Résolution en logique des prédicats

MODUS PONENS, AGAIN

Modus ponens :

$$\frac{\neg p \vee q \qquad p}{q}$$

MODUS PONENS, AGAIN

Modus ponens :

$$\frac{\neg p \lor q \qquad p}{q}$$

Règle de résolution :

$$\frac{\neg p \lor L_1 \lor \ldots \lor L_m \qquad p \lor M_1 \lor \ldots \lor M_n}{L_1 \lor \ldots \lor L_m \lor M_1 \lor \ldots \lor M_n}$$

Soit un prédicat « chemin » (c) d'arité 2, une fonction « voisin » (v) d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici » (i). On définit les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x.\ c(x, v(x))$$
$$\phi_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ (c(x, z) \land c(z, y) \rightarrow c(x, y))$$
$$\phi = \exists a.\ c(i, v(v(a)))$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

1. Mettre les quantificateurs au début de la formule : mise sous **forme prénexe**
2. Supprimer les quantificateurs existentiels ($\exists$) : **skolémisation**
3. Passer en **forme normale conjonctive**

Définition

Une formule F est en **forme prénexe** lorqu'elle est de la forme $F = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . \, \phi$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ pour $i \in \mathbb{N}$
- ϕ est une formule ne contenant pas de quantificateurs

Définition

Une formule F est en forme prénexe lorqu'elle est de la forme $F = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.\, \phi$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ pour $i \in \mathbb{N}$
- ϕ est une formule ne contenant pas de quantificateurs

À partir d'une formule F, on peut construire une formule F' sémantiquement équivalente qui soit sous forme prénexe.

La formule	se transforme en
$\neg(\forall x.\ \phi)$	$\exists x.\ \neg\phi$
$\neg(\exists x.\ \phi)$	$\forall x.\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

ATTENTION

On effectue éventuellement un renommage (de x vers x’) pour éviter la capture de variables libres.
Attention au quantificateur à gauche d’un $\rightarrow$.

Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :

1. $\big(P(a) \vee P(b)\big) \rightarrow \exists x.\ P(x)$
2. $\big(\forall x.\ P(x)\big) \rightarrow (\forall x.\ P(x))$
3. $\forall x.\ \forall y.\ \Big[(P(x) \rightarrow P(y)) \rightarrow \Big((\exists x.\ P(x)) \rightarrow (\forall x.\ P(x))\Big)\Big]$

ATTENTION

Le résultat peut varier selon l'ordre d'application des règles.
Cela peut changer la difficulté de prouver/réfuter la forme prénexe : $\forall x.\exists y.\phi$ est plus facile à prouver (mais plus difficile à réfuter) que $\exists y.\forall x.\phi$.

Définition

Une formule F est en sous forme normale de Skolem lorsqu'elle est en forme prénexe et $Q_i = \forall$ pour $i \in \mathbb{N}$.

$$\forall x.\exists y.\ p(x, y)$$

$$\forall x. \exists y.\ p(x, y)$$

« pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ »

PRINCIPE

$$\forall x. \exists y.\ p(x, y)$$

« pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$ »

On peut définir une fonction f qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que $p(x, y)$ est vrai. On a alors :

$$\forall x.\ p(x, f(x))$$

S’il y a plusieurs quantificateurs universels, la fonction dépend de toutes les variables qui viennent avant la variable liée au quantificateur existentiel dans la formule.

En général, la formule skolémisée n’est pas équivalente à la formule d’origine, mais l’une est satifiable si et seulement si l’autre l’est (d’où l’utilisation des formes normales de Skolem dans la résolution).

Mettre sous forme normale de Skolem les formules suivantes :

1. $\exists x.\ \big(P(a) \vee P(b) \to P(x)\big)$
2. $\forall x.\ \exists y.\ \big(P(y) \to P(x)\big)$
3. $\exists y.\ \forall x.\ \big(P(y) \to P(x)\big)$
4. $\exists x.\ \exists y.\ \forall z.\ \forall t.\ \Big(\big(P(x) \to P(y)\big) \to P(z) \to P(t)\Big)$

1. Élimination des implications.
    - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
    - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
2. Distribution des négations (lois de De Morgan)
    - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
    - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
3. Distribution des disjonctions (OU) sur les conjonctions (ET)
    - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

RÉSOLUTION EN LOGIQUE DES PRÉDICATS

- Règle de résolution :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

- Mise sous forme normale (logique des prédicats)
  - Mise sous forme prénexe
  - Mise sous forme normale de Skolem
  - Mise sous forme normale conjonctive

Soit un prédicat « chemin » (c) d'arité 2, une fonction « voisin » (v) d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici » (i). On définit les formules suivantes :

$$\phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big)$$
$$\phi_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \rightarrow c(x,y)\Big)$$
$$\phi = \exists a.\ c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.