DÉDUCTION NATURELLE

PRINCIPE

On démontre en construisant des **arbres d'inférence** grâce à l'application de **règles d'inférence** (voir feuille). Un seul axiome : $\Gamma, p \vdash p$, où Γ est l'**antécédent**, un ensemble de prédicats appelés **hypothèses**, et p, q sont des prédicats.

Introduction de l'implication :

$$\to I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \to q}$$

Élimination de l'implication (modus ponens) :

$$\to E \quad \frac{\Gamma \vdash p \to q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Élimination du faux (du faux, on peut tout déduire) :

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction du et :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du et à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du et à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du ou à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee\mathrm{I}_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du ou à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee\mathrm{I}_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du ou :

$$\vee\mathrm{E} \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Montrer : $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$.

Montrer :

1. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$;
2. $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$;
3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$.

Qu'est ce qui manque ?

Introduction du quantificateur universel :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est libre dans } \Gamma$$

Élimination du quantificateur universel :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du quantificateur existentiel :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\, F(x)}$$

Élimination du quantificateur existentiel :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\, F \qquad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$

Montrer : $\forall x\,(F(x) \land G(x)) \vdash (\forall x\, F(x)) \land (\forall x\, G(x))$.

Montrer : $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x\,(F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))$.