# Résolution en logique des prédicats

Modus ponens :

$$\frac{\neg p \vee q \qquad p}{q}$$

# MODUS PONENS, AGAIN

Modus ponens :

$$\frac{\neg p \lor q \qquad p}{q}$$

Règle de résolution :

$$\frac{\neg p \lor L_1 \lor \ldots \lor L_m \qquad p \lor M_1 \lor \ldots \lor M_n}{L_1 \lor \ldots \lor L_m \lor M_1 \lor \ldots \lor M_n}$$

Soit un prédicat « chemin » d'arité 2, une fonction « voisin » d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici ». On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \forall x \ \mathrm{chemin}(x, \mathrm{voisin}(x)) \\ \phi_2 &= \forall xyz \ (\mathrm{chemin}(x, z) \wedge \mathrm{chemin}(z, y) \rightarrow \mathrm{chemin}(x, y)) \\ \phi &= \exists a \ \mathrm{chemin}(\mathrm{ici}, \mathrm{voisin}(\mathrm{voisin}(a))) \end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

# FORME NORMALE EN LOGIQUE DES PRÉDICATS

1. Mettre les quantificateurs au début de la formule : mise sous **forme prénexe**
2. Supprimer les quantificateurs existentiels ($\exists$) : **skolémisation**
3. Passer en **forme normale conjonctive**

### Définition

Une formule F est en **forme prénexe** lorqu'elle est de la forme $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \ \phi$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ pour $i \in \mathbb{N}$
- $\phi$ est une formule ne contenant pas de quantificateurs

### Définition

Une formule $F$ est en **forme prénexe** lorqu'elle est de la forme $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n\ \phi$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ pour $i \in \mathbb{N}$
- $\phi$ est une formule ne contenant pas de quantificateurs

À partir d'une formule $F$, on peut construire une formule $F'$ sémantiquement équivalente qui soit sous forme prénexe.

| La formule | se transforme en |
|---|---|
| $\neg\forall x\ \phi$ | $\exists x\ \neg\phi$ |
| $\neg\exists x\ \phi$ | $\forall x\ \neg\phi$ |
| $\phi \vee \forall x\ \phi'$ | $\forall x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$ |
| $\phi \vee \exists x\ \phi'$ | $\exists x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$ |
| $\forall x\ \phi \vee \phi'$ | $\forall x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$ |
| $\exists x\ \phi \vee \phi'$ | $\exists x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$ |
| $\phi \wedge \forall x\ \phi'$ | $\forall x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$ |
| $\phi \wedge \exists x\ \phi'$ | $\exists x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$ |
| $\forall x\ \phi \wedge \phi'$ | $\forall x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$ |
| $\exists x\ \phi \wedge \phi'$ | $\exists x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$ |
| $\phi \to \forall x\ \phi'$ | $\forall x'\ (\phi \to \phi'[x'/x])$ |
| $\phi \to \exists x\ \phi'$ | $\exists x'\ (\phi \to \phi'[x'/x])$ |
| $\forall x\ \phi \to \phi'$ | $\exists x'\ (\phi[x'/x] \to \phi')$ |
| $\exists x\ \phi \to \phi'$ | $\forall x'\ (\phi[x'/x] \to \phi')$ |

## ATTENTION

On effectue éventuellement un renommage (de x vers x') pour éviter la capture de variables libres.
Attention au quantificateur à gauche d'un $\rightarrow$.

Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :

1. $P(a) \vee P(b) \rightarrow \exists x\, P(x)$
2. $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$
3. $\forall x\, \forall y\, (P(x) \rightarrow P(y)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x))$

# ATTENTION

Le résultat peut varier selon l'ordre d'application des règles.
Cela peut changer la difficulté de prouver/réfuter la forme prénexe :
$\forall x.\exists y.\phi$ est plus facile à prouver (mais plus difficile à réfuter) que $\exists y.\forall x.\phi$.

**Définition**

Une formule $F$ est en sous forme normale de Skolem lorsqu'elle est en forme prénexe et $Q_i = \forall$ pour $i \in \mathbb{N}$.

# PRINCIPE

$$\forall x \exists y\ p(x, y)$$

$$\forall x \exists y \; p(x, y)$$

« pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ »

$$\forall x \exists y \; p(x, y)$$

« pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ »

On peut définir une fonction f qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que $p(x, y)$ est vrai. On a alors :

$$\forall x \; p(x, f(x))$$

# ATTENTION

S'il y a plusieurs quantificateurs universels, la fonction dépend de toutes les variables qui viennent avant la variable liée au quantificateur existentiel dans la formule.

En général, la formule skolémisée n'est pas équivalente à la formule d'origine, mais l'une est satifiable si et seulement si l'autre l'est (d'où l'utilisation des formes normales de Skolem dans la résolution).

Mettre sous forme normale de Skolem les formules suivantes :

1. $\exists x\ (P(a) \vee P(b) \rightarrow P(x))$
2. $\forall x\ \exists y\ (P(y) \rightarrow P(x))$
3. $\exists y\ \forall x\ (P(y) \rightarrow P(x))$
4. $\exists x\ \exists y \forall z\ \forall t\ ((P(x) \rightarrow P(y)) \rightarrow P(z) \rightarrow P(t))$

## CONVERSION SOUS FNC

1. Élimination des implications.
   - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
   - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
   - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
   - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
3. Distribution des disjonctions (OU) sur les conjonctions (ET)
   - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

- Règle de résolution :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

- Mise sous forme normale (logique des prédicats)
  - Mise sous forme prénexe
  - Mise sous forme normale de Skolem
  - Mise sous forme normale conjonctive

Soit un prédicat « chemin » d'arité 2, une fonction « voisin » d'arité 1, des variables 'x', 'y', 'z' et 'a', et une constante « ici ». On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \forall x \text{ chemin}(x, \text{voisin}(x))\\ \phi_2 &= \forall xyz\ (\text{chemin}(x, z) \wedge \text{chemin}(z, y) \rightarrow \text{chemin}(x, y))\\ \phi &= \exists a \text{ chemin}(\text{ici}, \text{voisin}(\text{voisin}(a)))\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

# EXERCICE

Soient les prédicats $p, r$ d'arité 1, les prédicats $q, s$ d'arité 2, les variables $x, y$ et la constante $c$. On définit les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x\ p(x) \to q(x, c) \\
\phi_2 &= \forall x \exists y\ ((r(x) \vee \neg p(y)) \to s(x, y)) \\
\phi_3 &= \forall x\ p(x) \\
\phi &= \forall x\ (r(x) \to \exists y\ (s(x, y) \wedge b(y, c)))
\end{aligned}
$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \vdash \phi$.

**Correction** s'il est possible de réfuter par résolution un ensemble de clauses, alors cet ensemble est insatisfaisable.

**Complétude** si un ensemble de clauses est insatisfaisable, alors il est possible de le réfuter par résolution.

**Terminaison** la méthode de résolution en logique des prédicats ne **termine** pas en particulier lorsque l'ensemble de clauses est satisfaisable.

La résolution est **correcte** et **complète**, mais ne termine pas nécessairement.

**Correction** s'il est possible de réfuter par résolution un ensemble de clauses, alors cet ensemble est insatisfaisable.

**Complétude** si un ensemble de clauses est insatisfaisable, alors il est possible de le réfuter par résolution.

**Terminaison** la méthode de résolution en logique des prédicats ne **termine** pas en particulier lorsque l'ensemble de clauses est satisfaisable.

# Pour conclure

**Vériconditionnelle** Chaque proposition est vraie ou fausse (on exclut : plausibilité, rectitude politique, modalité…)

**Compositionnelle** La signification (valeur de vérité) d'une proposition complexe dépend uniquement de la signification des propositions qui la composent (principe de Frege)

**Formelle** Les règles d'ériture, propriétés, conséquences d'une formule sont définies rigoureusement.

**Calculable** On peut définir deux types de règles de calcul :

- **Syntaxiques** Permettent de définir des inférences valides en fonction de la forme des prémisses
- **Sémantiques** S'appuyent sur la compositionnalité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

**Alice**$_1$ Charlie est une licorne.

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

**Alice**[1] Charlie est une licorne.

· Le sens : compositionnalité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

**Alice**$_1$ Charlie est une licorne.

**Bob**$_2$ Elle préfère le thé ou le café ?

· Le sens : compositionnalité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

**Alice$_1$** Charlie est une licorne.

**Bob$_2$** Elle préfère le thé ou le café ?

- Le sens : compositionnalité
- Le contexte : dynamicité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

**Alice$_1$** Charlie est une licorne.

**Bob$_2$** Elle préfère le thé ou le café ?

**Alice$_3$** Oui.

- Le sens : compositionnalité
- Le contexte : dynamicité

- Sémantique formelle
- Richard Montague (1970) : pas de différence entre la langue naturelle et les langages logiques

| | |
|---|---|
| **Alice$_1$** | Charlie est une licorne. |
| **Bob$_2$** | Elle préfère le thé ou le café ? |
| **Alice$_3$** | Oui. |

- Le sens : compositionnalité
- Le contexte : dynamicité
- La compréhension : logique

Merci, et bonnes révisions!