

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Maria Boritchev

17 Avril 2018

Le sujet comprend 3 pages d'énoncés et 2 pages d'annexes. L'examen dure 2 heures. L'usage d'une feuille d'aide A4 recto-verso est autorisé. Tout autre document est interdit. Un barème indicatif vous est donné, il est susceptible de changer à la correction.

1 Logique propositionnelle – 6 pts

Soient p, q, r des variables propositionnelles.

1. (a) Prouver l'équivalence suivante.

$$(p \rightarrow q) \wedge r \equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

- (b) Mettre la formule suivante sous forme normale conjonctive.

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$$

- (c) La formule précédente est-elle valide ? Justifier.

2. Soient les bases de règles et de faits suivantes :

Base de règles :

R1 : si Claude et Dominique viennent, alors Fred vient

R2 : si Fred et Benjamin viennent alors Émilie vient

R3 : si Gaëlle et Fred viennent alors Benjamin vient

R4 : si Alice et Fred viennent alors Gaëlle vient

Base de faits = {Alice, Claude, Dominique}

- (a) Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?
- (b) Montrer que Émilie vient en suivant l'algorithme de chaînage avant.
- (c) Gaëlle fait-elle partie de la base de faits saturée en suivant l'algorithme de chaînage avant ?

2 Logique du premier ordre – 6 pts

Soit les formules du calcul des prédicats suivantes :

$$F = \exists x p(x, f(y)) \vee \neg \forall z q(z, g(a, t, h(t)))$$
$$G = r(x) \vee ((\exists y \forall y p(f(y), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z q(v, g(z, w, z)))$$

Pour chacune d'elles :

1. Donner une représentation de la formule sous forme d'arbre. Attention : la formule $\exists x p(x)$ est représentée de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} \exists x \\ | \\ p \\ | \\ x \end{array}$$

2. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
3. Donner tous les prédicats et toutes les fonctions, avec leurs arités, qui apparaissent dans la formule.

Soient $s = f(g(v), h(u, v))$ et $t = f(g(w), h(w, j(x, w)))$ deux termes, avec u, v, w, x des variables du langage prédicatif.

4. Appliquer l'algorithme d'unification à $\mathcal{U} = \{s, t\}$. Dérouler l'algorithme de manière détaillée; en particulier, rédiger entièrement la justification pour les étapes *association* et *fusion*.
5. Écrire le résultat de s_σ et t_σ , où t_σ est l'application de la substitution σ (construite lors de l'exécution de l'algorithme) au terme t .
6. Conclure : s et t sont-ils unifiables ?

3 Dédution naturelle – 4pts

Soient p, q, r des variables propositionnelles. A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
2. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$

4 Résolution en logique des prédicats – 4pts

Soient les prédicats p, r d'arité 1, les prédicats q, s d'arité 2, les variables x, y et la constante c .
On définit les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x p(x) \rightarrow q(x, c)$$

$$\phi_2 = \forall x \exists y ((r(x) \vee \neg p(y)) \rightarrow s(x, y))$$

$$\phi_3 = \forall x p(x)$$

$$\phi = \forall x (r(x) \rightarrow \exists y (s(x, y) \wedge b(y, c)))$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \vdash \phi$.

Annexes

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \perp}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux (ex falso)* :

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'*implication (modus ponens)* :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \quad \Gamma, p \vdash r \quad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x F} \text{ si } x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x F \quad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G} \text{ si } x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma$$

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que ($F \notin BF$) ET ($\exists R \in BR$ applicable) **faire**

— Choisir une règle applicable R

— $BR = BR - R$

— $BF = BF \cup \text{conclusion}(R)$

conclusion de R ajoutée à la base de faits

désactivation de R
déclenchement de la règle R,

si $F \in BF$ **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier \mathcal{U} (récursivité!).

Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de \mathcal{U} .

décomposition Si $s = f(s_1, \dots, s_n)$ et $t = f(t_1, \dots, t_n)$, on supprime le couple de \mathcal{U} , et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :

— x n'est pas déjà modifié par σ ,

— x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ , on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg\forall x \phi$	$\exists x \neg\phi$
$\neg\exists x \phi$	$\forall x \neg\phi$
$\phi \vee \forall x \phi'$	$\forall x' (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x \phi'$	$\exists x' (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\forall x \phi \vee \phi'$	$\forall x' (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\exists x \phi \vee \phi'$	$\exists x' (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x \phi'$	$\forall x' (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x \phi'$	$\exists x' (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\forall x \phi \wedge \phi'$	$\forall x' (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\exists x \phi \wedge \phi'$	$\exists x' (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x \phi'$	$\forall x' (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x \phi'$	$\exists x' (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\forall x \phi \rightarrow \phi'$	$\exists x' (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$\exists x \phi \rightarrow \phi'$	$\forall x' (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \dots \vee L_m \quad p \vee M_1 \vee \dots \vee M_n}{L_1 \vee \dots \vee L_m \vee M_1 \vee \dots \vee M_n}$$

Résolution en logique des prédicats :

1. Contraposée de la conclusion.
2. Mise sous forme normale de la logique des prédicats.
3. Substitution et résolution.