ALGORITHME D'UNIFICATION DE TERMES

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).

Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression — Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition — Si $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ et $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ où f est une fonction, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)$.

association — Si $s = x$ où x est une variable, et $t \neq x$, et : (de même en inversant s et t)

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ et on supprime le couple (s, t) de $\mathcal{U}$. Puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant σ.

fusion — Si $s = x$ où x est une variable, $t \neq x$, et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables

EXEMPLE/EXERCICE

Soient f, g, h, n des symboles de fonctions et x, y, z, v des variables. Écrire l'exécution de l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

Soient f, g, h, n des symboles de fonctions et x, y, z, v des variables. Écrire l'exécution de l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

$$s = f(h(x, y), g(x)) \text{ et } t = f(h(n(y), h(z, z)), v)$$

Étape 0

Reste à unifier	$f(h(x, y), g(x))$ avec $f(h(n(y), h(z, z)), v)$
Unificateur en construction	$\sigma = []$

EXERCICE

$$s = f(a, x, h(g(z))) \text{ et } t = f(z, h(y), h(y))$$

$$s = f(a, x, h(g(z))) \text{ et } t = f(z, h(y), h(y))$$

Proposition : $\sigma = [a/z, h(g(a))/x, g(a)/y]$

Définition

Soient t et u deux termes. Alors, soit t et u ne sont pas unifiables, soit il existe un unificateur le plus général (ou mgu) σ tel que :

- $\mathrm{t}_\sigma = \mathrm{u}_\sigma$
- Pour tout unificateur σ' de t et u, il existe σ'' tel que $\sigma' = \sigma_{\sigma''}$ (autrement dit, σ' substitue trop par rapport à σ).

On note : $\sigma = \mathrm{mgu}(\mathrm{t}, \mathrm{u})$.

Définition

Soient t et u deux termes. Alors, soit t et u ne sont pas unifiables, soit il existe un unificateur le plus général (ou mgu) σ tel que :

- $t_\sigma = u_\sigma$
- Pour tout unificateur σ' de t et u, il existe σ'' tel que $\sigma' = \sigma_{\sigma''}$ (autrement dit, σ' substitue trop par rapport à σ).

On note : $\sigma = \mathrm{mgu}(t, u)$.

Lorsqu'il réussit, l'algorithme vu précédemment donne exactement le $\mathrm{mgu}(t, u)$.

- Une formule est **close** si elle ne comporte pas de variables libres.
- Pour une formule close F et un modèle $\mathcal{M}$, on note $\mathcal{M} \models \mathrm{F}$ si l'interprétation de F est vraie dans $\mathcal{M}$. On dit « $\mathcal{M}$ **satisfait** F » ou encore « $\mathcal{M}$ est un modèle **pour** F ».
- Si l'interprétation de F dans $\mathcal{M}$ est fausse, on note $\mathcal{M} \not\models \mathrm{F}$.

PROPRIÉTÉS

Pour deux formules closes F et G et un modèle $\mathcal{M}$, on a :

- $\mathcal{M} \models \neg F$ ssi $\mathcal{M} \not\models F$
- $\mathcal{M} \models (F \wedge G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ et $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \vee G)$ ssi $\mathcal{M} \models F$ ou $\mathcal{M} \models G$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)$ ssi $\mathcal{M} \models \neg F$ ou $\mathcal{M} \models G$

PROPRIÉTÉS

Pour deux formules F(x) et G(x) admettant x comme variable libre, $\mathcal{M}$ un modèle et **a** un élément du domaine de $\mathcal{M}$, on a :

- $\mathcal{M} \models \neg F(a)$ ssi $\mathcal{M} \not\models F(a)$
- $\mathcal{M} \models (F \land G)(a)$ ssi $\mathcal{M} \models F(a)$ et $\mathcal{M} \models G(a)$
- $\mathcal{M} \models (F \lor G)(a)$ ssi $\mathcal{M} \models F(a)$ ou $\mathcal{M} \models G(a)$
- $\mathcal{M} \models (F \rightarrow G)(a)$ ssi $\mathcal{M} \not\models F(a)$ ou $\mathcal{M} \models G(a)$
- $\mathcal{M} \models \forall x\, F(x)$ ssi, quelque soit **a** dans le domaine, on a $\mathcal{M} \models F(a)$
- $\mathcal{M} \models \exists x\, F(x)$ ssi pour au moins un élément **a** du domaine, on a $\mathcal{M} \models F(a)$

Modèle étendu $\mathcal{M}[x/a]$: modèle obtenu à partir de $\mathcal{M}$ en substituant la variable x au terme a dans le domaine de $\mathcal{M}$.

- $\mathcal{M} \models \forall x\ \phi$ ssi $\mathcal{M}[x/a] \models \phi$ pour tout élément a dans le domaine de $\mathcal{M}$
- $\mathcal{M} \models \exists x\ \phi$ ssi $\mathcal{M}[x/a] \models \phi$ pour un élément a dans le domaine de $\mathcal{M}$

DÉFINITIONS : VALIDITÉ, SATISFIABILITÉ, THÉORIE

- Une formule est **valide** si elle est vraie dans toute interprétation et toute affectation des variables libres. Sinon, elle est **invalide**.
- Une formule est **insatisfiable** si elle est fausse dans toute interprétation et toute affectation des variables libres. Sinon elle est **satisfiable**.

THÉORIE, CONSISTANCE, CONTRADICTION

- Une **théorie** (T) est un ensemble de formules closes. Si un modèle ($\mathcal{M}$) **satisfait** toutes les formules d'une théorie (T), alors **$\mathcal{M}$ est un modèle de** T **(**$\mathcal{M} \models$ T**)**.
- Une théorie **consistante** est une théorie qui a au moins un modèle. Sinon la théorie est **contradictoire**.

Entrée : formule de logique propositionnelle (!)

Sortie : existence/non existence d'une assignation des variables propositionnelles qui rend la formule vraie

Pour chacune des formules, donner une assignation des variables propositionnelles qui rend la formule vraie ou prouver qu'il n'en existe pas :

1. $\{a \wedge b, \neg a \vee c, \neg b \vee d \vee e, d \wedge \neg e\}$
2. $\{\neg a \wedge b, \neg b \vee \neg c, (\neg d \wedge a) \vee c, \neg d \wedge b\}$
3. $\{\neg a \vee \neg b \vee c, a \vee d, b \vee e, \neg c \vee e, d \vee \neg e, \neg d \vee e, \neg d \vee \neg e\}$

CNF-SAT NP-complet

RESTRICTIONS DE SAT

CNF-SAT NP-complet
3-SAT NP-complet

RESTRICTIONS DE SAT

CNF-SAT NP-complet

3-SAT NP-complet

2-SAT dans la classe P

RESTRICTIONS DE SAT

CNF-SAT	NP-complet
3-SAT	NP-complet
2-SAT	dans la classe P
Horn-SAT	P-complet

CNF-SAT	NP-complet
3-SAT	NP-complet
2-SAT	dans la classe P
Horn-SAT	P-complet

Référence :