Composer les substitutions suivantes (calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$) :

1. σ_1 : [x/y]
   σ_2 : [y/x]
2. σ_1 : [h(y)/y, h(y)/z]
   σ_2 : [y/x, y/z, f(z)/w]
3. σ_1 : [f(g(x))/x, y/u, a/y]
   σ_2 : [f(g(x))/x, g(x)/y, a/z]
4. σ_1 : [b/y, a/x, y/z]
   σ_2 : [f(y)/x, z/y]

Modèles

$$F = \exists x\, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

$$F = \exists x \, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 1 $a = -1$, $f(x) = x^2$, $R =$ ‘$=$’.

$$F = \exists x \, R(a, f(x))$$

F est-elle vraie, fausse ?

Interprétation 1 $a = -1$, $f(x) = x^2$, $R =$ '$=$'.

Interprétation 2 $f(x) =$ « père de x », $R(x, y) =$ « x est le frère de y ».

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage prédicatif. Soit D un ensemble non-vide appelé **domaine d'interprétation**. Soit I une fonction qui associe :

- à chaque constante une valeur de D
- à chaque symbole de fonction n-aire une fonction totale de D^n dans D
- à chaque symbole de prédicat n-aire une relation n-aire dans D : un ensemble de n-tuples d'éléments de D

I est appelée **fonction d'interprétation**.

DÉFINITION : MODÈLE

Définition

« Un modèle, c'est juste un environnement où les formules elles marchent ! »

Définition

« Un modèle, c'est juste un environnement où les formules elles marchent ! »

La donnée d'un domaine d'interprétation et de la fonction d'interprétation définit un modèle : $\mathcal{M} = \{D, I\}$.

Soit le modèle défini par le domaine $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$, et la fonction d'interprétation F :

- $F(\text{mia}) = d_1$
- $F(\text{honey-bunny}) = d_2$
- $F(\text{vincent}) = d_3$
- $F(\text{pumpkin}) = d_4$
- $F(\text{client}) = \{d_1, d_2, d_4\}$
- $F(\text{voleur}) = \{d_2, d_3, d_4\}$
- $F(\text{aime}) = \{(d_2, d_4)\}$

1. Donner un dessin simple de ce modèle.
2. Les deux énoncés suivants sont-ils vrais dans ce modèle ? Expliquer.
   a. $\exists x.\text{aime}(x, \text{vincent})$
   b. $\exists x \exists y(\text{voleur}(x) \wedge \text{client}(y) \wedge \text{aime}(x, y))$

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{P, f\}$ où P est un prédicat binaire et f une fonction unaire, et l'interprétation suivante :

Domaine : l'ensemble $\mathcal{H}$ des êtres humains,

$P(x, y)$ **:** « x est père de y »,

$f(x)$ **:** « frère de x ».

Lesquelles des formules ci-dessous sont satisfaites dans le modèle $\mathcal{M} = \{\mathcal{H}, \text{« être père de »}, \text{« frère de »}\}$?

1. $F = \forall x \forall y \left(P(x, y) \to P(x, f(y))\right)$
2. $G = \forall x \forall y \left(P(x, y) \to \neg P(y, x)\right)$
3. $H = \forall x \forall y \forall z \left((P(x, y) \land P(y, z)) \to P(x, z)\right)$

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{a, P, f\}$ où a est une constante, P un prédicat binaire et f une fonction unaire. Proposer un ou plusieurs modèles pour chacune des formules suivantes :

1. $F = \forall x \forall y \left(P(x, y) \vee P(y, x)\right)$
2. $G = \forall x\, P(x, f(x))$
3. $H = \forall x \forall y \left(P(x, f(y)) \rightarrow P(x, y)\right)$

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? OUI, avec $\sigma = [rouge/y]$.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de $f(g(x, y), h(verte, x))$?

- $f(g(x, rouge), h(verte, x))$? OUI, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- $f(g(f(x), y), h(verte, y))$? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? OUI, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [\text{rouge}/\text{y}]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? **NON**, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? OUI, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? NON, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? NON, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.
- f(g(x, rouge), h(verte, x, rouge)) ?

Définition

Les instances d'un terme t sont les termes qui dérivent de t par l'application d'une substitution σ (on note cette application t_σ).

Exemple

Instances de f(g(x, y), h(verte, x)) ?

- f(g(x, rouge), h(verte, x)) ? **OUI**, avec $\sigma = [rouge/y]$.
- f(g(f(x), y), h(verte, y)) ? **NON**, parce que x n'est pas substituée par la même chose dans chaque sous-terme.
- f(h(x, rouge), h(verte, x)) ? **NON**, parce qu'on ne peut pas substituer autre chose qu'une variable.
- f(g(x, rouge), h(verte, x, rouge)) ? **NON**, car l'arité n'est pas la même.

Entrée : deux termes t et u

Sortie : si σ existe, σ telle que $t_\sigma = u_\sigma$

Exemple

$t = f(t_1, ..., t_k)$ et $u = g(u_1, ..., u_{k'})$?

- Si $f \neq g$, il est impossible de trouver σ.
- Si $f = g$ (et donc $k = k'$), il faut trouver un σ tel que $s_1\sigma = t_1\sigma$, $s_2\sigma = t_2\sigma, \ldots$

Algorithme d'unification (voir document en ligne).