{m}_v = v_0 + k_v f \frac{Y}{Z} \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle

$$\boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ définit } \mathbf{m} \text{ en coordonnées homogènes} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}_u = \frac{u}{w} = u_0 + k_u f \frac{X}{Z} \\ \mathbf{m}_v = \frac{v}{w} = v_0 + k_v f \frac{Y}{Z} \end{array} \right.$$

La matrice de calibration interne

12

La matrice
$$\begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée “matrice de calibration interne” ou “matrice de calibration intrinsèque” ou “matrice de calibration” ou “matrice des paramètres intrinsèques”

Elle est généralement notée \mathbf{K} et paramétrée par quatre valeurs α_u , α_v , u_0 , v_0 :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

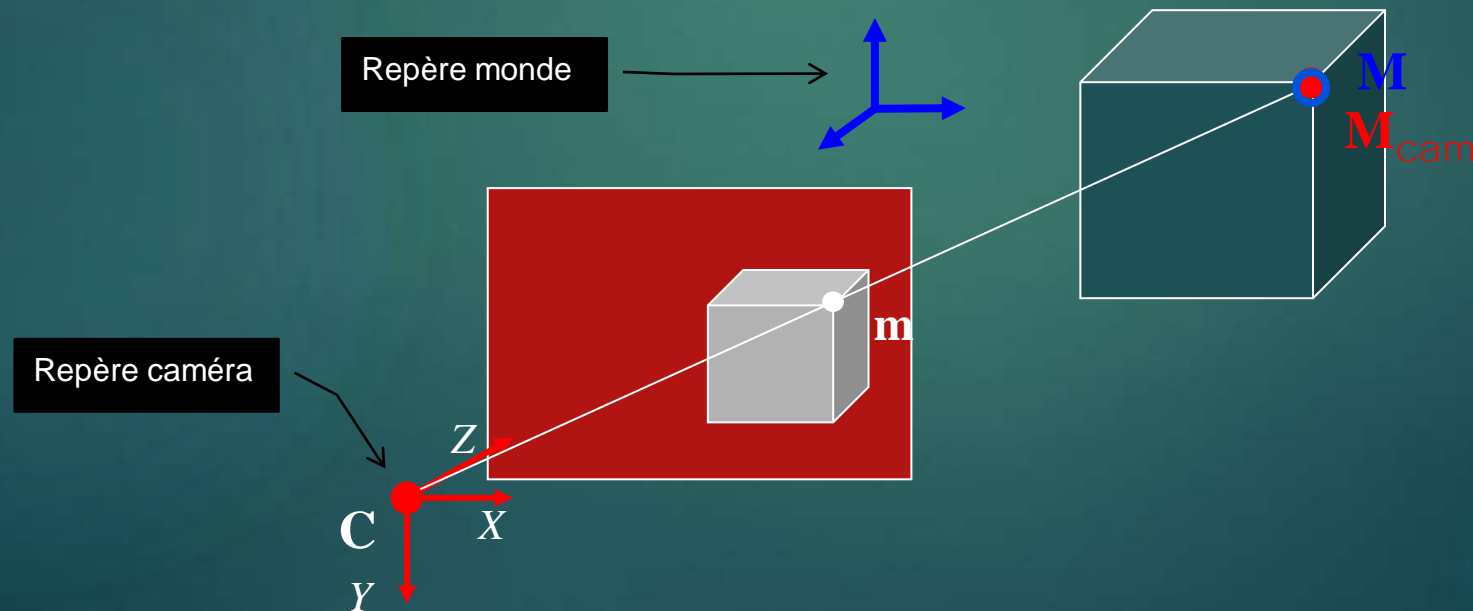
Le nombre de paramètres peut être réduit sous certaines hypothèses :

- (u_0, v_0) est parfois pris au centre de l'image
- $\alpha_u = \alpha_v$ suppose que les pixels sont carrés

Passage du repère monde au repère caméra

13

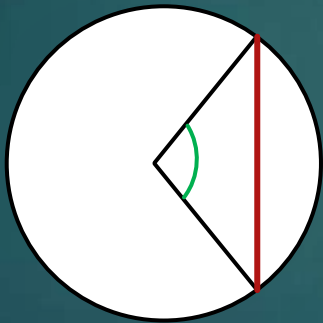
- ▶ La projection dans le plan image considère des coordonnées 3D exprimées dans le repère caméra
- ▶ Les coordonnées des points de la scène sont exprimées dans un repère arbitraire, appelé « repère monde »



Rappels sur la trigonométrie et le produit scalaire

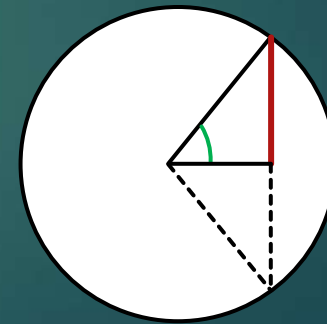
- ▶ Du grec "*trigone*" (triangle) et "*metron*" (mesure)

Hipparque de Nicée (-190 ;
-120) : premières tables
trigonométriques

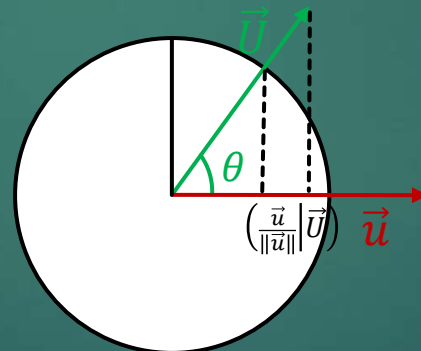
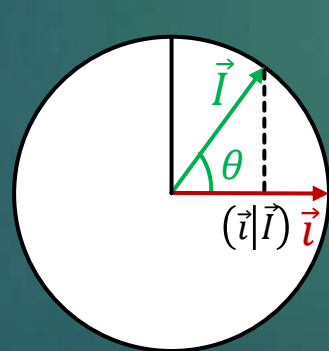
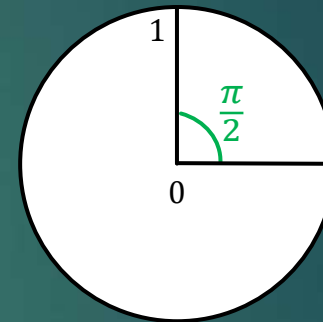
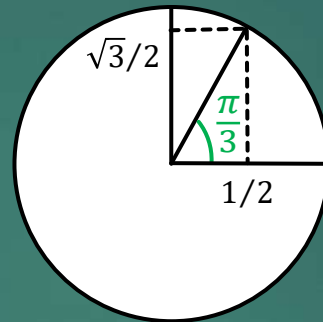
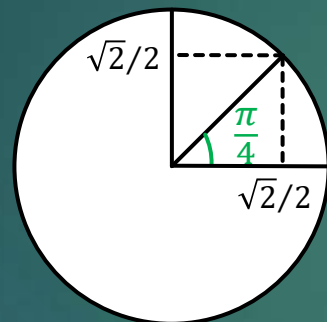
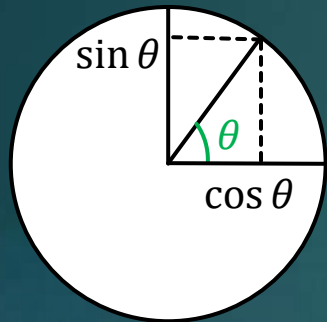


La règle de Ptolémée
(90 ; 168)

Aryabhata l'Ancien (476 ; 550)
utilise la demi corde :
premières tables de sinus



Rappels sur la trigonométrie et le produit scalaire

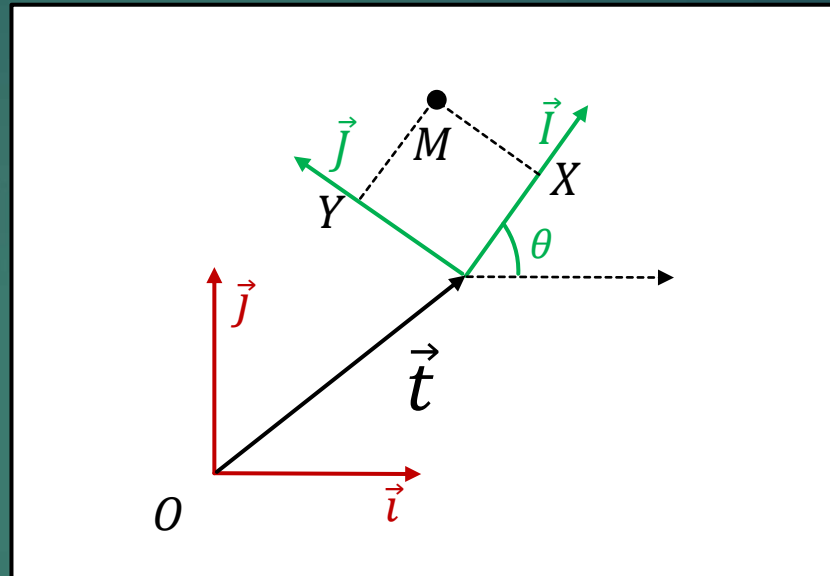
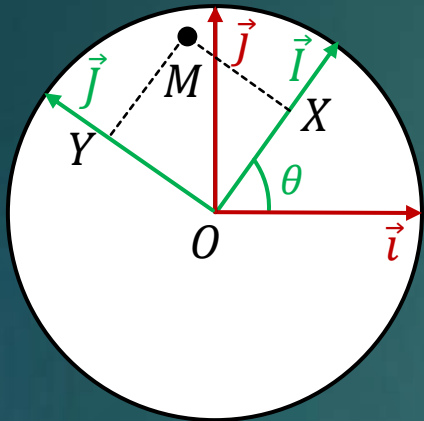


$$(\vec{i} | \vec{I}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) = \cos \theta$$

$$\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \middle| \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} \right) = \cos \theta$$

$$\Rightarrow (\vec{u} | \vec{U}) = \|\vec{u}\| \|\vec{U}\| \cos \theta$$

Rappels sur les changements de repère



Si (X, Y) sont les coordonnées du point M dans le repère (\vec{I}, \vec{J}) , que valent ses coordonnées dans le repère (\vec{i}, \vec{j}) ?

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= X\vec{I} + Y\vec{J} \\ &= X \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Même question si le repère (\vec{I}, \vec{J}) est, de plus, translaté d'un vecteur \vec{t}

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \vec{t} + X\vec{I} + Y\vec{J} \\ &= \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{R}_\theta \quad \mathbf{T}) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Transformation inverse :

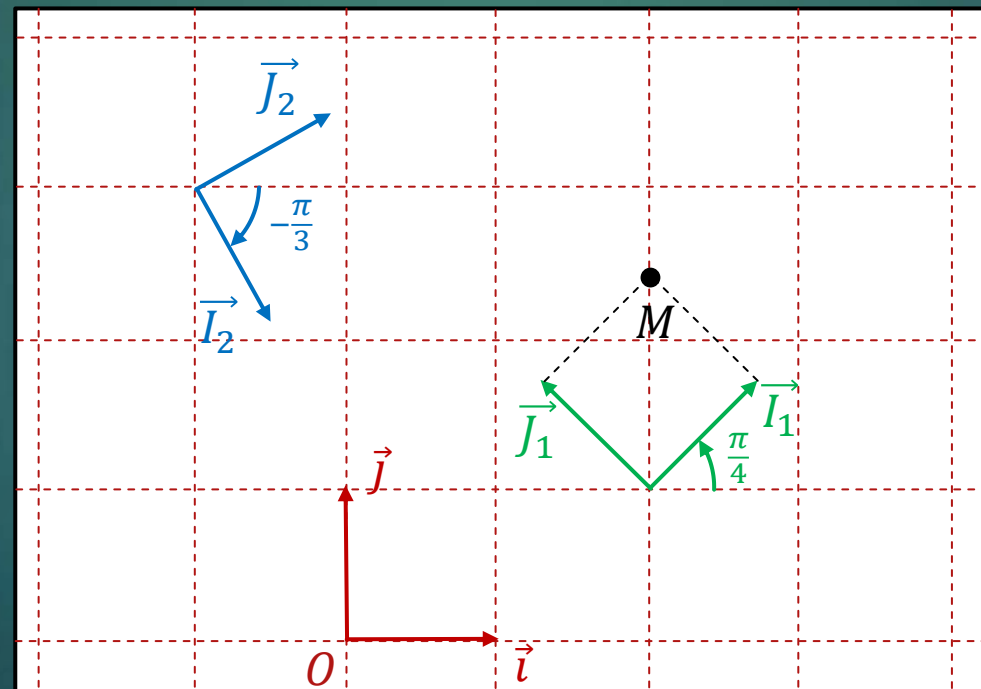
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OM} = \mathbf{T} + \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= (\mathbf{R}_\theta^{-1} \quad -\mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{T}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

« Coordonnées homogènes »

Rappels sur les changements de repère

17

- ▶ Exemple : Quelle sont les coordonnées du point M dans le repère (\vec{I}_2, \vec{J}_2) ?



Passage du repère monde au repère caméra

Il s'agit d'un changement de repère correspondant à une transformation rigide de \mathcal{R}^3 (rotation + translation) :

$$\mathbf{M}_{\text{cam}} = \mathbf{R}\mathbf{M} + \mathbf{T}$$

où :

\mathbf{R} est une matrice de rotation de taille 3x3 et

\mathbf{T} est un vecteur de taille 3

$$\mathbf{M}_{\text{cam}} = \mathbf{R}\mathbf{M} + \mathbf{T} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{\text{cam}} \\ Y_{\text{cam}} \\ Z_{\text{cam}} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{T} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{\text{cam}} \\ Y_{\text{cam}} \\ Z_{\text{cam}} \end{pmatrix} = (\mathbf{R} | \mathbf{T}) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{M}_{\text{cam}} = (\mathbf{R} | \mathbf{T}) \tilde{\mathbf{M}}$$

$\tilde{\mathbf{M}}$ (représente le point M en coordonnées homogènes)

$(\mathbf{R} | \mathbf{T})$ est une matrice 3x4

La matrice de calibration externe

La matrice

$$(\mathbf{R} | \mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}$$

est appelée “matrice de calibration externe” ou “matrice de calibration extrinsèque” ou “matrice des paramètres extrinsèques”

Elle peut être paramétrée par 6 valeurs : 3 pour la rotation (angles d'Euler, ...), 3 pour la translation

La matrice de projection

En composant la projection et le changement de repère on obtient :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_u f & 0 & u_0 \\ 0 & k_v f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

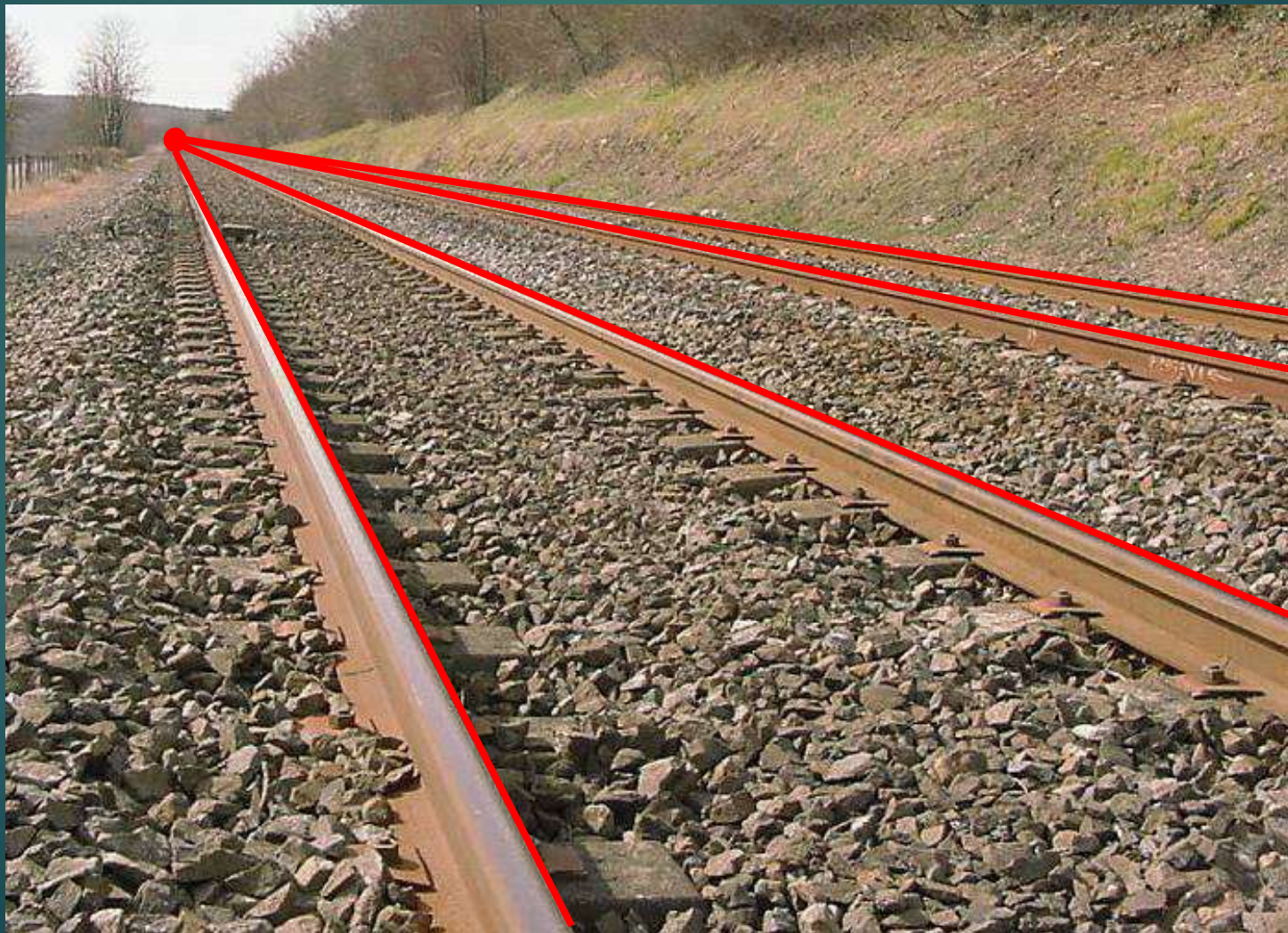
$\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{R} | \mathbf{T})$ est appelée matrice de projection

2. Géométrie de la RA

2.2 GÉOMÉTRIE DES POINTS DE FUITE

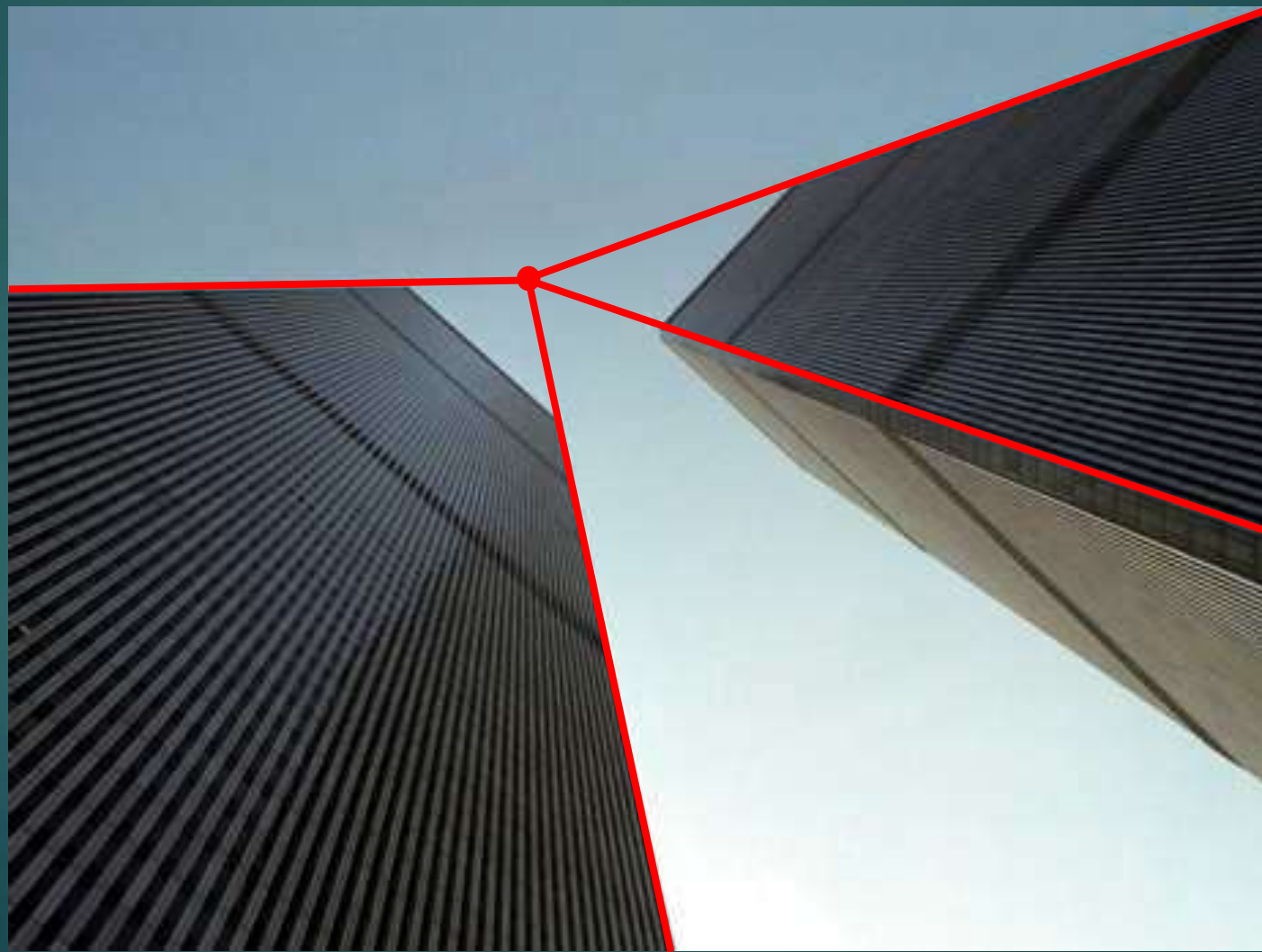
Point de fuite

22



Point de fuite

23



Projection de droites parallèles

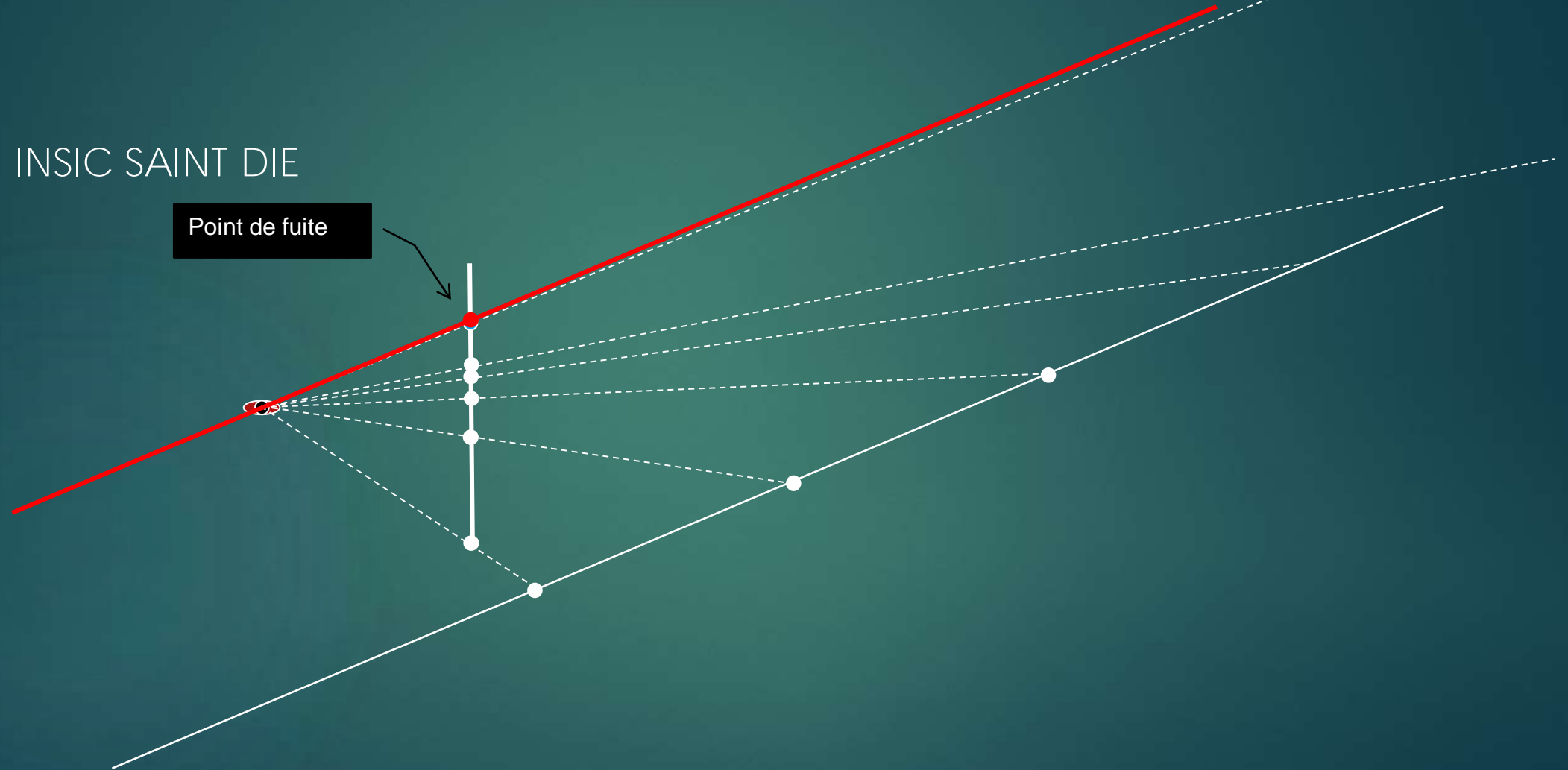
24



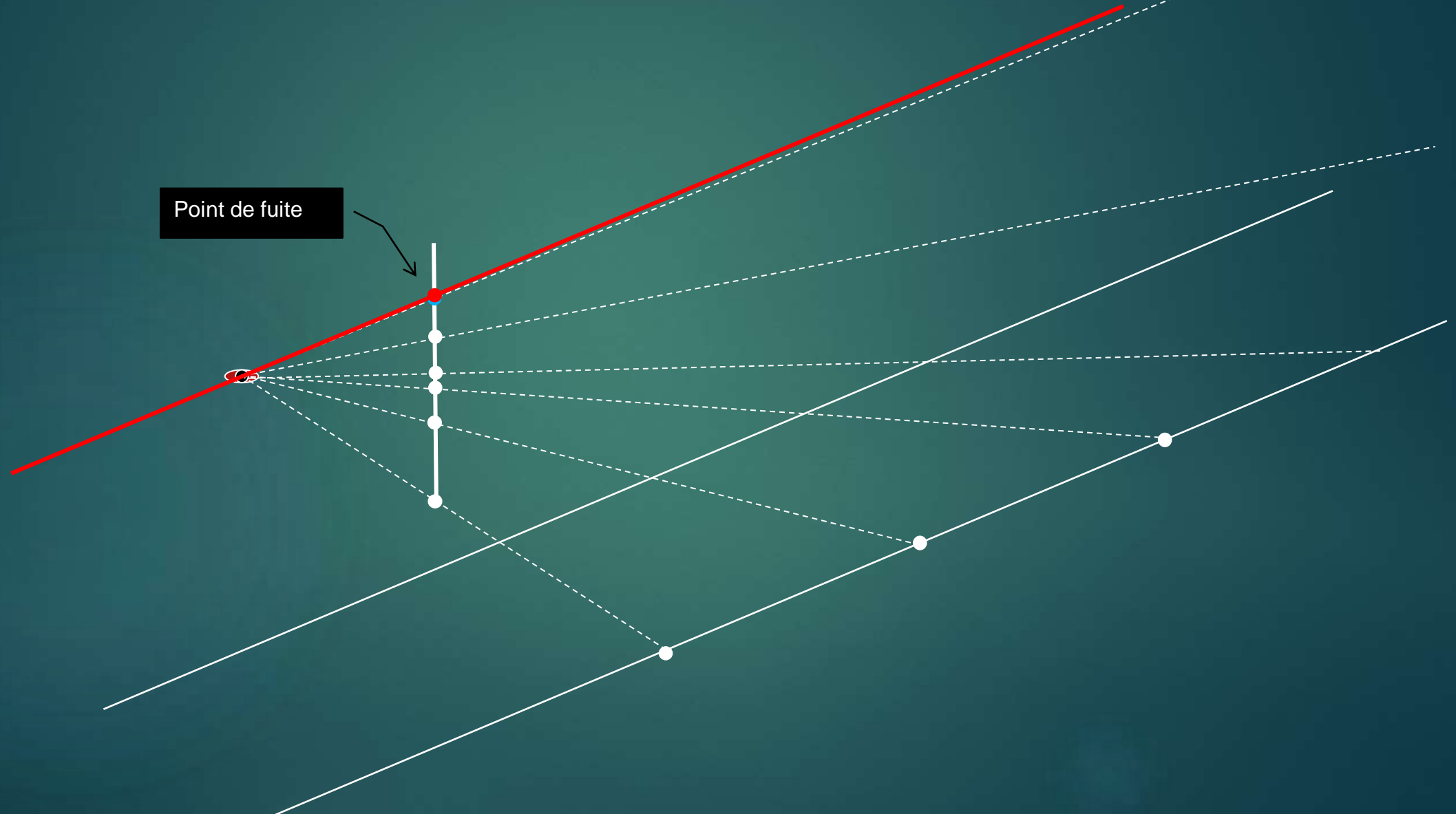
Obtient-on un point de convergence ?
Si oui, comment le construire
géométriquement ?

Projection de droites parallèles

► INSIC SAINT DIE

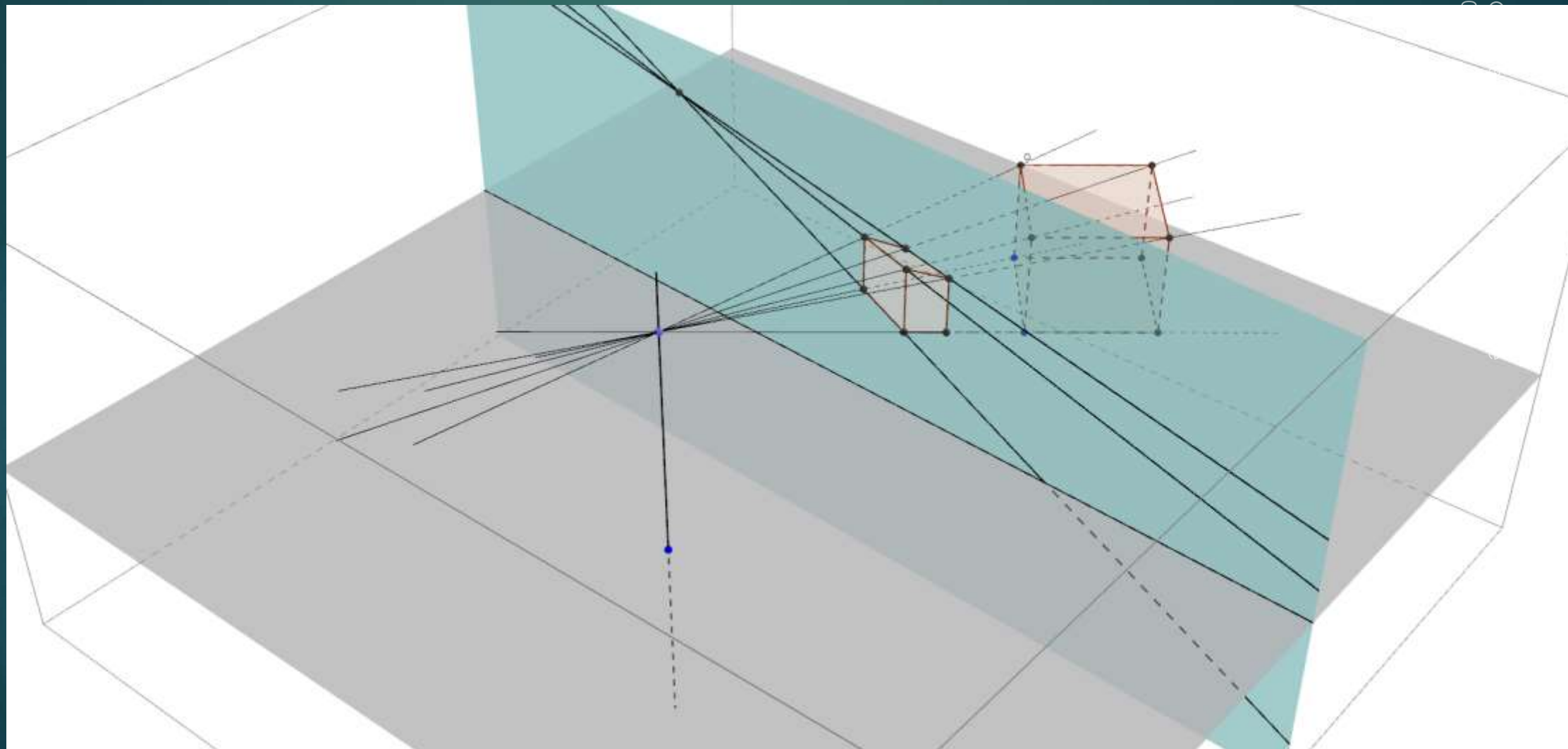


Projection de droites parallèles



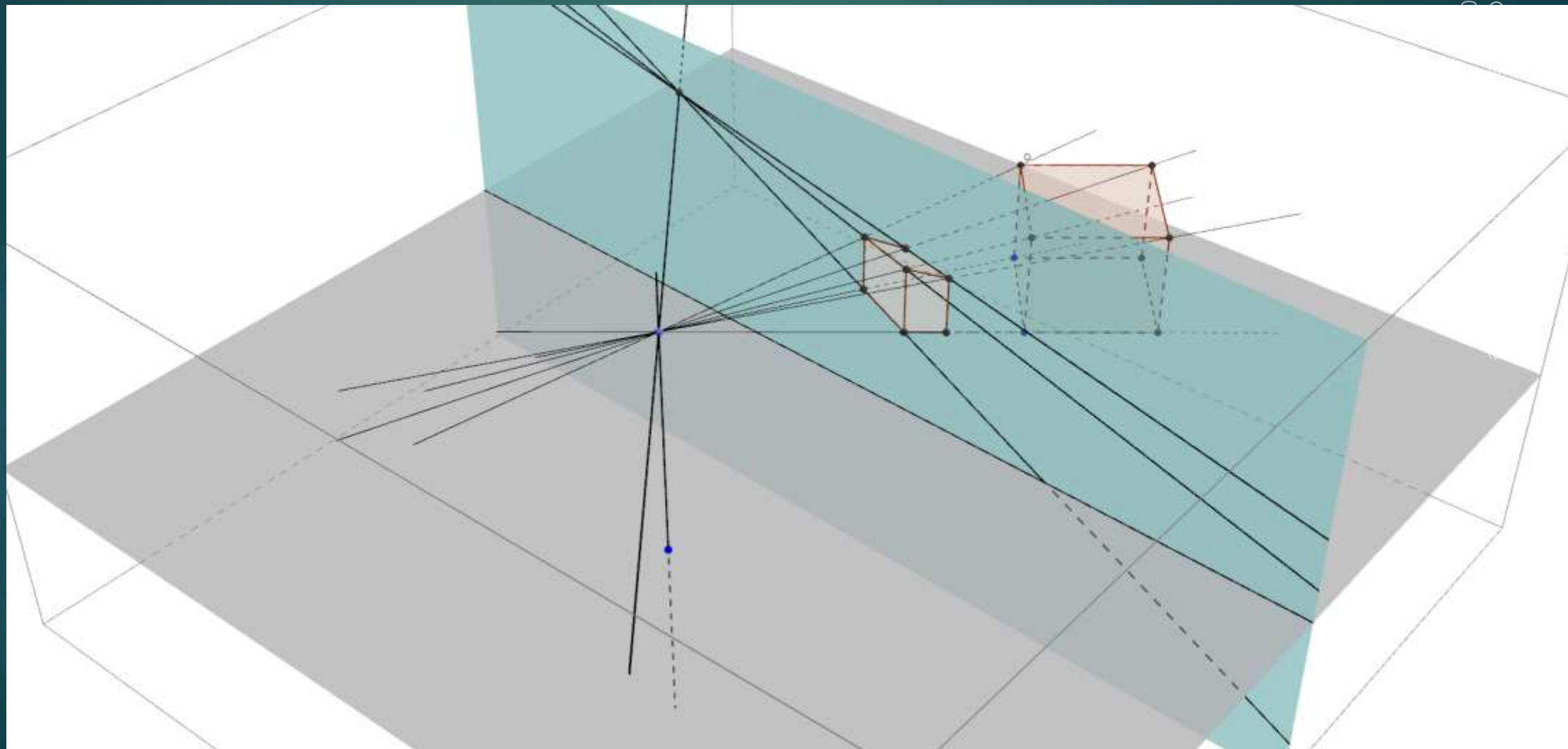
Propriété des points de fuite

27



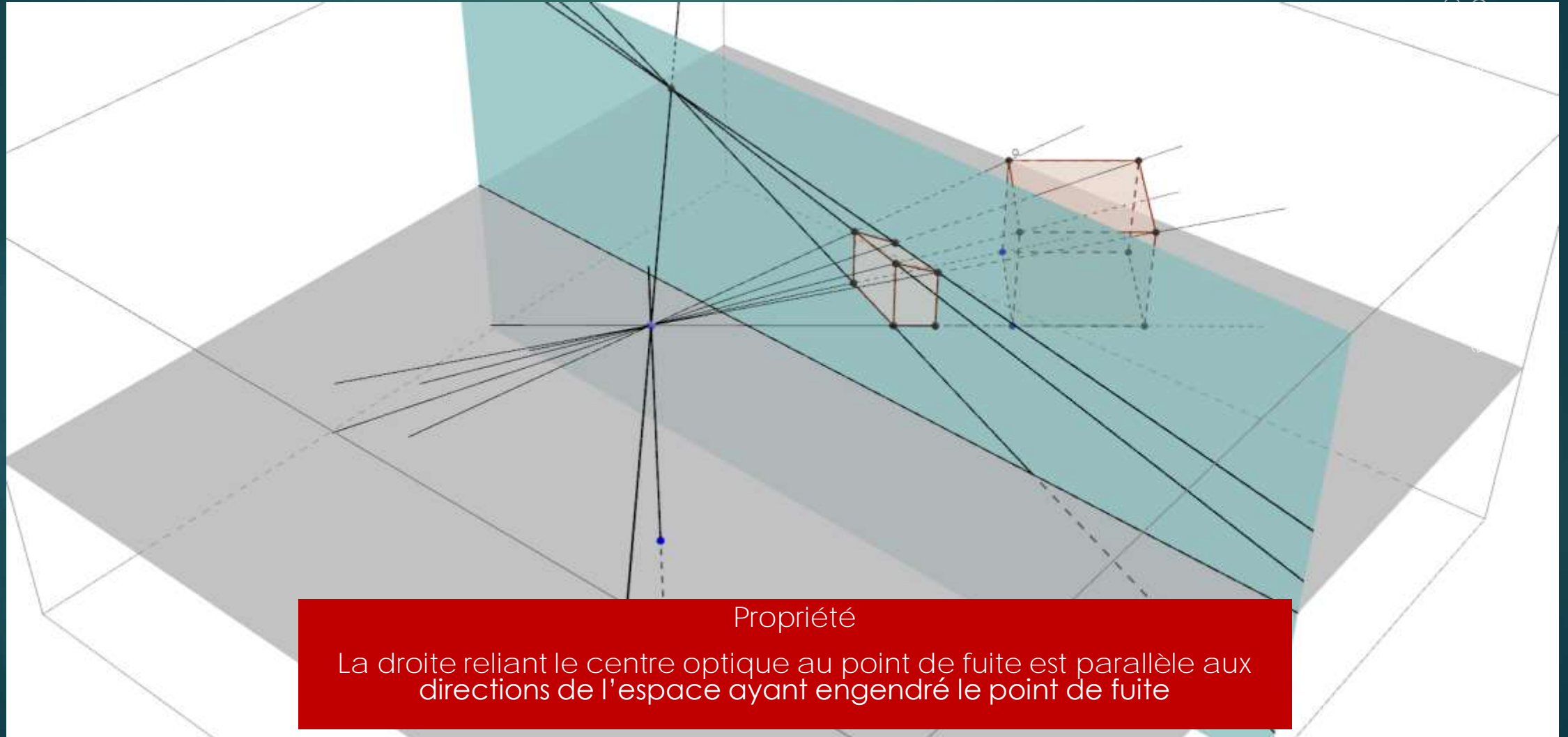
Propriété des points de fuite

28



Propriété des points de fuite

29

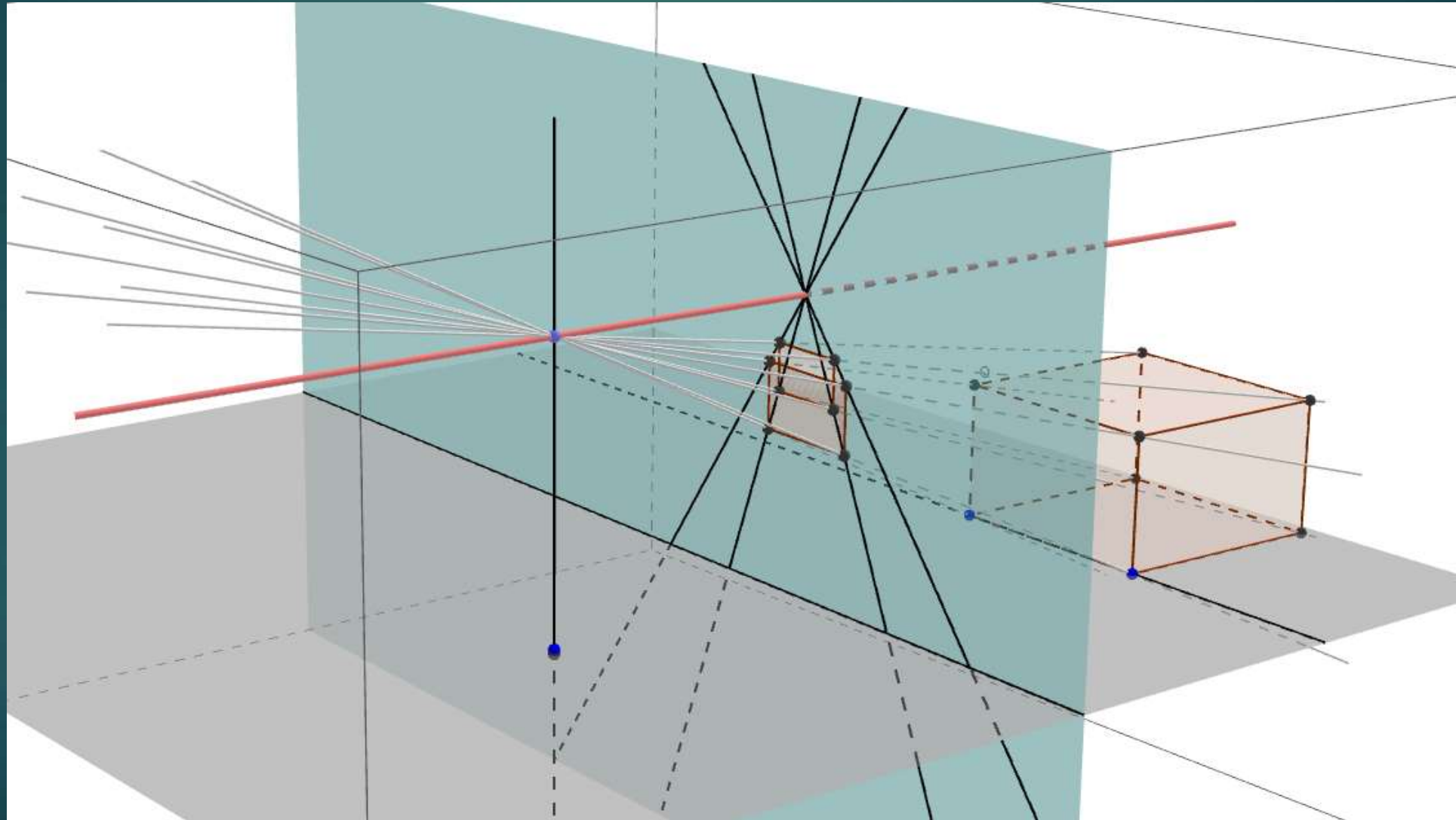


Propriété

La droite reliant le centre optique au point de fuite est parallèle aux directions de l'espace ayant engendré le point de fuite

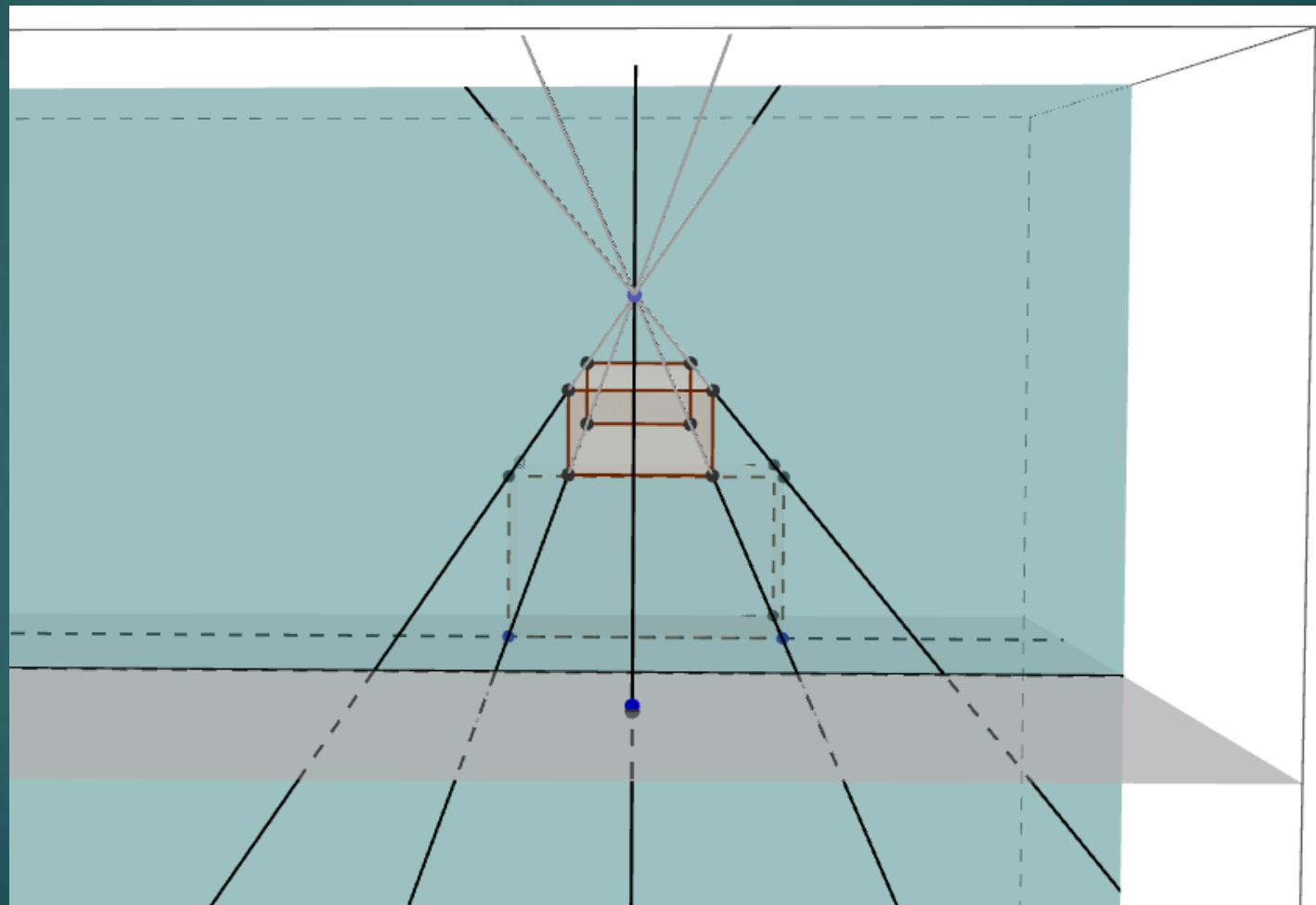
Propriété des points de fuite

30



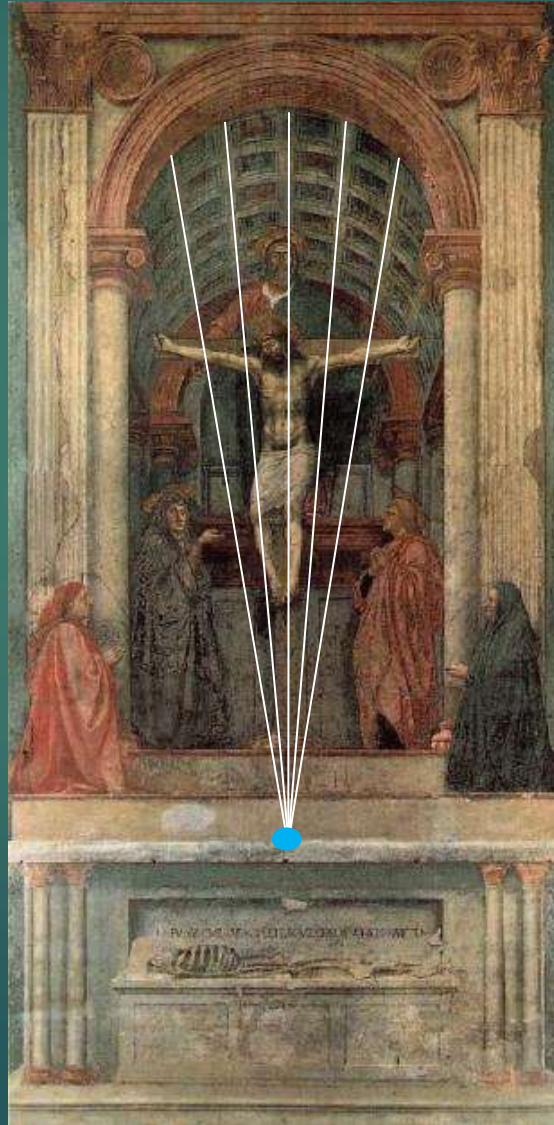
Propriété des points de fuite

31



Propriété des points de fuite

32



Masaccio, La Trinité, 1427

Propriété des points de fuite

33



Est-ce un hasard ?
Que peut-on en déduire ?

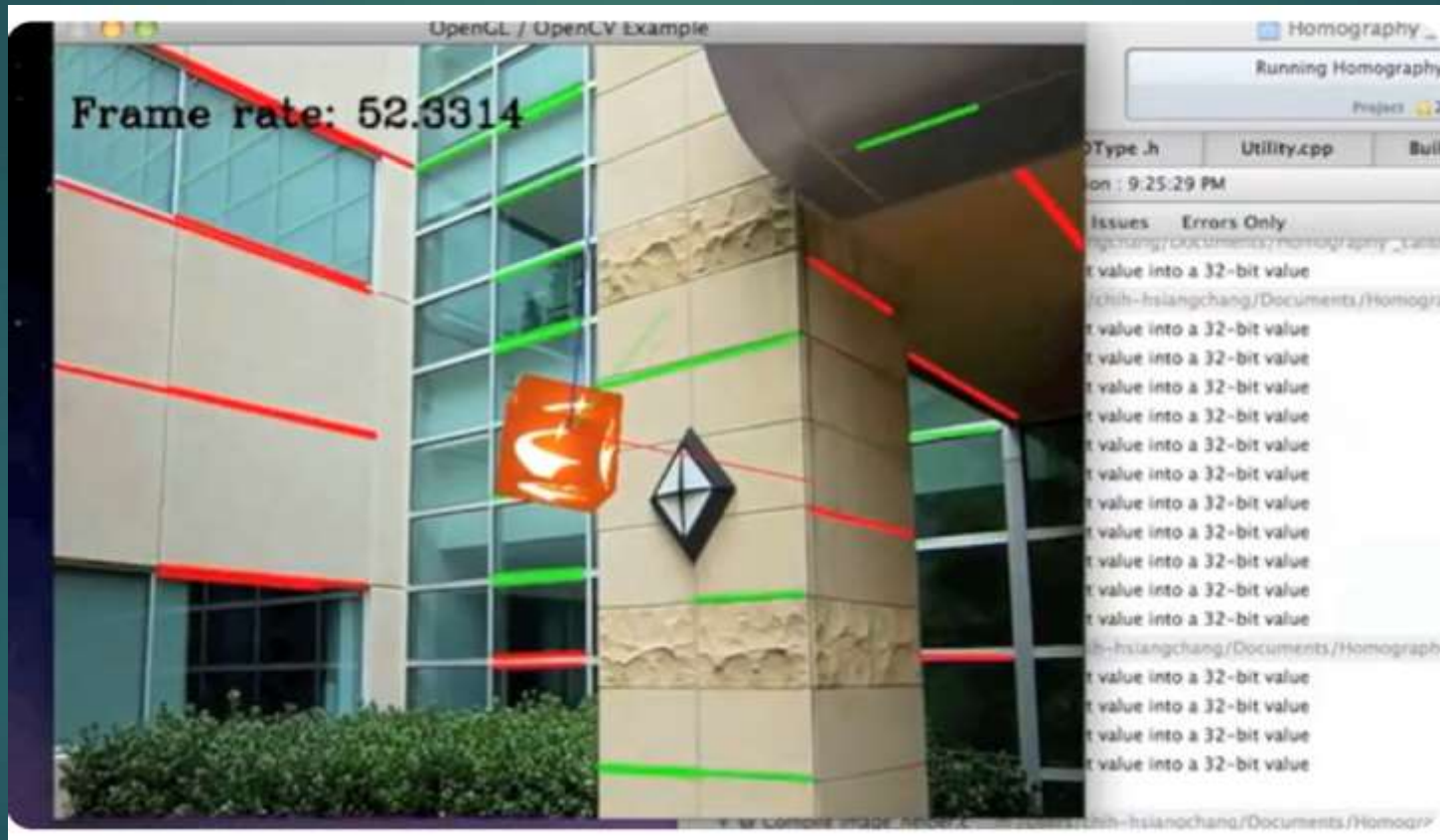
2. Géométrie de la RA

2.3 DÉTECTION AUTOMATIQUE DE POINTS DE FUITE

Détection automatique des points de fuite

- ▶ Les méthodes classiques utilisent des détecteurs automatiques de segments de droite qu'elles tentent de regrouper par points de convergence
- ▶ De nouvelles approches basées sur le deep learning infèrent directement les points de fuite à l'aide d'un CNN

Exemple de regroupement avec J-Linkage [Toldo et al. 2008]

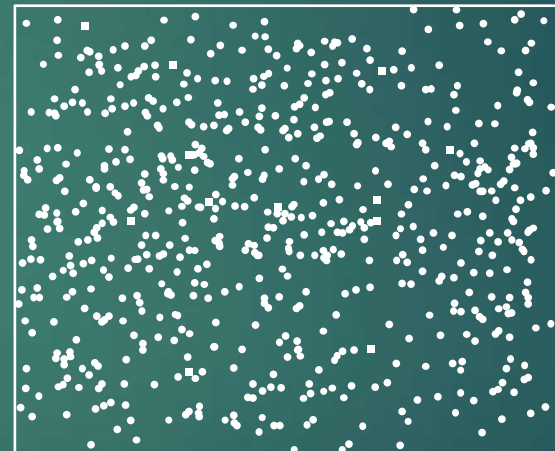


Approche probabiliste (*a contrario*)

37

Principe de Helmholtz

« Nous percevons immédiatement ce qui ne peut pas être dû au hasard »



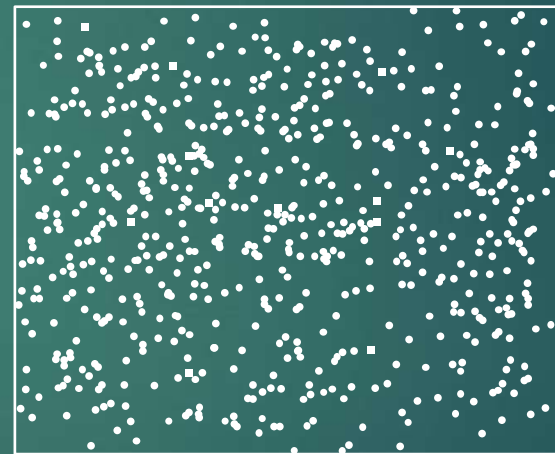
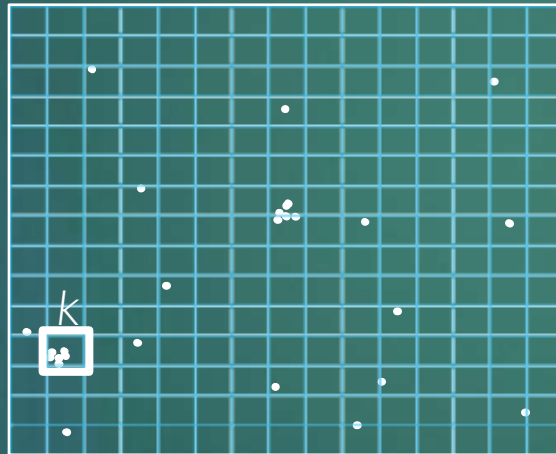
Approche probabiliste (*a contrario*)

38

Principe de Helmholtz

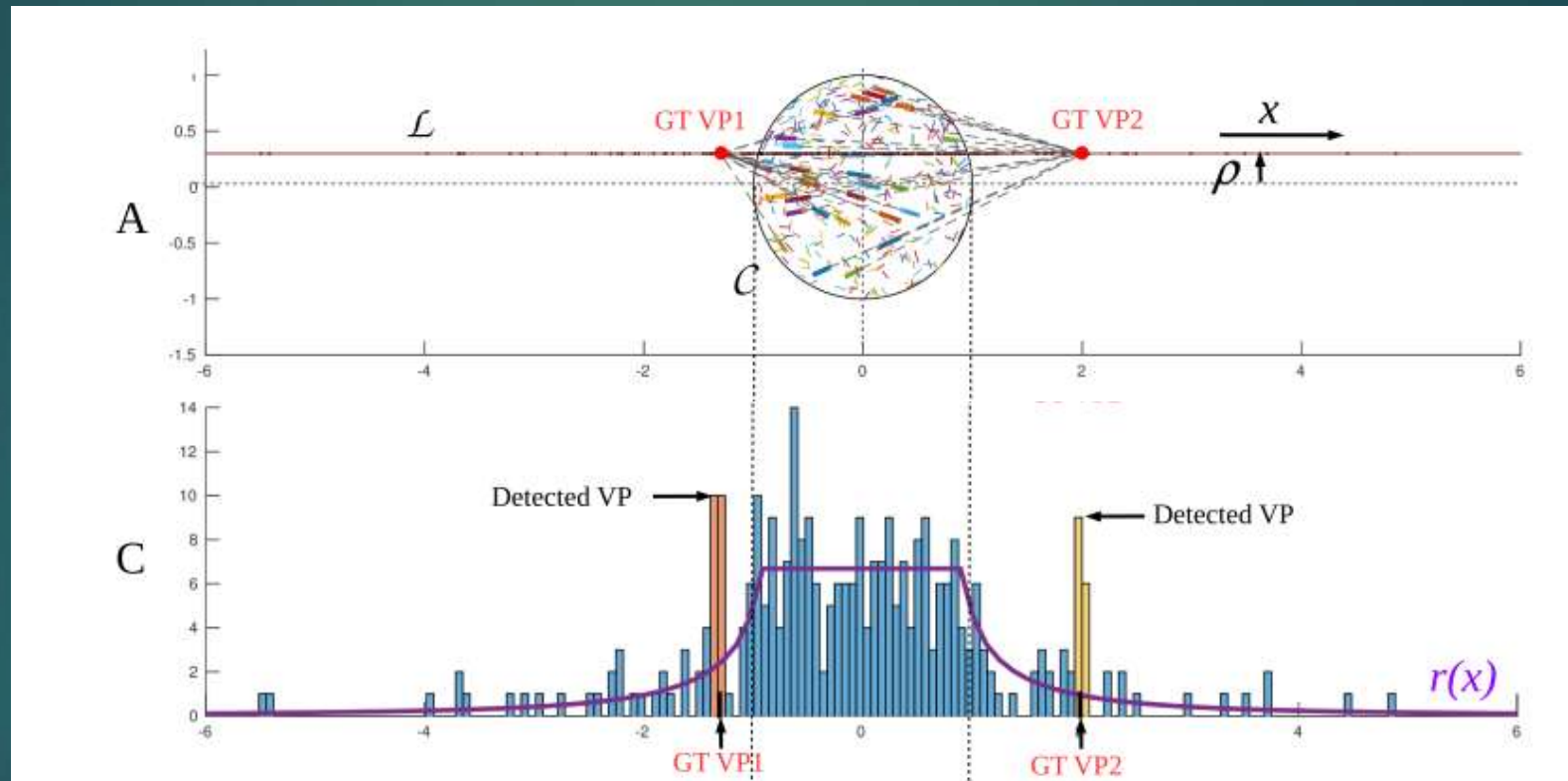
« Nous percevons immédiatement ce qui ne peut pas être dû au hasard »

$NFA < 1$



k : nombre de points dans la case
 NFA : nombre attendu de fois qu'au moins k points se rencontrent *par hasard* dans une case de la grille

Approche probabiliste (*a contrario*)



G. Simon, A. Fond and M.-O. Berger, «A-Contrario Horizon-First Vanishing Point Detection Using Second-Order Grouping Laws », ECCV 2018, Germany, p. 323-338

Approche probabiliste (*a contrario*)

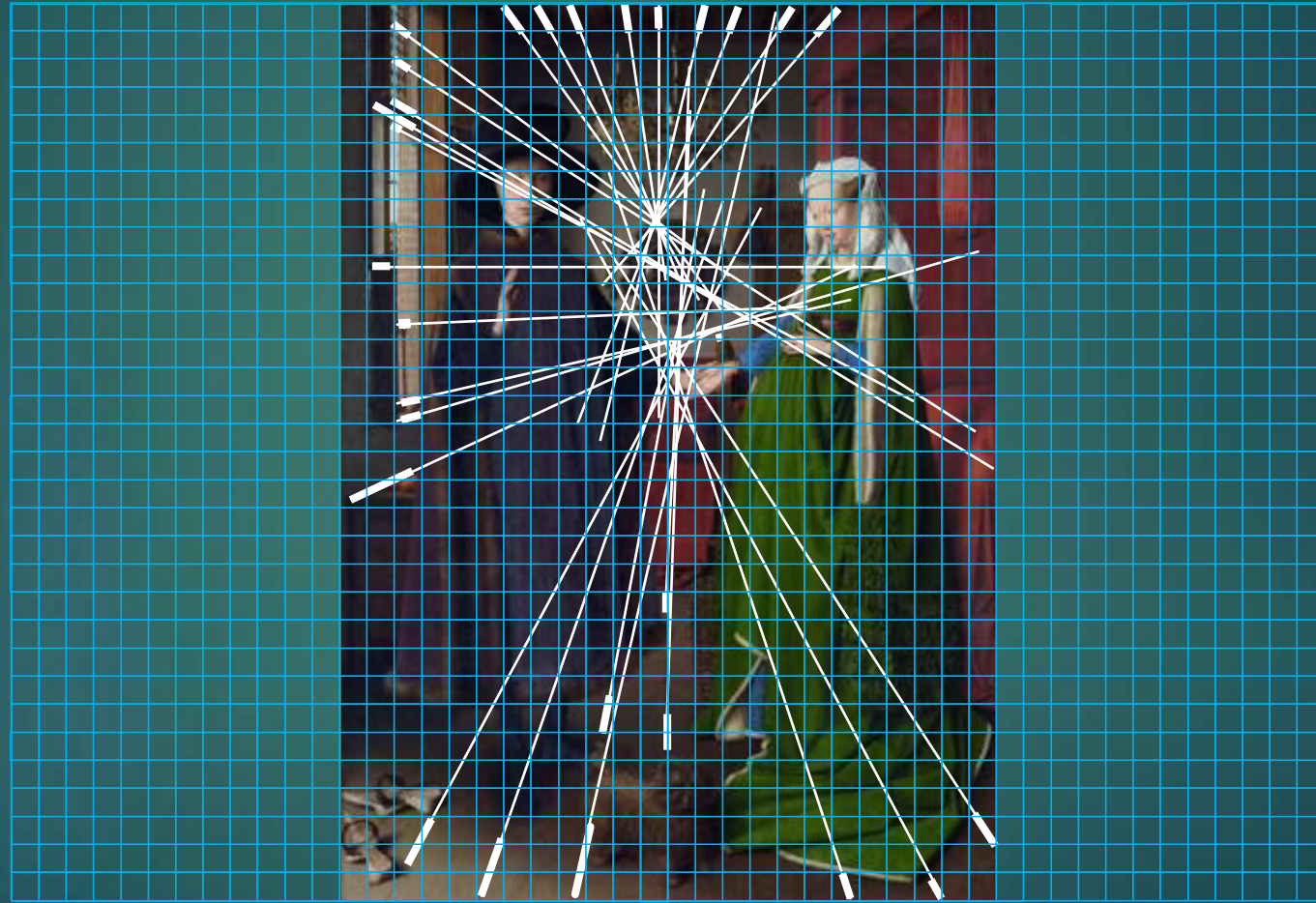
40



G. Simon, A. Fond and M.-O. Berger, «A-Contrario Horizon-First Vanishing Point Detection Using Second-Order Grouping Laws », ECCV 2018, Germany, p. 323-338

Application à l'analyse de peintures

41

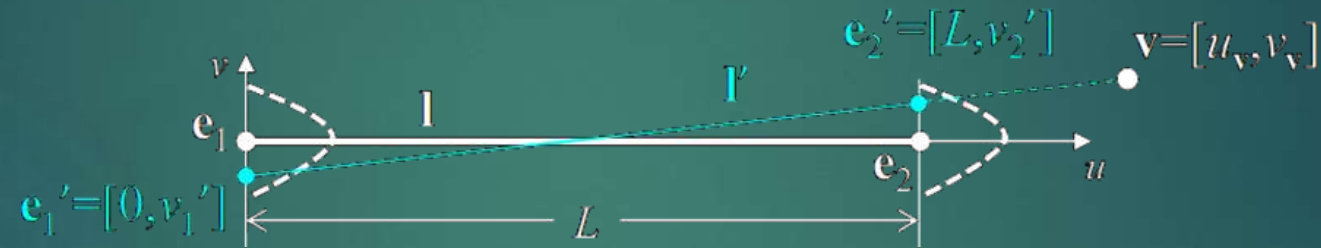


G. Simon, « Jan Van Eyck's Perspectival System Elucidated Through Computer Vision », SIGGRAPH 2021

Application à l'analyse de peintures

42

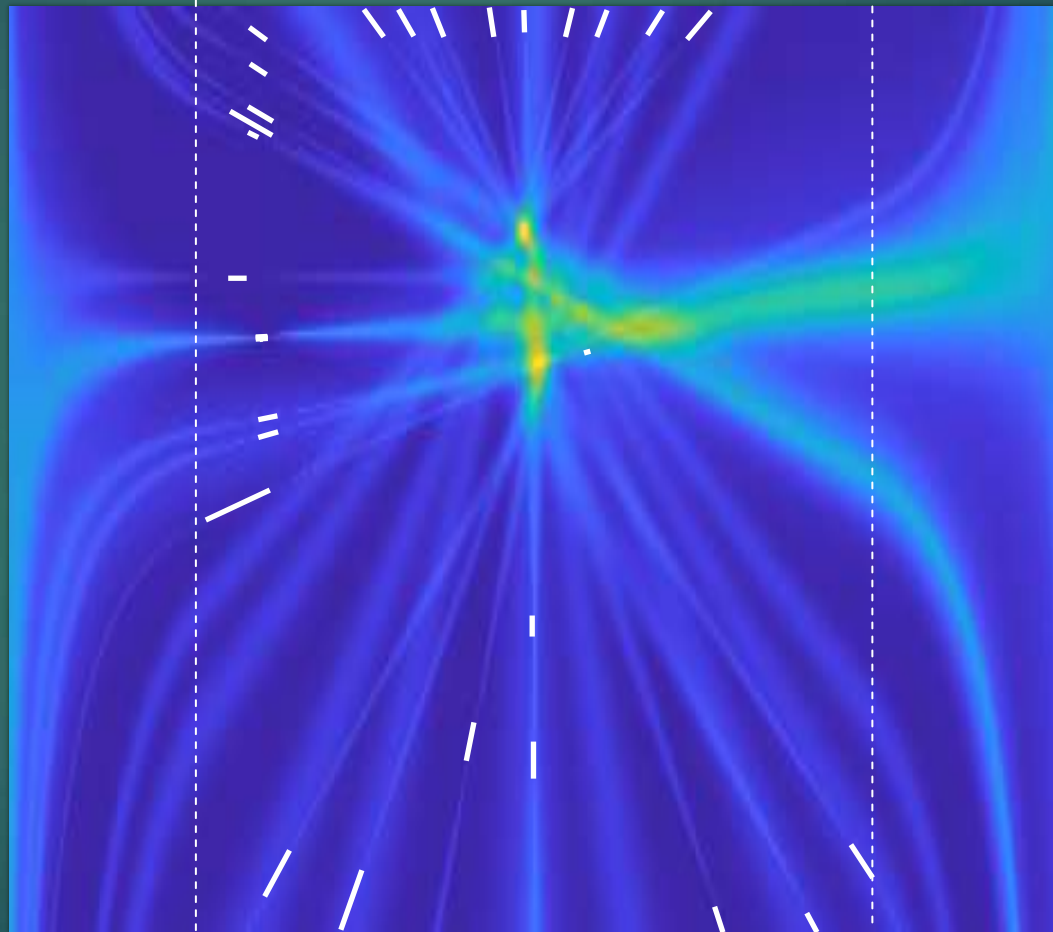
- Intégration du critère de consistance probabiliste de [Xu et al. 2013]



$$\begin{aligned} c(\mathbf{l}, \mathbf{v}) &= p(\mathbb{L}') = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_1'(t); 0, \sigma^2) f(v_2'(t); 0, \sigma^2) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v_v^2 L^2}{2\sigma^2(u_v^2 + (u_v - L)^2)}} \end{aligned}$$

Application à l'analyse de peintures

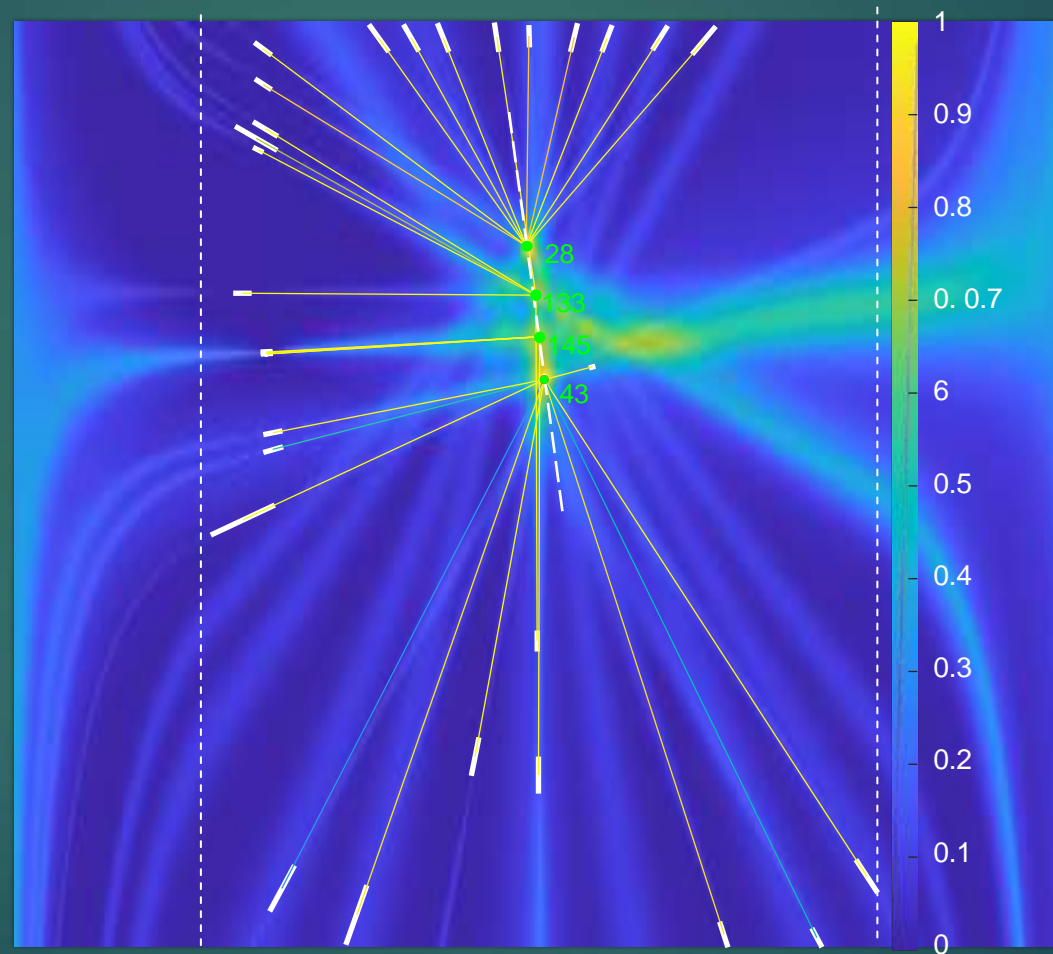
43



G. Simon, « Jan Van Eyck's Perspectival System Elucidated Through Computer Vision », SIGGRAPH 2021

Application à l'analyse de peintures

44



G. Simon, « Jan Van Eyck's Perspectival System Elucidated Through Computer Vision », SIGGRAPH 2021

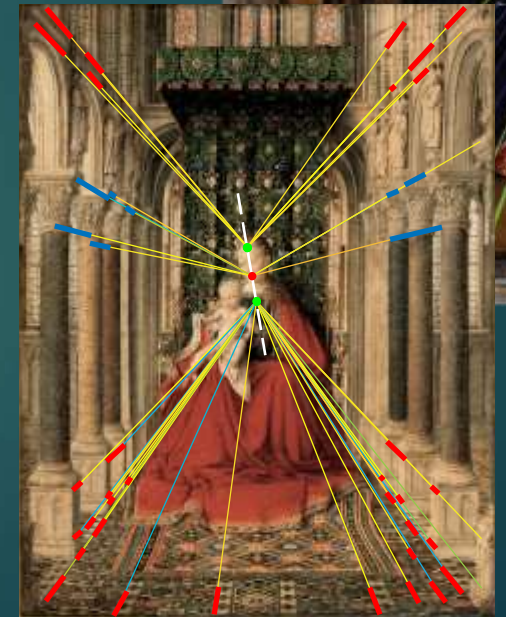
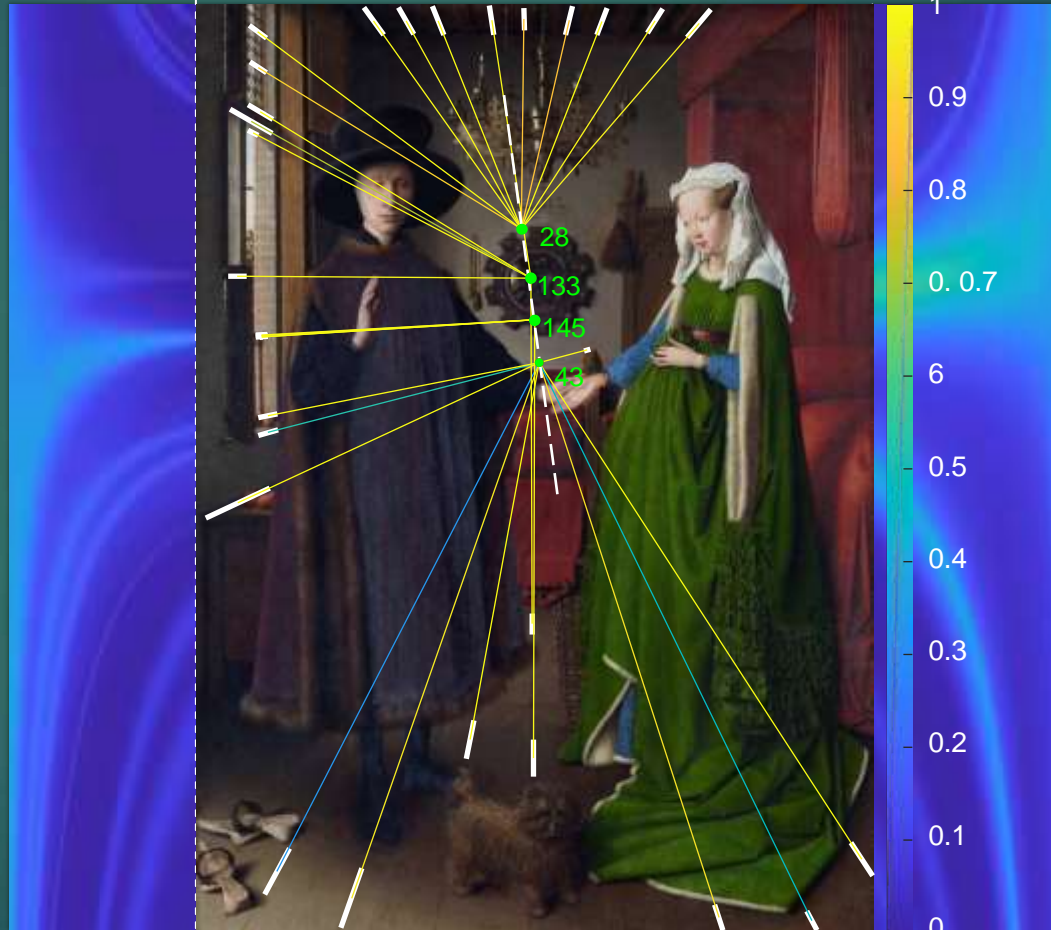
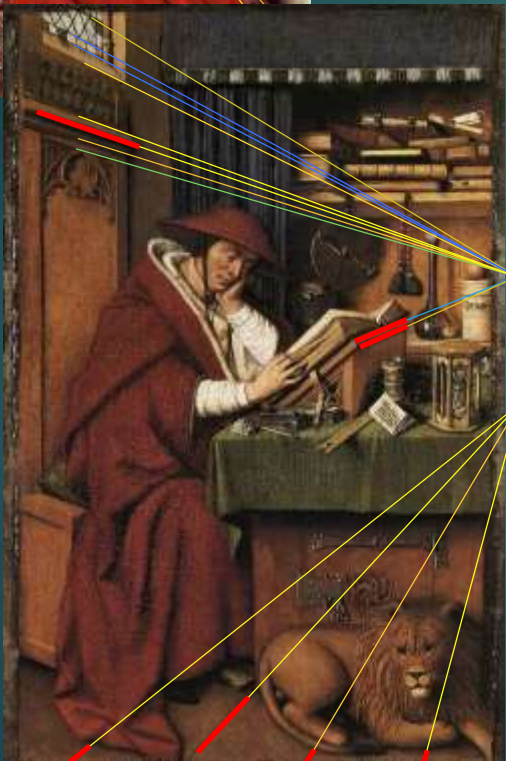
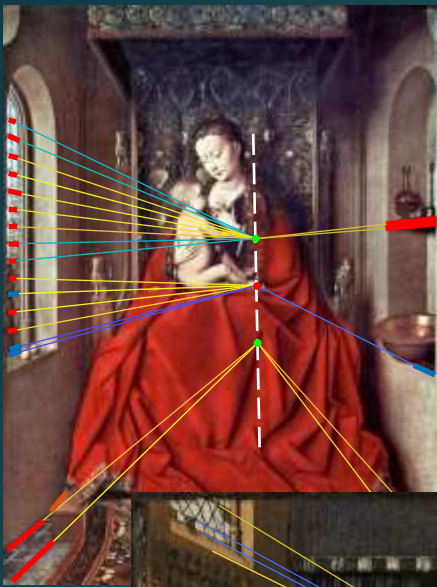
Application à l'analyse de peintures

45



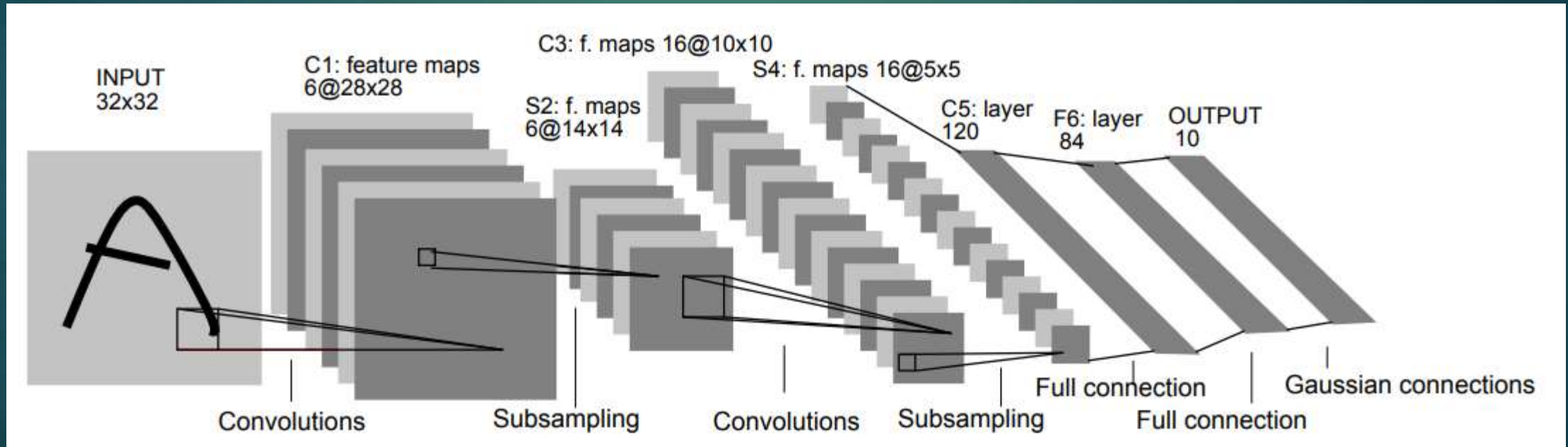
G. Simon, « Jan Van Eyck's Perspectival System Elucidated Through Computer Vision », SIGGRAPH 2021

Application à l'analyse de peintures



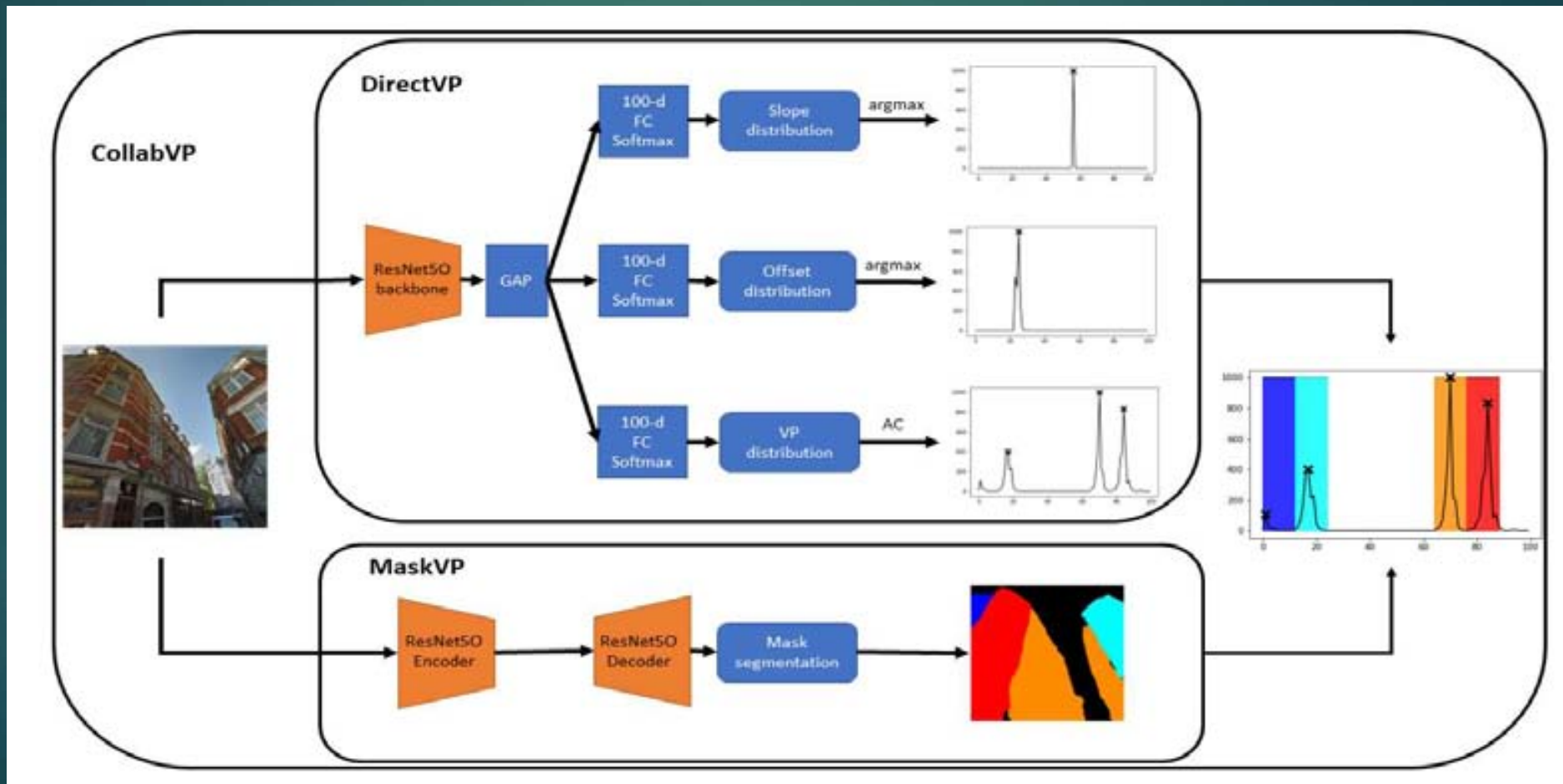
Rappels sur les réseaux de neurones convolutifs (CNN)

- ▶ *Gradient-based learning applied to document recognition*, Yann LeCun, Léon Bottou, Yoshua Bengio et Patrick Haffner Proceedings of the IEEE, vol. 86, no 11, 1998



Exemple de détection de points de fuite à l'aide d'un CNN [Elassam et al. 2023]

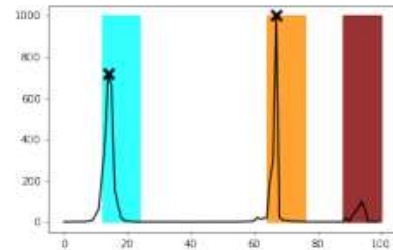
48



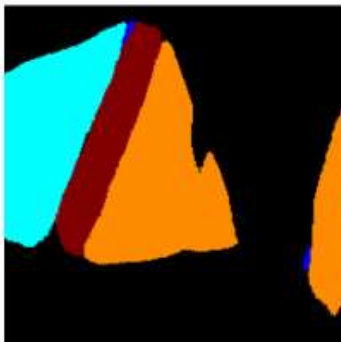
Exemple de détection de points de fuite à l'aide d'un CNN [Elassam et al. 2023]



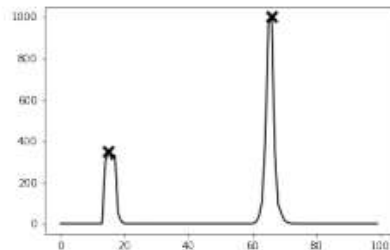
(a) Input image with detected VPs.



(b) Output of CollabVP.



(c) Output of MaskVP.

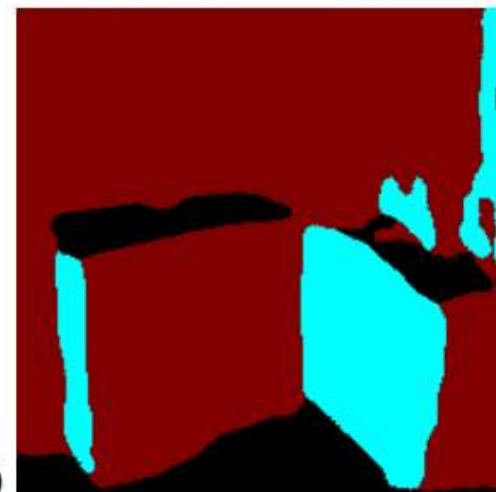


(d) Output of DirectVP (TA).

+



(a)



(b)