Formalismes de Représentation et Raisonnements

Maria Boritchev

27 Mars 2019

Le sujet (recto-verso) comprend 2 pages d'énoncés et 2 pages d'annexes. L'examen dure 2 heures. L'usage d'une feuille d'aide A4 recto-verso est autorisé. Tout autre document est interdit. Un barème indicatif vous est donné, il est susceptible de changer à la correction.

1 Logique propositionnelle – 6 pts

Soient p, q, r des variables propositionnelles.

1. (a) Cette formule est-elle valide ? Justifier.

$$((p \to q) \to p) \to p \qquad \text{(Loi de Pierce)}$$

   (b) Prouver l'équivalence suivante.

$$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)) \equiv p \qquad \text{(Équation de Huntington)}$$

2. Soit l'ensemble des formules suivant :

$$\neg a \vee \neg b \vee c \tag{1}$$
$$\neg d \vee \neg f \vee g \tag{2}$$
$$\neg b \vee d \tag{3}$$
$$\neg a \vee \neg c \vee \neg d \vee e \tag{4}$$
$$\neg b \vee \neg c \vee \neg e \vee f \tag{5}$$

   (a) Pour chacune de ces formules, justifier s'il s'agit d'une clause de Horn.

   (b) Peut-on déduire e en partant de la base de faits $\{a, b\}$ en suivant l'algorithme de chaînage avant ?

   (c) Est-ce que g fait partie de la base de faits saturée en suivant l'algorithme de chaînage avant ?

2 Logique du premier ordre – 6 pts

1. Soit la formule du calcul des prédicats suivante :

$$F = \big(\forall x \exists y\, R(f(x), f(y))\big) \wedge \big((\forall z\, R(x, z)) \rightarrow S(x)\big)$$

   (a) Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.

   (b) Donner tous les prédicats et toutes les fonctions, avec leurs arités, qui apparaissent dans la formule.

   (c) Effectuer, étape par étape, la substitution $F[f(z)/x]$.

2. Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{a, P, f\}$ où a est une constante, P un prédicat binaire et f une fonction unaire. Proposer un modèles pour chacune des formules suivantes (les modèles peuvent être différents pour chacune des formules) :

$$F = \forall x \forall y\, \big(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)\big) \tag{1}$$

$$G = \forall x\, \neg P(x, a) \tag{2}$$

$$H = \forall x \forall y\, \big(P(x, f(y)) \rightarrow P(x, y)\big) \tag{3}$$

3 Déduction naturelle – 5pts

Soient p, q, r des variables propositionnelles. A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \perp)$
2. $\big((p \wedge q) \rightarrow r\big) \rightarrow \big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big)$

4 Résolution en logique des prédicats – 5pts (3 + 2 bonus)

Soient le prédicat r d'arité 2 et les variables x, y, z. On définit les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x\, \Big(\big(\exists y\, \neg r(x, y)\big) \rightarrow \exists y\, \big(r(x, y) \wedge r(y, x)\big)\Big)$$

$$\phi_2 = \forall xyz\, \big(r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)\big)$$

$$\phi = \forall x\, r(x, x)$$

En appliquant la règle de résolution de la logique des prédicats, montrer que $\phi_1, \phi_2, \vdash \phi$. Vous prendrez soin d'expliquer et de détailler toutes les étapes de votre démonstration (la mise sous forme normale et les applications de la règle de résolution).

Annexes

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \bot}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux* (*ex falso*) :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\to I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \to q}$$

Élimination de l'*implication* (*modus ponens*) :

$$\to E \quad \frac{\Gamma \vdash p \to q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F \qquad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).

Soient $(s,t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x,t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg\forall x\ \phi$	$\exists x\ \neg\phi$
$\neg\exists x\ \phi$	$\forall x\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \vee \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\exists x\ \phi \vee \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \wedge \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\exists x\ \phi \wedge \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x\ \phi'$	$\forall x'\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x\ \phi'$	$\exists x'\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\forall x\ \phi \rightarrow \phi'$	$\exists x'\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$\exists x\ \phi \rightarrow \phi'$	$\forall x'\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Résolution en logique des prédicats :

1. Contraposée de la conclusion.
2. Mise sous forme normale de la logique des prédicats.
3. Substitution et résolution.