$\mathcal{C}$: prédicat $\mathcal{N}$: fct a, x, y, z : variable ici : const

$\varphi_1 = \forall x \; \mathcal{C}(x, \mathcal{N}(x))$

$\varphi_2 = \forall xyz \; (\mathcal{C}(x,z) \wedge \mathcal{C}(z,y) \rightarrow \mathcal{C}(x,y))$

$\varphi_3 = \exists a \; \mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(\mathcal{N}(a)))$

Mq $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi$

1) Contraposée

$\neg\varphi = \forall a \; \neg\mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(\mathcal{N}(a)))$

2) Mise sous forme normale

a) Forme prénexe ? Ok

b) Forme normale de Skolem ? Ok

c) FNC ?

$\varphi_2 \equiv \forall xyz \; (\neg\mathcal{C}(x,z) \vee \neg\mathcal{C}(z,y) \vee \mathcal{C}(x,y))$ (par $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$)

<u>On a donc</u>

$F_1 = \forall x \; \mathcal{C}(x, \mathcal{N}(x))$

$F_2 = \forall xyz \; (\neg\mathcal{C}(x,z) \vee \neg\mathcal{C}(z,y) \vee \mathcal{C}(x,y))$

$F_3 = \forall a \; \neg\mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(\mathcal{N}(a)))$

3) Substitution et résolution

Soit u une variable fraîche.

$F_2[{}^{ici}/_x, \mathcal{N}(\mathcal{N}(u))/_y] = \forall uz \; (\neg\mathcal{C}(ici,z) \vee \neg\mathcal{C}(z, \mathcal{N}(\mathcal{N}(u))) \vee \underbrace{\mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(\mathcal{N}(u)))}_{P}$

$F_3[{}^{u}/_a] = \forall u \; \underbrace{\neg\mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(\mathcal{N}(u)))}_{\neg P}$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions :

$\forall u z \ (\neg \mathcal{C}(ici, z) \vee \neg \mathcal{C}(z, \mathcal{N}(\mathcal{N}(u)))) = F_4$

$F_4[\mathcal{N}(ici)/z, \ ici/u] = (\neg \mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(ici)) \vee \underbrace{\neg \mathcal{C}(\mathcal{N}(ici), \mathcal{N}(\mathcal{N}(ici)))}_{\neg p}$

$F_1[\mathcal{N}(ici)/x] = \underbrace{\mathcal{C}(\mathcal{N}(ici), \mathcal{N}(\mathcal{N}(ici)))}_{p}$

Par application de la R.R aux résultats des substitutions :

$$\neg \mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(ici)) = F_5$$

$F_1[ici/x] = \mathcal{C}(ici, \mathcal{N}(ici))$, <u>ce qui contredit F_5</u>.

Donc $\boxed{\varphi_1, \varphi_2 \vdash \varphi_2}$.