FORMALISMES DE REPRÉSENTATION ET RAISONNEMENT

Maria Boritchev

16 janvier 2019

Université de Lorraine

Maria Boritchev `https://members.loria.fr/MBoritchev/`
maria.boritchev@univ-lorraine.fr

Et vous ? D'où venez vous ? Les maths et vous ?

Le cours 8 séances de 2h30, CM+TD

Arche / Page perso Supports de cours et informations

L'évaluation DM (exercice corrigé); examen final (Feuille A4 autorisée)

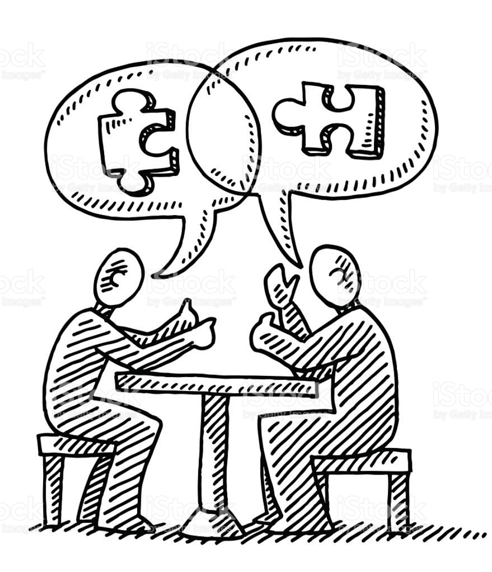
PLAN DU COURS

Généralités sur la logique

Logique propositionnelle

GÉNÉRALITÉS SUR LA LOGIQUE

MOTIVATIONS



Définition (Valeur de vérité)

$v(A) = 1$ si A est vraie ; $v(A) = 0$ si A est fausse.

Définition (Connecteurs)

Nom	Symbole	Valeur de vérité
négation	$\neg$	$v(\neg A) = 1$ ssi $v(A) = 0$
conjonction	$\wedge$	$v(A \wedge B) = 1$ ssi $v(A) = v(B) = 1$
disjonction	$\vee$	$v(A \vee B) = 0$ ssi $v(A) = v(B) = 0$
implication	$\rightarrow$	$v(A \rightarrow B) = 0$ ssi $v(A) = 1$ et $v(B) = 0$
double implication	$\leftrightarrow$	$v(A \leftrightarrow B) = 1$ ssi $v(A) = v(B)$

Définition (Equivalences)

$A \equiv B$ est une notation pour signifier que A et B ont la même **table de vérité**.

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Définition (Equivalences)

$A \equiv B$ est une notation pour signifier que A et B ont la même **table de vérité**.

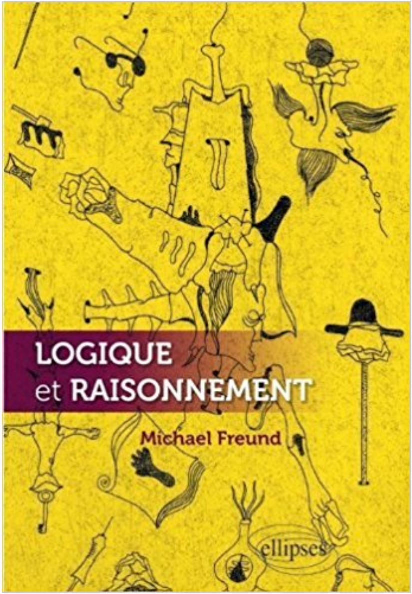
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Définition (Notions importantes)

Tautologie : proposition qui est toujours vraie. Symbole $\top$ (top).
Contradiction : proposition qui est toujours fausse. Symbole $\perp$ (bottom).

Prouver $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$.

DOUCEMENT MAIS SÛREMENT



LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Définition (Formules du langage propositionnel)

1. Les variables propositionnelles sont des propositions (atomiques). Notées a, b, c.
2. Le résultat de l'application d'un connecteur à une (pour $\neg$) ou deux propositions est encore une proposition. Notées P, Q, R.

Définition (Formules du langage propositionnel)

1. Les variables propositionnelles sont des propositions (atomiques). Notées a, b, c.
2. Le résultat de l'application d'un connecteur à une (pour $\neg$) ou deux propositions est encore une proposition. Notées P, Q, R.

Définition (Littéral, clause)

Littéral Variable propositionnelle ou négation d'une variable propositionnelle. Exemple : $a, \neg a$.

Clause Disjonction de littéraux. Exemple : $P = a \vee b$.

$$\frac{\begin{array}{ccc} A & \vee & q \\ \neg q & \vee & B \end{array}}{\begin{array}{ccc} A & \vee & B \end{array}}\ \text{résolution} \qquad \frac{\begin{array}{ccc} A & \vee & q \\ q & \to & B \end{array}}{\begin{array}{ccc} A & \vee & B \end{array}}\ \text{résolution}$$

Une unique règle d'inférence qui définit un système de preuve.
Cependant : nécessite que les énoncés soient sous une forme spécifique.

Définition (Forme Normale Conjonctive)

Normalisation d'une proposition sous forme de conjonction de clauses. Une proposition en FNC est une **conjonction de disjonction de littéraux**. Exemple : $(p \lor q \lor \neg r) \land (q \lor s)$.

Toute formule du langage propositionnel peut s'écrire sous FNC.

1. Élimination des implications.
    - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
    - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

CONVERSION SOUS FNC

1. Élimination des implications.
   - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
   - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
   - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
   - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

1. Élimination des implications.
    - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
    - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
    - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
    - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
3. Distribution des disjonctions (OU) sur les conjonctions (ET)
    - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Mettre sous FNC : $(a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow d)$.
Combien de littéraux ? Combien de clauses ?

EXERCICE

Mettre sous FNC : $a \rightarrow (b \wedge c \wedge d)$.
Combien de littéraux ? Combien de clauses ?

Règle de résolution

$$\frac{\begin{array}{lcl} A & \vee & p \\ \neg p & \vee & B \end{array}}{\begin{array}{lcl} A & \vee & B \end{array}}\ \text{résolution}$$

Résolution par réfutation :

1. Conversion de tous les énoncés en FNC.
2. Négation de la conclusion.
3. Application de la règle de résolution jusqu'à :
    - Obtention (dérivation) d'une contradiction.
    - Impossibilité d'appliquer la règle.

EXEMPLE

Énoncés : $a \vee b, a \rightarrow c, b \rightarrow c$.
Conclusion : c. Écrire la résolution.

EXERCICE

Énoncés : $(a \to b) \to b, \neg c \to (\neg a \wedge b), (c \to d) \to \neg(d \to b)$.
Conclusion : c. Écrire la résolution.

Énoncés : $(a \to b) \to b, \neg c \to (\neg a \wedge b), (c \to d) \to \neg(d \to b)$.
Conclusion : c. Écrire la résolution.

C'est long.

Deux stratégies :

- Recherche en largeur
- Recherche Shortest-Clause

La construction s'effectue par niveaux.

Niveau 0 Propositions de la base de connaissances, négation de la conclusion.

Niveau k Propositions obtenues grâce à l'application de la règle de résolution à deux propositions dont au moins une du niveau $k-1$.

Arrêt Lorsque l'application de la règle donne lieu à une contradiction ou n'est plus possible.

EXEMPLE

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

EXEMPLE

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

10. 1 et 5 $\neg b \vee c$

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

10. 1 et 5 $\neg b \vee c$
11. 2 et 3 $\neg a \vee \neg d \vee e \vee g \vee h$

EXEMPLE

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

10.	1 et 5	$\neg b \vee c$
11.	2 et 3	$\neg a \vee \neg d \vee e \vee g \vee h$
12.	2 et 5	$\neg d \vee e \vee f$

EXEMPLE

Niveau 0 :

1. $\neg a \lor \neg b \lor c$
2. $\neg a \lor \neg d \lor e \lor f$
3. $\neg f \lor g \lor h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

10. 1 et 5 $\neg b \lor c$
11. 2 et 3 $\neg a \lor \neg d \lor e \lor g \lor h$
12. 2 et 5 $\neg d \lor e \lor f$
13. 2 et 6 $\neg a \lor e \lor f$

Niveau 0 :

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

10. 1 et 5 $\neg b \vee c$
11. 2 et 3 $\neg a \vee \neg d \vee e \vee g \vee h$
12. 2 et 5 $\neg d \vee e \vee f$
13. 2 et 6 $\neg a \vee e \vee f$
14. 2 et 7 $\neg a \vee \neg d \vee f$

EXEMPLE

Niveau 0 :

1. $\neg a \lor \neg b \lor c$
2. $\neg a \lor \neg d \lor e \lor f$
3. $\neg f \lor g \lor h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

Niveau 1 :

10. 1 et 5 — $\neg b \lor c$
11. 2 et 3 — $\neg a \lor \neg d \lor e \lor g \lor h$
12. 2 et 5 — $\neg d \lor e \lor f$
13. 2 et 6 — $\neg a \lor e \lor f$
14. 2 et 7 — $\neg a \lor \neg d \lor f$
15. et nous ne sommes pas encore au bout du niveau 1 (!)

But : obtenir la **contradiction**, proposition de taille 1.
Donc : on choisit les étapes de résolution impliquant les littéraux.
On produit ainsi des propositions plus petites : convergence vers une taille 1.

EXEMPLE

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion

EXEMPLE

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 $\neg d \vee e \vee f$

EXEMPLE

1. $\neg a \lor \neg b \lor c$
2. $\neg a \lor \neg d \lor e \lor f$
3. $\neg f \lor g \lor h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 $\neg d \lor e \lor f$
11. 2 et 6 $\neg a \lor e \lor f$

EXEMPLE

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 $\neg d \vee e \vee f$
11. 2 et 6 $\neg a \vee e \vee f$
12. 2 et 7 $\neg a \vee \neg d \vee f$

EXEMPLE

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 — $\neg d \vee e \vee f$
11. 2 et 6 — $\neg a \vee e \vee f$
12. 2 et 7 — $\neg a \vee \neg d \vee f$
13. 3 et 8 — $\neg f \vee g$

EXEMPLE

1. $\neg a \lor \neg b \lor c$
2. $\neg a \lor \neg d \lor e \lor f$
3. $\neg f \lor g \lor h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 — $\neg d \lor e \lor f$
11. 2 et 6 — $\neg a \lor e \lor f$
12. 2 et 7 — $\neg a \lor \neg d \lor f$
13. 3 et 8 — $\neg f \lor g$
14. 3 et 9 — $\neg f \lor h$

EXEMPLE

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 $\quad \neg d \vee e \vee f$
11. 2 et 6 $\quad \neg a \vee e \vee f$
12. 2 et 7 $\quad \neg a \vee \neg d \vee f$
13. 3 et 8 $\quad \neg f \vee g$
14. 3 et 9 $\quad \neg f \vee h$
15. 12 et 13 $\quad \neg a \vee \neg d \vee g$

EXEMPLE

1. $\neg a \lor \neg b \lor c$
2. $\neg a \lor \neg d \lor e \lor f$
3. $\neg f \lor g \lor h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 — $\neg d \lor e \lor f$
11. 2 et 6 — $\neg a \lor e \lor f$
12. 2 et 7 — $\neg a \lor \neg d \lor f$
13. 3 et 8 — $\neg f \lor g$
14. 3 et 9 — $\neg f \lor h$
15. 12 et 13 — $\neg a \lor \neg d \lor g$
16. 5 et 15 — $\neg d \lor g$

EXEMPLE

1. $\neg a \lor \neg b \lor c$
2. $\neg a \lor \neg d \lor e \lor f$
3. $\neg f \lor g \lor h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 — $\neg d \lor e \lor f$
11. 2 et 6 — $\neg a \lor e \lor f$
12. 2 et 7 — $\neg a \lor \neg d \lor f$
13. 3 et 8 — $\neg f \lor g$
14. 3 et 9 — $\neg f \lor h$
15. 12 et 13 — $\neg a \lor \neg d \lor g$
16. 5 et 15 — $\neg d \lor g$
17. 6 et 16 — g

EXEMPLE

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg a \vee \neg d \vee e \vee f$
3. $\neg f \vee g \vee h$
4. c
5. a
6. d
7. $\neg e$
8. $\neg h$
9. $\neg g$ négation de la conclusion
10. 2 et 5 — $\neg d \vee e \vee f$
11. 2 et 6 — $\neg a \vee e \vee f$
12. 2 et 7 — $\neg a \vee \neg d \vee f$
13. 3 et 8 — $\neg f \vee g$
14. 3 et 9 — $\neg f \vee h$
15. 12 et 13 — $\neg a \vee \neg d \vee g$
16. 5 et 15 — $\neg d \vee g$
17. 6 et 16 — g
18. 9 et 17 — FALSE

ET EN PRATIQUE ?

- Le langage de la logique est très expressif
- Il exprime ce qui est vrai et ne dit pas comment l'utiliser
- Cependant, les assistants de preuve par résolution ne sont pas très efficaces (cependant, `Coq`)
- La résolution peut devenir exponentielle en temps et en espace
- En pratique :
    - Limiter le langage
    - Simplifier les algorithmes de preuve
- Systèmes à base de règles
- Programmation logique (ex : `Prolog`)

POUR RÉSUMER

Logique propositionnelle :

- Définitions : variable propositionnelle, littéral, clause, FNC
- Preuves : règle de résolution, FNC, à la main et sans tautologies, c'est long
- Algorithmique : recherche en largeur (divergence), recherche Shortest-Clause (convergence)

Réduction de la complexité de calcul ?

Définition (Clause de Horn)

Une **clause de Horn** est une clause qui possède **au plus** un littéral positif. Exemple : $\neg p \lor \neg q \lor \neg r \lor s$.

Équivalence : $\neg p_1 \lor \neg p_2 \lor \ldots \lor \neg p_n \lor q \equiv (p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q$.
Les p_i sont les **prémisses** de la **conséquence** q.

On ne **peut pas** conclure un littéral négatif : $p \to \neg q$.
On ne **peut pas** conclure une disjonction : $p_1 \wedge p_2 \to q_1 \vee q_2$.

CHAÎNAGE AVANT (FORWARD CHAINING)

Attention : ne s'applique qu'aux clauses de Horn.

CHAÎNAGE AVANT (FORWARD CHAINING)

Attention : ne s'applique qu'aux clauses de Horn.

Principe : appliquer toute règle dont les prémisses sont validées par la base des énoncés et ajouter ses conclusions à la base des énoncés jusqu'à ce que la conclusion soit satisfaite.

Attention : ne s'applique qu'aux clauses de Horn.

Principe : appliquer toute règle dont les prémisses sont validées par la base des énoncés et ajouter ses conclusions à la base des énoncés jusqu'à ce que la conclusion soit satisfaite.

Attention : on veut la conclusion, pas la négation de la conclusion.

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \land m) \rightarrow p$
3. $(b \land l) \rightarrow m$
4. $(a \land p) \rightarrow l$
5. $(a \land b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

———————————

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

———————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

——————————

8.	l	$6 \wedge 7$ et 5
9.	m	$7 \wedge 8$ et 3

EXEMPLE

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \rightarrow q$
2. $(l \wedge m) \rightarrow p$
3. $(b \wedge l) \rightarrow m$
4. $(a \wedge p) \rightarrow l$
5. $(a \wedge b) \rightarrow l$
6. a
7. b

——————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5
9. m — $7 \wedge 8$ et 3
10. p — $8 \wedge 9$ et 2

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

———————————

8. l — $6 \wedge 7$ et 5
9. m — $7 \wedge 8$ et 3
10. p — $8 \wedge 9$ et 2
11. q — 10 et 1

Algorithme : Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que (F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable) **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si F $\in$ BF **alors**
  F est établi

sinon
  F n'est pas établi

Base de règles :

R1 : si Bénédicte et Denis et Etienne viennent alors Farida vient
R2 : si Gérard et Denis viennent alors Amélie vient
R3 : si Coralie et Farida viennent alors Amélie vient
R4 : Si Bénédicte alors Xavier vient
R5 : si Xavier et Amélie viennent alors Herman vient
R6 : si Coralie alors Denis vient
R7 : si Xavier et Coralie viennent alors Amélie vient
R8 : si Xavier et Bénédicte viennent alors Denis vient

Base de faits = {Bénédicte , Coralie}

1. Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?
2. Saturer la base de faits avec les règles en suivant l'algorithme de chaînage avant.
3. Herman fait-il partie de la base de faits saturée ?

On peut envisager la recherche de preuve dans l'autre sens :

- On part de ce que l'on veut prouver, et on cherche quelles pourraient en être les prémisses.
- On remonte ainsi jusqu'aux énoncés de la base d'énoncés donnée.
- On construit ainsi un arbre de déduction inverse.

Pour prouver un littéral α :

1. Empiler α sur la pile.
2. Répeter les actions suivantes jusqu'à ce que la pile soit vide ou que les actions ne soient plus possibles :
   i. Dépiler le littéral λ le plus haut dans la pile.
   ii. Choisir un énoncé dont λ est la conséquence. Si aucune correspondance, FAIL.
   iii. Empiler les prémisses de cet énoncé (dans l'ordre) sur la pile.

ATTENTION

Éviter les boucles infinies : vérifier si λ est déjà dans la pile.

Éviter de répéter des traitements : vérifier si λ est déjà vrai (cela a été prouvé) OU déjà faux.

EXEMPLE

1. $p \to q$
2. $(l \wedge m) \to p$
3. $(b \wedge l) \to m$
4. $(a \wedge p) \to l$
5. $(a \wedge b) \to l$
6. a
7. b

Prouver q

Discussion la prochaine fois.