Substitutions

Pour substituer un terme t à une variable x dans une formule $F(x)$:

1. On remplace x par une variable fraîche à chaque occurence liée de x. $F(x)$ devient $F_1(x)$ où n'apparaît aucune occurence liée de x.
2. On remplace de la même façon les variables liées de $F_1(x)$ qui apparaissent dans le terme t. $F_1(x)$ devient $F_2(x)$ dont aucune variable liée ne figure dans t.
3. On effectue la substitution de t à x dans $F_2(x)$. On obtient $F[t/x]$.

1. s54 : $G[f(x)/z]$
2. s55 : σ_1 : $[b/y, a/x, y/z]$
   σ_2 : $[f(y)/x, z/y]$

Modèles

$$F = \exists x \, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

$$F = \exists x\ R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 1 $a = -1$, $f(x) = x^2$, $R =$ '$=$'.

$$F = \exists x \, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 1 $a = -1$, $f(x) = x^2$, $R =$ '$=$'.

Interprétation 2 $f(x) =$ « père de x », $R(x, y) =$ « x est le frère de y ».

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage prédicatif. Soit D un ensemble non-vide appelé domaine d'interprétation. Soit I une fonction qui associe :

- à chaque constante une valeur de D
- à chaque symbole de fonction n-aire une fonction totale de D^n dans D
- à chaque symbole de prédicat n-aire une relation n-aire dans D : un ensemble de n-tuples d'éléments de D

I est appelée fonction d'interprétation.

Définition

« Un modèle, c’est juste un environnement où les formules elles marchent ! »

Définition

« Un modèle, c'est juste un environnement où les formules elles marchent ! »

La donnée d'un domaine d'interprétation et de la fonction d'interprétation définit un **modèle** : $\mathcal{M} = \{D, I\}$.

EXEMPLE/EXERCICE

Soit le modèle défini par le domaine $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, et la fonction d'interprétation F :

- $F(\text{mia}) = d_1$
- $F(\text{honey-bunny}) = d_2$
- $F(\text{vincent}) = d_3$
- $F(\text{pumpkin}) = d_4$
- $F(\text{client}) = \{d_1, d_2, d_4\}$
- $F(\text{voleur}) = \{d_2, d_3, d_4\}$
- $F(\text{aime}) = \{(d_2, d_4)\}$

1. Donner un dessin simple de ce modèle.
2. Les deux énoncés suivants sont-ils vrais dans ce modèle ? Expliquer.
   a. $\exists x.\text{aime}(x, \text{vincent})$
   b. $\exists x \exists y(\text{voleur}(x) \wedge \text{client}(y) \wedge \text{aime}(x, y))$

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{P, f\}$ où P est un prédicat binaire et f une fonction unaire, et l'interprétation suivante :

Domaine : l'ensemble $\mathcal{H}$ des êtres humains,

$P(x, y)$ **:** « x est père de y »,

$f(x)$ **:** « frère de x ».

Lesquelles des formules ci-dessous sont satisfaites dans le modèle $\mathcal{M} = \{\mathcal{H}$, « être père de », « frère de »$\}$?

1. $F = \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow P(x, f(y))\right)$
2. $G = \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)\right)$
3. $H = \forall x \forall y \forall z \left((P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)\right)$

EXERCICE : MODÈLE

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{a, P, f\}$ où a est une constante, P un prédicat binaire et f une fonction unaire. Proposer un ou plusieurs modèles pour chacune des formules suivantes :

1. $F = \forall x \forall y \left(P(x, y) \vee P(y, x)\right)$
2. $G = \forall x \; P(x, f(x))$
3. $H = \forall x \forall y \left(P(x, f(y)) \rightarrow P(x, y)\right)$

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? OUI, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- $f(g(f(x), y), h(verte, y))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? OUI, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- $f(g(f(x), y), h(verte, y))$? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- $f(h(x, rouge), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? OUI, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? NON, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? OUI, avec $\sigma = [\text{rouge}/y]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? NON, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.
- f(g(x, rouge), h(verte, x, rouge)) ?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? OUI, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? NON, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.
- f(g(x, rouge), h(verte, x, rouge)) ? NON, car l'arité n'est pas la même.

Entrée : deux termes t et u

Sortie : si σ existe, σ telle que $t_\sigma = u_\sigma$

Exemple

$t = f(t_1, ..., t_k)$ et $u = g(u_1, ..., u_{k'})$?

- Si $f \neq g$, il est impossible de trouver σ.
- Si $f = g$ (et donc $k = k'$), il faut trouver un σ tel que $s_1\sigma = t_1\sigma$, $s_2\sigma = t_2\sigma, \dots$

Algorithme d'unification (voir document en ligne).

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).

Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, \dots, s_n)$ et $t = f(t_1, \dots, t_n)$ où f est une fonction, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ où x est une variable, et $t \neq x$, et : (de même en inversant s et t)

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ et on supprime le couple (s, t) de $\mathcal{U}$

fusion Si $s = x$ où x est une variable, $t \neq x$, et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

Soient f, g, h, n des symboles de fonctions et x, y, z, v des variables. Écrire l'exécution de l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

Soient f, g, h, n des symboles de fonctions et x, y, z, v des variables. Écrire l'exécution de l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

Étape 0

Reste à unifier	$f(h(x, y), g(x))$ avec $f(h(n(y), h(z, z)), v)$
Unificateur en construction	$\sigma = []$

Définition

Soient t et u deux termes. Alors, soit t et u ne sont pas unifiables, soit il existe un unificateur le plus général (ou mgu) σ tel que :

- $\mathrm{t}_\sigma = \mathrm{u}_\sigma$
- Pour tout unificateur σ' de t et u, il existe σ'' tel que $\sigma' = \sigma_{\sigma''}$ (autrement dit, σ' substitue trop par rapport à σ).

On note : $\sigma = \mathrm{mgu}(\mathrm{t}, \mathrm{u})$.

Définition

Soient t et u deux termes. Alors, soit t et u ne sont pas unifiables, soit il existe un unificateur le plus général (ou mgu) σ tel que :

- $\mathrm{t}_\sigma = \mathrm{u}_\sigma$
- Pour tout unificateur σ' de t et u, il existe σ'' tel que $\sigma' = \sigma_{\sigma''}$ (autrement dit, σ' substitue trop par rapport à σ).

On note : $\sigma = \mathrm{mgu}(\mathrm{t}, \mathrm{u})$.

Lorsqu'il réussit, l'algorithme vu précédemment donne exactement le $\mathrm{mgu}(\mathrm{t}, \mathrm{u})$.