Formalismes de Représentation et Raisonnements

Corrigé – Examen 2018

1 Logique propositionnelle

1.a)

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \wedge r$	$\neg p$	$\neg p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1

La quatrième et la dernière colonne de la table de vérité sont identiques, ce qui prouve l'équivalence.

1.b)

$$\Big(\big((p \to q) \to p\big) \wedge (q \to r)\Big) \to r \equiv \Big(\big((\neg p \vee q) \to p\big) \wedge (\neg q \vee r)\Big) \to r$$
$$\equiv \Big(\big(\neg(\neg p \vee q) \vee p\big) \wedge (\neg q \vee r)\Big) \to r \equiv \neg\Big(\big((p \wedge \neg q) \vee p\big) \wedge (\neg q \vee r)\Big) \vee r$$
$$\equiv \Big(\neg\big((p \wedge \neg q) \vee p\big) \vee (\neg q \vee r)\Big) \vee r \equiv \Big(\big(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg p\big) \vee (\neg q \vee r)\Big) \vee r$$
$$\equiv \big((\neg p \vee q) \wedge \neg p\big) \vee (\neg q \vee r) \vee r$$

On pose $P = (\neg q \vee r) \vee r$ et $Q \wedge R = \big((\neg p \vee q) \wedge \neg p\big)$, puis on applique l'équivalence $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

$$\equiv \big((\neg p \vee q) \wedge \neg p\big) \vee (\neg q \vee r) \vee r \equiv \Big((\neg q \vee r) \vee r \vee (\neg p \vee q)\Big) \wedge \Big((\neg q \vee r) \vee r \vee \neg p\Big)$$

1.c) Une formule est valide si et seulement si pour toutes les interprétations, la formule est vraie.

p	q	r	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee r$	$(\neg q \vee r) \vee r \vee (\neg p \vee q)$	$(\neg q \vee r) \vee r \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

La formule est donc invalide car elle est fausse si $p = 1, q = 1, r = 0$.

2.a) Base de règles :

$$R1 : (C \wedge D) \rightarrow F$$
$$R2 : (F \wedge B) \rightarrow E$$
$$R3 : (G \wedge F) \rightarrow B$$
$$R4 : (A \wedge F) \rightarrow G$$

Base de faits : $\{A, C, D\}$.

Une clause de Horn est une clause comportant au plus un littéral positif ; une fois les équivalences faites, toutes les règles de la base de règles sont de la forme $\neg C \vee \neg D \vee F$, donc comportent un seul littéral positif.

2.b)

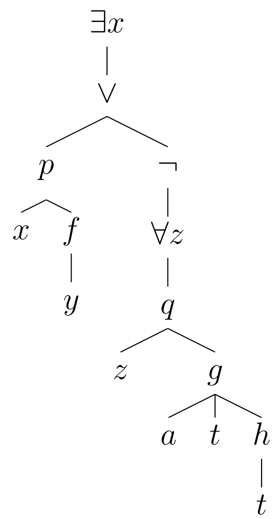
$$\textbf{1 :}\ R1 + C + D \Rightarrow F$$
$$\textbf{2 :}\ R4 + A + F \Rightarrow G$$
$$\textbf{3 :}\ R3 + G + F \Rightarrow B$$
$$\textbf{4 :}\ R2 + F + B \Rightarrow E$$

On arrive à déduire E en suivant l'algorithme de chaînage avant, donc Émilie vient.

2.c) À la fin de l'execution de l'étape **4**, plus aucune règle ne peut être appliquée. La base de faits $\{A, C, D, F, G, B, E\}$ est donc saturée et $G =$ Gaëlle en fait partie.

2 Logique du premier ordre

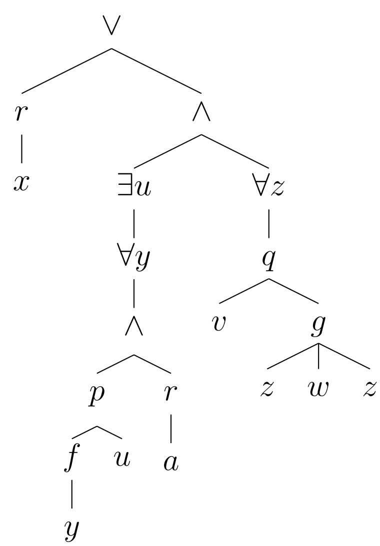
1 Représentation de F :



ERRATUM : dans la formule G, $\exists y$ est en fait un $\exists u$. Cette erreur n'a pas beaucoup d'impact sur le reste de l'exercice. La correction continue avec

$$G = r(x) \vee ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

Représentation de G :



2 Les variables colorées sont liées aux quantificateurs de la même couleur. Les variables libres sont en noir et gras.

$$F = \exists \boldsymbol{x}.\ p(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) \vee \neg \forall \boldsymbol{z}.\ q(\boldsymbol{z}, g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}, h(\boldsymbol{t})))$$
$$G = r(\boldsymbol{x}) \vee ((\exists \boldsymbol{u}.\ \forall \boldsymbol{y}.\ p(f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{u}) \wedge r(\boldsymbol{a})) \wedge \forall \boldsymbol{z}.\ q(\boldsymbol{v}, g(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})))$$

3 Pour F : p est un prédicat d'arité 2, f est une fonction d'arité 1, q est un prédicat d'arité 2, g est une fonction d'arité 3, h est une fonction d'arité 1.

Pour G : r est un prédicat d'arité 1, p est un prédicat d'arité 2, f est une fonction d'arité 1, q est un prédicat d'arité 2, g est une fonction d'arité 3.

4 Résolution : On commence avec $\mathcal{U} = \Big\{ \Big(s, t\Big) \Big\} = \Big\{ \Big(f\big(g(v), h(u, v)\big), f\big(g(w), h(w, j(x, w))\big)\Big) \Big\}$ et $\sigma = [\,]$.

On ne peut pas appliquer `suppression`, car $f\big(g(v), h(u, v)\big) \neq f\big(g(w), h(w, j(x, w))\big)$. Comme $f\big(g(v), h(u, v)\big)$ et $f\big(g(w), h(w, j(x, w))\big)$ sont le résultat de l'application de la même fonction f au même nombre d'arguments (2 arguments), on peut appliquer la `décomposition`.

1 – Décomposition On supprime $\Big(f\big(g(v), h(u, v)\big), f\big(g(w), h(w, j(x, w))\big)\Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ les couples $\Big(g(v), g(w)\Big)$ et $\Big(h(u, v), h(w, j(x, w))\Big)$.

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{ \Big(g(v), g(w)\Big), \Big(h(u, v), h(w, j(x, w))\Big) \Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(g(v), g(w)\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $g(v) \neq g(w)$. Comme $g(v)$ et $g(w)$ sont le résultat de l'application de la même fonction g au même nombre d'arguments (1 argument), on peut appliquer la `décomposition`.

2 – Décomposition On supprime $\Big(g(v), g(w)\Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ le couple $\Big(v, w\Big)$. Comme $\mathcal{U}$ est modélisé par une file, on ajoute le nouveau couple à la suite des couples déjà présents dans $\mathcal{U}$ (on ajoute donc « par la droite »).

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{ \Big(h(u, v), h(w, j(x, w))\Big), \Big(v, w\Big) \Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(h(u, v), h(w, j(x, w))\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $h(u, v) \neq h(w, j(x, w))$. Comme $h(u, v)$ et $h(w, j(x, w))$ sont le résultat de l'application de la même fonction h au même nombre d'arguments (2 arguments), on peut appliquer la `décomposition`.

3 – Décomposition On supprime $\Big(h(u, v), h(w, j(x, w))\Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ les couples $\Big(u, w\Big)$ et $\Big(v, j(x, w)\Big)$.

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{ \Big(v, w\Big), \Big(u, w\Big), \Big(v, j(x, w)\Big) \Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(v, w\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $v \neq w$. Comme v et w ne sont pas le résultat de l'application de la même fonction, on ne peut pas appliquer la `décomposition`. Comme v est une variable, $w \neq v$, v n'est pas déjà modifié par σ (car $\sigma = [\,]$), et v n'apparait pas dans $\sigma(w) = w$, on peut appliquer `association`.

4 – Association On met à jour σ par $[\sigma(w)/v] \circ \sigma$.

$$\sigma := [\sigma(w)/v] \circ \sigma = [w/v] \circ [\,] = [w/v]$$

On supprime le couple $\Big(v, w\Big)$ de $\mathcal{U}$, puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant le nouveau σ.

$$\mathcal{U} = \Big\{\sigma\Big(u, w\Big), \sigma\Big(v, j(x, w)\Big)\Big\} = \Big\{\Big(u, w\Big), \Big(w, j(x, w)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(u, w\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $u \neq w$. Comme u et w ne sont pas le résultat de l'application de la même fonction, on ne peut pas appliquer la `décomposition`. Comme u est une variable, $w \neq u$, u n'est pas déjà modifié par σ, et u n'apparait pas dans $\sigma(w) = w$, on peut appliquer `association`.

5 – Association On met à jour σ par $[\sigma(w)/u] \circ \sigma$.

$$\sigma := [\sigma(w)/u] \circ \sigma = [w/u] \circ [w/v] = [w/v, w/u]$$

On supprime le couple $\Big(u, w\Big)$ de $\mathcal{U}$, puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant le nouveau σ.

$$\mathcal{U} = \Big\{\sigma\Big(w, j(x, w)\Big)\Big\} = \Big\{\Big(w, j(x, w)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(w, j(x, w)\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $w \neq j(x, w)$. Comme w et $j(x, w)$ ne sont pas le résultat de l'application de la même fonction, on ne peut pas appliquer la `décomposition`. Comme w apparait dans $\sigma(j(x, w)) = j(x, w)$, on ne peut pas appliquer `association`. Comme w n'est pas modifié par σ, on ne peut pas appliquer `fusion`. Aucune étape ne peut s'appliquer ; les termes ne sont donc pas unifiables.

3 Deduction naturelle

1

$$
\wedge I\;\dfrac{
\to I\;\dfrac{
\wedge E_g\;\dfrac{
\to E\;\dfrac{
Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p \to (q \wedge r)} \qquad Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p}
}{\Gamma \vdash q \wedge r}
}{\Gamma = p \to (q \wedge r), p \vdash q}
}{p \to (q \wedge r) \vdash p \to q}
\qquad
\to I\;\dfrac{
\wedge E_g\;\dfrac{
\to E\;\dfrac{
Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p \to (q \wedge r)} \qquad Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p}
}{\Gamma \vdash q \wedge r}
}{\Gamma = p \to (q \wedge r), p \vdash q}
}{p \to (q \wedge r) \vdash p \to q}
}{p \to (q \wedge r) \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)}
$$

2

$$
\to I\;\dfrac{
\to E\;\dfrac{
\wedge E_g\;\dfrac{
Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash (p \to r) \wedge (q \to r)}
}{\Gamma \vdash p \to r}
\qquad
\wedge E_g\;\dfrac{
Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p \wedge q}
}{\Gamma \vdash p}
}{\Gamma = (p \to r) \wedge (q \to r), (p \wedge q) \vdash r}
}{(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r}
$$

4 Resolution en logique des predicats

Pour démontrer ϕ, on raisonne par l'absurde.

1 – Contraposée On s'intéresse donc aux formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ p(x) \to q(x,c) \\
\phi_2 &= \forall x. \exists y.\ ((r(x) \vee \neg p(y)) \to s(x,y)) \\
\phi_3 &= \forall x.\ p(x) \\
\neg\phi &= \exists x. \Big(r(x) \wedge \forall y. \big(\neg s(x,y) \vee \neg b(y,c) \big) \Big)
\end{aligned}$$

En appliquant la règle de résolution en logique des prédicats, on cherche à aboutir à une contradiction. Pour pouvoir appliquer cette règle, il faut mettre les formules sous forme normale.

2 – Mise sous forme normale

a) Mise sous forme prénexe La forme prénexe d'une formule F est une formule F' équivalente telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F'. ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 **sont déjà sous forme prénexe**. En rouge et en bleu, la subdivision en sous-formules de $\neg\phi$ pour la mise sous forme prénexe grâce au tableau des équivalences.

$$\neg\phi = \exists x. \Big(r(x) \wedge \forall y. \big(\neg s(x,y) \vee \neg b(y,c) \big) \Big) \equiv \exists x.\ \forall z.\ \Big(r(x) \wedge \big(\neg s(x,z) \vee \neg b(z,c) \big) \Big)$$

b) Mise sous forme normale de Skolem La forme normale de Skolem d'une formule F est une formule F' telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F' et sont tous des quantificateurs universels. ϕ_1 et ϕ_3 **sont déjà sous forme normale de Skolem**.

ϕ_2 : on définit une fonction f d'arité 1 qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que

$$((r(x) \vee \neg p(f(x))) \to s(x, f(x)))$$

est vraie. On a alors :

$$\forall x.\ ((r(x) \vee \neg p(f(x))) \to s(x, f(x)))$$

que l'on va appeler F_2.
$\neg\phi$: on définit une constante k telle que $\forall z.\ \Big(r(k) \wedge \big(\neg s(k,z) \vee \neg b(z,c) \big) \Big)$ est vraie. On appelle cette formule F_4.

c) Mise sous forme normale conjonctive ϕ_3 est déjà sous forme normale conjonctive, il s'agit d'une conjonction de disjonctions (0 conjonctions, 0 disjonctions).

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ p(x) \to q(x,c) \equiv \forall x.\ \neg p(x) \vee q(x,c) \\
F_2 &= \forall x.\ \Big(\big(r(x) \vee \neg p(f(x))\big) \to s(x,f(x))\Big) \\
&\equiv \forall x.\ \Big(\neg\big(r(x) \vee \neg p(f(x))\big) \vee s(x,f(x))\Big) \\
&\equiv \forall x.\ \Big(\big(\neg r(x) \wedge p(f(x))\big) \vee s(x,f(x))\Big)
\end{aligned}
$$

On pose $P = s\big(x, f(x)\big)$ et $Q \wedge R = \neg r(x) \wedge p\big(f(x)\big)$, puis on applique l'équivalence $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

$$
F_2 = \forall x.\ \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee \neg r(x)\Big) \wedge \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee p\big(f(x)\big)\Big)
$$

F_4 est déjà sous forme normale conjonctive. On sépare F_2 en F_5, F_6 et F_4 en F_7, F_8. Voici les formules que l'on considère maintenant :

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \phi_1 = \forall x.\ \Big(\neg p(x) \vee q(x,c)\Big) \\
F_3 &= \phi_3 = \forall x.\ p(x) \\
F_5 &= \forall x.\ \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee \neg r(x)\Big) \\
F_6 &= \forall x.\ \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee p\big(f(x)\big)\Big) \\
F_7 &= \forall z.\ r(k) \\
F_8 &= \forall z.\ \Big(\neg s(k,z) \vee \neg q(z,c)\Big)
\end{aligned}
$$

On cherche à appliquer la règle de résolution en logique des prédicats pour combiner ces formules et aboutir à une contradiction. Afin de pouvoir combiner les formules, il faut procéder à des substituions judicieuses.

3 – Substitution et résolution *Par application de la règle de résolution* à F_1 et F_3, on a :

$$
\forall x.\ q(x,c) = F_9
$$

Soit u une variable fraîche.

$$
\begin{aligned}
F_9[u/x] &= \forall u.\ q(u,c) \\
F_8[u/z] &= \forall u.\ \Big(\neg s(k,u) \vee \neg q(u,c)\Big)
\end{aligned}
$$

Par application de la règle de résolution on a :

$$
\forall u.\ \neg s(k,u) = F_{10}
$$

Maintenant :

$$F_5[k/x] = s\big(k, f(k)\big) \vee \neg r(k)$$

Par application de la règle de résolution avec F_7 on a :

$$s\big(k, f(k)\big)$$

Ce qui entre en contradiction avec $F_{10}[f(k)/u] = \neg s(k, f(k))$. Ainsi, $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \vdash \phi$.