

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Déduction naturelle – Exercices & corrigés

Exercice 1 Montrer, à l'aide des règles de la déduction naturelle :

$$\forall x. (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x. F(x)) \wedge (\forall x. G(x))$$

Exercice 2 Montrer, à l'aide des règles de la déduction naturelle :

$$\forall x. (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x. (F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))$$

Correction – exercice 1

$$\begin{array}{c}
 \forall I \text{ car } x \text{ lié dans } \Gamma \\
 \wedge E_g \\
 \frac{\forall E}{\Gamma \vdash \forall x. (F(x) \wedge G(x))} \\
 \frac{\wedge E_d}{\Gamma \vdash F \wedge G} \\
 \frac{\forall I}{\Gamma \vdash F} \\
 \frac{\forall E}{\Gamma \vdash \forall x. F(x)} \\
 \frac{Ax}{\Gamma \vdash \forall x. (F(x) \wedge G(x))} \\
 \frac{\forall E}{\Gamma \vdash F \wedge G} \\
 \frac{Ax}{\Gamma \vdash \forall x. (F(x) \wedge G(x))} \\
 \frac{\wedge E_d}{\Gamma \vdash G} \\
 \frac{\forall E}{\Gamma \vdash \forall x. G(x)} \\
 \frac{\Gamma = \forall x. (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x. F(x)) \wedge (\forall x. G(x))}{\Gamma \vdash \forall x. G(x)}
 \end{array}$$

Correction – exercice 2

$$\begin{array}{c}
 \forall I \text{ car } x \text{ est lié dans } \Gamma \\
 \rightarrow I \\
 \frac{\forall I_g}{\rightarrow E} \\
 \frac{Ax}{\Gamma, F \vdash \forall x. (F(x) \rightarrow G(x))} \\
 \frac{\forall E}{\Gamma, F \vdash F \rightarrow G} \\
 \frac{\rightarrow E}{\Gamma, F \vdash G} \\
 \frac{\forall I_g}{\Gamma, F \vdash G \vee H} \\
 \frac{\rightarrow E}{\Gamma \vdash F \rightarrow (G \vee H)} \\
 \frac{Ax}{\Gamma, F \vdash F} \\
 \frac{\forall E}{\Gamma = \forall x. (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x. (F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))} \\
 \frac{\rightarrow E}{\Gamma \vdash \forall x. (F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))}
 \end{array}$$