FORMALISMES DE REPRÉSENTATION ET RAISONNEMENT

Maria Boritchev

16 janvier 2020

Université de Lorraine

Maria Boritchev `https://members.loria.fr/MBoritchev/`
maria.boritchev@univ-lorraine.fr

Et vous ? D'où venez vous ? Les maths et vous ?

Le cours 10 séances de 2h, CM+TD

Arche / Page perso Supports de cours et informations

L'évaluation DM (exercice corrigé); examen final de 2h (feuille A4 autorisée)

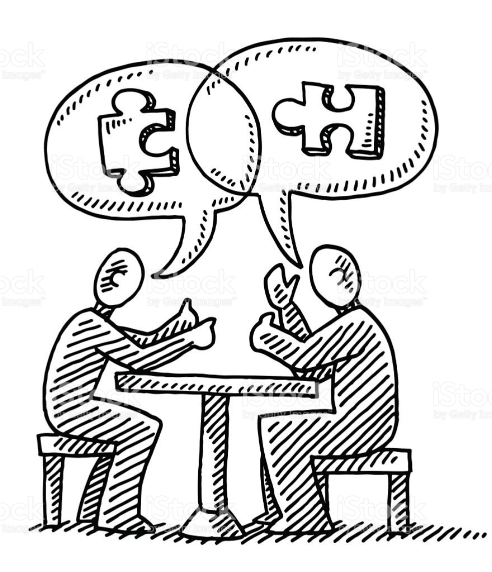
PLAN DU COURS

Généralités sur la logique

Logique propositionnelle

GÉNÉRALITÉS SUR LA LOGIQUE

MOTIVATIONS



Définition (Valeur de vérité)

$v(A) = 1$ si A est vraie ; $v(A) = 0$ si A est fausse.

Définition (Connecteurs)

Nom	Symbole	Valeur de vérité
négation	$\neg$	$v(\neg A) = 1$ ssi $v(A) = 0$
conjonction	$\wedge$	$v(A \wedge B) = 1$ ssi $v(A) = v(B) = 1$
disjonction	$\vee$	$v(A \vee B) = 0$ ssi $v(A) = v(B) = 0$
implication	$\rightarrow$	$v(A \rightarrow B) = 0$ ssi $v(A) = 1$ et $v(B) = 0$
double implication	$\leftrightarrow$	$v(A \leftrightarrow B) = 1$ ssi $v(A) = v(B)$

Définition (Equivalences)

$A \equiv B$ est une notation pour signifier que A et B ont la même **table de vérité**.

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Définition (Equivalences)

$A \equiv B$ est une notation pour signifier que A et B ont la même **table de vérité**.

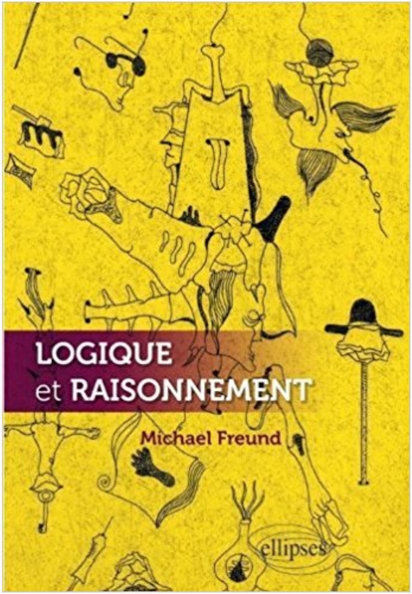
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Définition (Notions importantes)

Tautologie : proposition qui est toujours vraie. Symbole $\top$ (top).
Contradiction : proposition qui est toujours fausse. Symbole $\perp$ (bottom).

ÉCHAUFFEMENT

Prouver $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$.


LOGIQUE
et RAISONNEMENT
Michael Freund
ellipses

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Définition (Formules du langage propositionnel)

1. Les variables propositionnelles sont des propositions (atomiques). Notées a, b, c.
2. Le résultat de l'application d'un connecteur à une (pour $\neg$) ou deux propositions est encore une proposition. Notées P, Q, R.

Définition (Formules du langage propositionnel)

1. Les variables propositionnelles sont des propositions (atomiques). Notées a, b, c.
2. Le résultat de l'application d'un connecteur à une (pour $\neg$) ou deux propositions est encore une proposition. Notées P, Q, R.

Définition (Littéral, clause)

Littéral Variable propositionnelle ou négation d'une variable propositionnelle. Exemple : $a, \neg a$.

Clause Disjonction de littéraux. Exemple : $P = a \vee b$.

$$\frac{\begin{array}{ccc} A & \vee & q \\ \neg q & \vee & B \end{array}}{\begin{array}{ccc} A & \vee & B \end{array}}\ \text{résolution} \qquad \frac{\begin{array}{ccc} A & \vee & q \\ q & \rightarrow & B \end{array}}{\begin{array}{ccc} A & \vee & B \end{array}}\ \text{résolution}$$

Une unique règle d'inférence qui définit un système de preuve.

Cependant : nécessite que les énoncés soient sous une forme spécifique.

Définition (Forme Normale Conjonctive)

Normalisation d'une proposition sous forme de conjonction de clauses. Une proposition en FNC est une **conjonction de disjonction de littéraux**. Exemple : $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee s)$.

Toute formule du langage propositionnel peut s'écrire sous FNC.

1. Élimination des implications.
    - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
    - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

1. Élimination des implications.
    - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
    - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
    - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
    - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

1. Élimination des implications.
   - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
   - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
   - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
   - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
3. Distribution des disjonctions (OU) sur les conjonctions (ET)
   - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

EXEMPLE

Mettre sous FNC : $(a \vee b) \rightarrow (c \rightarrow d)$.

Combien de littéraux ? Combien de clauses ?

EXERCICE

Mettre sous FNC : $a \rightarrow (b \wedge c \wedge d)$.
Combien de littéraux ? Combien de clauses ?

RÉSOLUTION (LE RETOUR)

Règle de résolution

$$\frac{\begin{array}{lcl} & \text{résolution} & \\ A & \vee & p \\ \neg p & \vee & B \end{array}}{\begin{array}{lcl} A & \vee & B \end{array}}$$

Résolution par réfutation :

1. Conversion de tous les énoncés en FNC.
2. Négation de la conclusion.
3. Application de la règle de résolution jusqu'à :
   - Obtention (dérivation) d'une contradiction.
   - Impossibilité d'appliquer la règle.

Énoncés : $a \vee b, a \rightarrow c, b \rightarrow c$.
Conclusion : c. Écrire la résolution.

Énoncés : $(a \to b) \to b, \neg c \to (\neg a \wedge b), (c \to d) \to \neg(d \to b)$.
Conclusion : c. Écrire la résolution.

Énoncés : $(a \rightarrow b) \rightarrow b, \neg c \rightarrow (\neg a \wedge b), (c \rightarrow d) \rightarrow \neg(d \rightarrow b)$.

Conclusion : c. Écrire la résolution.