Formalismes de Représentation et Raisonnements

Exercices et exemples de cours

1 Chaînages

Soient les bases de règles et de faits suivantes :
Base de règles :

R1 : si Bénédicte et Denis et Etienne viennent alors Farida vient

R2 : si Gérard et Denis viennent alors Amélie vient

R3 : si Coralie et Farida viennent alors Amélie vient

R4 : si Bénédicte vient alors Xavier vient

R5 : si Xavier et Amélie viennent alors Herman vient

R6 : si Coralie vient alors Denis vient

R7 : si Xavier et Coralie viennent alors Amélie vient

R8 : si Xavier et Bénédicte viennent alors Denis vient

Base de faits = {Bénédicte , Coralie}

1. Est-ce que les règles de la base de régles sont sous forme de clause de Horn ?
2. Saturer la base de faits avec les règles en suivant l'algorithme de chaînage avant (on détermine quelles sont les personnes à inviter absolument si Bénédicte et Coralie sont invitées).
3. Herman fait-il partie de la base de faits saturée ?

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Exercices et exemples de cours (2)

2 Chaînage Arrière

On considère l'algorithme de chaînage arrière ci-dessous. Cet algorithme peut boucler dans certains cas. Donner un exemple de tels cas et modifier l'algorithme de façon à ce que son arrêt soit assuré (tout en gardant sa correction !).

```
Algorithme BC(K,Q) // chaînage arrière
 // Donnée : K = (BF,BR) et Q une liste d'atomes
 // Remarque : on voit un fait A comme une règle -> A (hypothèse vide)
 // Résultat : vrai ssi Q peut être produit par application
 // des règles de BR sur BF (mais l' algorithme
 // peut ne pas s'arrêter)


Début
  Si Q = vide alors retourner vrai
       Pour toute règle R = H1 /\ ... /\ Hn -> C de BR et BF
              telle que C = premier(Q)
              // premier(Q) = premier atome de la liste Q
                     Q' <- Concaténer [H1 ... Hn] et reste(Q)
                     // reste(Q) = Q privé de son 1er atome
                     Si BC(K,Q') = vrai alors retourner vrai
       FinPour
       Retourner faux
Fin
```

3 Écriture en LPO

Traduire les énoncés ci-dessous en LPO en utilisant les symboles de prédicats suivants :

$m(x)$	:	x *est méchant*
$chat(x)$	:	x *est un chat*
$a(x,y)$	:	x *aime* y
$co(x,y)$	:	x *connait* y
$p(x)$	:	x *est une personne*

1. Il existe une personne méchante.
2. Il n'existe pas de personne méchante.

3. Toutes les personnes sont méchantes.
4. Seules les personnes sont méchantes.
5. Les personnes qui aiment les chats ne sont pas méchantes.
6. Toute personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.
7. Il y a des personnes qui n'aiment pas les chats.

4 Modèles

Soit le langage $\mathcal{L}$ construit sur $\{a, P, f\}$ où a est une constante, P un prédicat binaire et f une fonction unaire. Proposer un ou plusieurs modèles pour chacune des formules suivantes :

1. $F = \forall x \forall y \; \big(P(x, y) \vee P(y, x)\big)$
2. $G = \forall x \; P(x, f(x))$
3. $H = \forall x \forall y \; \big(P(x, f(y)) \rightarrow P(x, y)\big)$

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Devoir Maison facultatif (à rendre pour le 02/03/2020)

1 Chaînages

Soient les bases de règles et de faits suivantes :
Base de règles :

R1 : si Pierre vient, alors Juliette vient

R2 : si Laurine et Maria viennent, alors Pierre vient

R3 : si Titouan et Laurine viennent, alors Maria vient

R4 : si Nicolas et Pierre viennent, alors Laurine vient

R5 : si Nicolas et Titouan viennent, alors Laurine vient

Base de faits = {Nicolas, Titouan} (On sait que Nicolas et Titouan viennent.)

1. Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?
2. Laurine fait-elle partie de la base de faits saturée en suivant l'algorithme de chaînage avant ?
3. Montrer que Juliette vient en suivant l'algorithme de chaînage avant.

2 Écriture en logique du premier ordre

Soient les propositions suivantes :

a. Tous les invités ont pris au moins un fromage ou un dessert.
b. Tous les invités qui ont pris un dessert ont pris un café.
c. Les invités qui ont pris un café n'ont pas tous pris un dessert.

Traduire ces suppositions en logique des prédicats en utilisant les symboles de prédicats suivants : $f(x)$ (x a pris du fromage), $d(x)$ (x a pris du dessert), $c(x)$ (x a pris du café).

3 Substitutions

Soit $F = \forall x\Big(u\big(h(x,y), g(y), z\big)\Big) \vee \Big(\forall y \exists z\big(v(y,z) \rightarrow w(x,y,z)\big)\Big)$.

1. Quelles sont les variables libres de F ?
2. $F[f(x,y,z)/x]$?
3. $F[t(x,y)/y]$

4 Algorithme d'unification

Soient $s = f(a, x, h(g(z)))$ et $t = f(z, h(y), h(y))$ deux termes, avec x, y, z, a des variables du langage prédicatif.

1. Appliquer l'algorithme d'unification à $\mathcal{U} = \{s, t\}$. Dérouler l'algorithme de manière détaillée ; en particulier, rédiger entièrement la justification pour les étapes *association* et *fusion*.
2. Si l'exécution de l'algorithme indique que s et t sont unifiables, écrire le résultat de s_σ et t_σ (où t_σ est l'application de la substitution σ au terme t).
3. Conclure.

Soient $s = f(g(x), g(y), z)$ et $t = f(z, x, g(a))$ deux termes, avec x, y, z, a des variables du langage prédicatif.

1. Appliquer l'algorithme d'unification à $\mathcal{U} = \{s, t\}$. Dérouler l'algorithme de manière détaillée ; en particulier, rédiger entièrement la justification pour les étapes *association* et *fusion*.
2. Si l'exécution de l'algorithme indique que s et t sont unifiables, écrire le résultat de s_σ et t_σ (où t_σ est l'application de la substitution σ au terme t).
3. Conclure.

Soient $s = f(g(v), h(u, v))$ et $t = f(g(w), h(w, j(x, w)))$ deux termes, avec u, v, w, x des variables du langage prédicatif.

1. Appliquer l'algorithme d'unification à $\mathcal{U} = \{s, t\}$. Dérouler l'algorithme de manière détaillée ; en particulier, rédiger entièrement la justification pour les étapes *association* et *fusion*.
2. Écrire le résultat de s_σ et t_σ, où t_σ est l'application de la substitution σ (construite lors de l'exécution de l'algorithme) au terme t.
3. Conclure : s et t sont-ils unifiables ?

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Règles d'inférence de la déduction naturelle

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \bot}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux* (*ex falso*) :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'*implication* (*modus ponens*) :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F \qquad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Révisions

1 Logique propositionnelle

1. Les formules suivantes sont-elles valides ? Justifier.
   (a) $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B)$
   (b) $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee ((A \wedge B) \rightarrow C)$
2. Mettre les formules précédentes sous forme normale conjonctive.
3. Soient les bases de règles et de faits suivantes :

   Base de règles :

   R1 : si Alice vient, alors Claude vient

   R2 : si Benjamin et Claude viennent, alors Émilie vient

   R3 : si Alice et Benjamin et Émilie viennent alors Dominique vient

   R4 : si Claude et Dominique et Émilie viennent alors Fred vient

   Base de faits = {Alice, Benjamin}

   (a) Est-ce que les règles de la base de règles sont sous forme de clause de Horn ?
   (b) Saturer la base de faits avec les règles en suivant l'algorithme de chaînage avant.
   (c) Fred fait-il partie de la base de faits saturée ?

2 Unification

Soient $s = f(a, x, h(g(z)))$ et $t = f(z, h(y), h(y))$ deux termes, avec x, y, z, a des variables du langage prédicatif.

1. Appliquer l'algorithme d'unification à $\mathcal{U} = \{s, t\}$. Dérouler l'algorithme de manière détaillée ; en particulier, rédiger entièrement la justification pour les étapes *association* et *fusion*.
2. Si l'exécution de l'algorithme indique que s et t sont unifiables, écrire le résultat de s_σ et t_σ (où t_σ est l'application de la substitution σ au terme t).
3. Conclure.

3 Déduction naturelle

1. A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :
   (a) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$
   (b) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$
2. Soient les suppositions suivantes :
   i. Tous les invités ont pris au moins un fromage ou un dessert.
   ii. Tous les invités qui ont pris un dessert ont pris un café.
   iii. Les invités qui ont pris un café n'ont pas tous pris un dessert.

   (a) Traduire ces suppositions en logique des prédicats en utilisant les symboles de prédicats suivants : $f(x)$ (x a pris du fromage), $d(x)$ (x a pris du dessert), $c(x)$ (x a pris du café).
   (b) Peut-on en conclure que certains invités ont pris du fromage ? un dessert ? Donner une preuve en déduction naturelle, lorsque c'est possible.

4 Résolution en logique des prédicats

Soient les prédicat p, q, r, s d'arité 1 et des variables 'x', 'y', 'z'. On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \exists x\, p(x) \wedge q(x) \\ \phi_2 &= \forall y\, p(y) \rightarrow (r(y) \wedge s(y)) \\ \phi &= \exists z\, q(z) \wedge s(z) \end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Annexes

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).
Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :
- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg(\forall x.\ \phi)$	$\exists x.\ \neg\phi$
$\neg(\exists x.\ \phi)$	$\forall x.\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Algorithme d'unification – un exemple

Énoncé : Soient f, g, h, n des symboles de fonctions et x, y, z, v des variables. Écrire l'exécution de l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

$$s = f\big(h(x,y), g(x)\big) \text{ et } t = f\big(h(n(y), h(z,z)), v\big)$$

Résolution : $\mathcal{U}$ est une file. On commence avec $\mathcal{U} = \Big\{\Big(s,t\Big)\Big\} = \Big\{\Big(f\big(h(x,y), g(x)\big), f\big(h(n(y), h(z,z)), v\big)\Big)\Big\}$ et $\sigma = [\,]$.

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{\Big(f\big(h(x,y), g(x)\big), f\big(h(n(y), h(z,z)), v\big)\Big)\Big\}$$

On ne peut pas appliquer `suppression`, car $f\big(h(x,y), g(x)\big) \neq f\big(h(n(y), h(z,z)), v\big)$. Comme $f\big(h(x,y), g(x)\big)$ et $f\big(h(n(y), h(z,z)), v\big)$ sont le résultat de l'application de la même fonction f au même nombre d'arguments (2 arguments), on peut appliquer la `décomposition`.

1 – Décomposition On supprime $\Big(f\big(h(x,y), g(x)\big), f\big(h(n(y), h(z,z)), v\big)\Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ les couples $\Big(h(x,y), h(n(y), h(z,z))\Big)$ et $\Big(g(x), v\Big)$.

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{\Big(h(x,y), h\big(n(y), h(z,z)\big)\Big), \Big(g(x), v\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(h(x,y), h\big(n(y), h(z,z)\big)\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $h(x,y) \neq h\big(n(y), h(z,z)\big)$. Comme $h(x,y)$ et $h\big(n(y), h(z,z)\big)$ sont le résultat de l'application de la même fonction h au même nombre d'arguments (2 arguments), on peut appliquer la `décomposition`.

2 – Décomposition On supprime $\Big(h(x,y), h\big(n(y), h(z,z)\big)\Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ les couples $\Big(x, n(y)\Big)$ et $\Big(y, h(z,z)\Big)$. Comme $\mathcal{U}$ est modélisé par une file, on ajoute les nouveaux couples à la suite des couples déjà présents dans $\mathcal{U}$ (on ajoute donc « par la droite »).

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{\Big(g(x), v\Big), \Big(x, n(y)\Big), \Big(y, h(z,z)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(g(x), v\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $g(x) \neq v$. On ne peut pas appliquer `décomposition` car $g(x)$ est le résultat de l'application de la fonction g alors que v est une variable. Comme v est une variable, $g(x) \neq v$, v n'est pas déjà modifié par σ (car $\sigma = [\,]$), et v n'apparait pas dans $\sigma(g(x)) = g(x)$, on peut appliquer `association`.

3 – Association On met à jour σ par $[\sigma(g(x))/v] \circ \sigma$.

$$\sigma := [\sigma(g(x))/v] \circ \sigma = [g(x)/v] \circ [\,] = [g(x)/v]$$

On supprime le couple $\Big(g(x), v\Big)$ de $\mathcal{U}$, puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant le nouveau σ.

$$\mathcal{U} = \Big\{\sigma(x, n(y)), \sigma(y, h(z,z))\Big\} = \Big\{\Big(x, n(y)\Big), \Big(y, h(z,z)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(x, n(y)\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $x \neq n(y)$. On ne peut pas appliquer `décomposition` car $n(y)$ est le résultat de l'application de la fonction n alors que x est une variable. Comme x est une variable, $n(y) \neq x$, x n'est pas déjà modifié par σ, et x n'apparait pas dans $\sigma(n(y)) = n(y)$, on peut appliquer `association`.

4 – Association On met à jour σ par $[\sigma(n(y))/x] \circ \sigma$.

$$\sigma := [\sigma(n(y))/x] \circ \sigma = [n(y)/x] \circ [g(x)/v] = [g(n(y))/v, n(y)/x]$$

On supprime le couple $\Big(x, n(y)\Big)$ de $\mathcal{U}$, puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant le nouveau σ.

$$\mathcal{U} = \Big\{\sigma(y, h(z,z))\Big\} = \Big\{\Big(y, h(z,z)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(y, h(z,z)\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $y \neq h(z,z)$. On ne peut pas appliquer `décomposition` car $h(z,z)$ est le résultat de l'application de la fonction h alors que y est une variable. Comme y est une variable, $h(z,z) \neq y$, y n'est pas déjà modifié par σ, et y n'apparait pas dans $\sigma(h(z,z)) = h(z,z)$, on peut appliquer `association`.

5 – Association On met à jour σ par $[\sigma(h(z,z))/y] \circ \sigma$.

$$\begin{aligned}\sigma := [\sigma(h(z,z))/y] \circ \sigma &= [h(z,z)/x] \circ [g(n(y))/v, n(y)/x] \\ &= [h(z,z)/y, g(n(h(z,z)))/v, n(h(z,z))/x]\end{aligned}$$

On supprime le couple $\Big(y, h(z,z)\Big)$ de $\mathcal{U}$. $\mathcal{U} = \emptyset$, ce qui termine l'exécution de l'algorithme.

Vérification

$$\sigma(s) = f(h(n(h(z,z)), h(z,z)), g(n(h(z,z))))$$
$$\sigma(t) = f(h(n(h(z,z)), h(z,z)), g(n(h(z,z))))$$

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Résolution en logique des prédicats – un exemple

Énoncé : Soit un prédicat « chemin » (c) d'arité 2, une fonction « voisin » (v) d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici » (i). On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ c\big(x, v(x)\big) \\
\phi_2 &= \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \land c(z,y)\big) \to c(x,y)\Big) \\
\phi &= \exists a.\ c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Résolution : Pour démontrer ϕ, on va raisonner par l'absurde : on va chercher à démontrer **la contraposée** de ϕ ($\neg\phi$) et aboutir à une contradiction.

1 – Contraposée On s'intéresse donc aux formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ c\big(x, v(x)\big) \\
\phi_2 &= \forall x. \forall y. \forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \land c(z,y)\big) \to c(x,y)\Big) \\
\neg\phi &= \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)
\end{aligned}$$

En appliquant la règle de résolution en logique des prédicats, on cherche à aboutir à une contradiction. Pour pouvoir appliquer cette règle, il faut mettre les formules sous forme normale.

2 – Mise sous forme normale

a) Mise sous forme prénexe La forme prénexe d'une formule F est une formule F' équivalente telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F'. ϕ_1, ϕ_2 et $\neg\phi$ **sont déjà sous forme prénexe**.

b) Mise sous forme normale de Skolem La forme normale de Skolem d'une formule F est une formule F' telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F' et sont tous des quantificateurs universels (F' n'est pas nécessairement équivalente à F mais l'une est satisfiable si et seulement si l'autre l'est). ϕ_1, ϕ_2 et $\neg\phi$ **sont déjà sous forme normale de Skolem** car tous les quantificateurs qu'elles contiennent sont regroupés au début des formules et tous ces quantificateurs sont des quantificateurs universels.

c) Mise sous forme normale conjonctive ϕ_1 est déjà sous forme normale conjonctive, il s'agit d'une conjonction de disjonctions (0 conjonctions, 0 disjonctions).

$$\phi_2 = \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \to c(x,y)\Big) \equiv \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \vee c(x,y)\Big)$$
$$\equiv \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)$$

$\neg\phi$ est déjà sous forme normale conjonctive, il s'agit d'une conjonction de disjonctions (0 conjonctions, 0 disjonctions). Voici les trois formules que l'on considère maintenant :

$$\begin{aligned} F_1 &= \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big) \\ F_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big) \\ F_3 &= \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big) \end{aligned}$$

On cherche à appliquer la règle de résolution en logique des prédicats pour combiner F_1, F_2 et F_3 et aboutir à une contradiction. Afin de pouvoir combiner les formules, il faut procéder à des substituions judicieuses.

3 – Substitution et résolution Soit u une variable fraîche.

$$F_2\Big[i/x, v(v(u))/y\Big] = \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u)\big) \vee c\big(i, v(v(u))\big)\Big)$$

$\forall x$ disparait car la variable x est substituée par le terme i qui est une constante. $\forall u$ vient remplacer $\forall y$ puisque toutes les expressions dépendant de la variable y dépendent maintenant de la variable u.

$$F_3\Big[u/a\Big] = \forall u.\ \neg c\Big(i, v\big(v(u)\big)\Big)$$

On met ainsi en évidence la présence d'une sous-formule dans F_2, et de la négation de la même sous-formule dans F_3 :

$$\begin{aligned} F_2 &= \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u)\big) \vee \boldsymbol{c\big(i, v(v(u))\big)}\Big) \\ F_3 &= \forall u.\ \boldsymbol{\neg c\Big(i, v\big(v(u)\big)\Big)} \end{aligned}$$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions :

$$\forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big) = F_4$$

On procède de même pour combiner F_4 et F_1.

$$\begin{aligned} F_4\Big[v(i)/z, i/u\Big] &= \neg c\big(i, v(i)\big) \vee \boldsymbol{\neg c\big(v(i), v(v(i))\big)} \\ F_1\Big[v(i)/x\Big] &= \boldsymbol{c\big(v(i), v(v(i))\big)} \end{aligned}$$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions :

$$\neg c\big(i, v(i)\big) = F_5$$

On peut maintenant essayer de combiner F_1 et F_5.

$$F_1\Big[i/x\Big] = c\big(i, v(i)\big) \text{ ce qui contredit } F_5.$$

On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Corrigé – Examen 2018

1 Logique propositionnelle

1.a)

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \land r$	$\neg p$	$\neg p \land r$	$q \land r$	$(p \land r) \lor (q \land r)$
0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1

La quatrième et la dernière colonne de la table de vérité sont identiques, ce qui prouve l'équivalence.

1.b)

$$\Big(\big((p \to q) \to p\big) \land (q \to r)\Big) \to r \equiv \Big(\big((\neg p \lor q) \to p\big) \land (\neg q \lor r)\Big) \to r$$
$$\equiv \Big(\big(\neg(\neg p \lor q) \lor p\big) \land (\neg q \lor r)\Big) \to r \equiv \neg\Big(\big((p \land \neg q) \lor p\big) \land (\neg q \lor r)\Big) \lor r$$
$$\equiv \Big(\neg\big((p \land \neg q) \lor p\big) \lor (\neg q \lor r)\Big) \lor r \equiv \Big(\big(\neg(p \land \neg q) \land \neg p\big) \lor (\neg q \lor r)\Big) \lor r$$
$$\equiv \big((\neg p \lor q) \land \neg p\big) \lor (\neg q \lor r) \lor r$$

On pose $P = (\neg q \lor r) \lor r$ et $Q \land R = \big((\neg p \lor q) \land \neg p\big)$, puis on applique l'équivalence $P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$.

$$\equiv \big((\neg p \lor q) \land \neg p\big) \lor (\neg q \lor r) \lor r \equiv \Big((\neg q \lor r) \lor r \lor (\neg p \lor q)\Big) \land \Big((\neg q \lor r) \lor r \lor \neg p\Big)$$

1.c) Une formule est valide si et seulement si pour toutes les interprétations, la formule est vraie.

p	q	r	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee r$	$(\neg q \vee r) \vee r \vee (\neg p \vee q)$	$(\neg q \vee r) \vee r \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

La formule est donc invalide car elle est fausse si $p = 1, q = 1, r = 0$.

2.a) Base de règles :

$$R1 : (C \wedge D) \rightarrow F$$
$$R2 : (F \wedge B) \rightarrow E$$
$$R3 : (G \wedge F) \rightarrow B$$
$$R4 : (A \wedge F) \rightarrow G$$

Base de faits : $\{A, C, D\}$.

Une clause de Horn est une clause comportant au plus un littéral positif ; une fois les équivalences faites, toutes les règles de la base de règles sont de la forme $\neg C \vee \neg D \vee F$, donc comportent un seul littéral positif.

2.b)

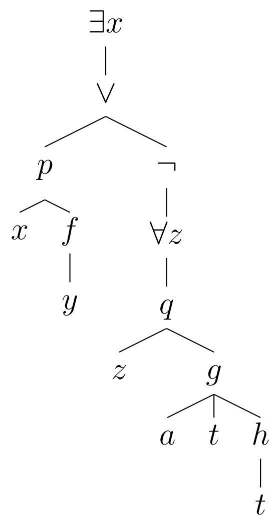
$$\mathbf{1 :}\ R1 + C + D \Rightarrow F$$
$$\mathbf{2 :}\ R4 + A + F \Rightarrow G$$
$$\mathbf{3 :}\ R3 + G + F \Rightarrow B$$
$$\mathbf{4 :}\ R2 + F + B \Rightarrow E$$

On arrive à déduire E en suivant l'algorithme de chaînage avant, donc Émilie vient.

2.c) À la fin de l'execution de l'étape **4**, plus aucune règle ne peut être appliquée. La base de faits $\{A, C, D, F, G, B, E\}$ est donc saturée et $G =$ Gaëlle en fait partie.

2 Logique du premier ordre

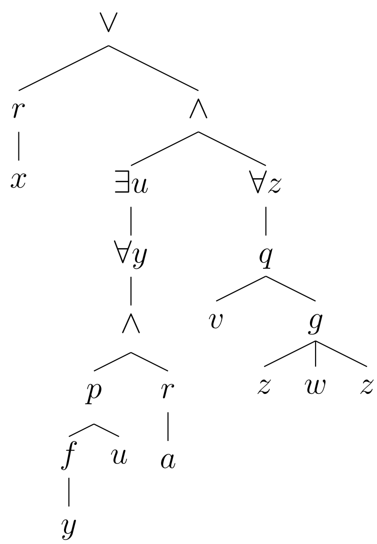
1 Représentation de F :



ERRATUM : dans la formule G, $\exists y$ est en fait un $\exists u$. Cette erreur n'a pas beaucoup d'impact sur le reste de l'exercice. La correction continue avec

$$G = r(x) \vee ((\exists u.\ \forall y.\ p(f(y), u) \wedge r(a)) \wedge \forall z.\ q(v, g(z, w, z)))$$

Représentation de G :



2 Les variables colorées sont liées aux quantificateurs de la même couleur. Les variables libres sont en noir et gras.

$$F = \exists \boldsymbol{x}.\ p(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) \vee \neg \forall \boldsymbol{z}.\ q(\boldsymbol{z}, g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{t}, h(\boldsymbol{t})))$$
$$G = r(\boldsymbol{x}) \vee ((\exists \boldsymbol{u}.\ \forall \boldsymbol{y}.\ p(f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{u}) \wedge r(\boldsymbol{a})) \wedge \forall \boldsymbol{z}.\ q(\boldsymbol{v}, g(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})))$$

3 Pour F : p est un prédicat d'arité 2, f est une fonction d'arité 1, q est un prédicat d'arité 2, g est une fonction d'arité 3, h est une fonction d'arité 1.

Pour G : r est un prédicat d'arité 1, p est un prédicat d'arité 2, f est une fonction d'arité 1, q est un prédicat d'arité 2, g est une fonction d'arité 3.

4 Résolution : On commence avec $\mathcal{U} = \Big\{ \Big(s, t \Big) \Big\} = \Big\{ \Big(f\big(g(v), h(u,v)\big), f\big(g(w), h(w, j(x,w))\big) \Big) \Big\}$ et $\sigma = [\,]$.

On ne peut pas appliquer `suppression`, car $f\big(g(v), h(u,v)\big) \neq f\big(g(w), h(w, j(x,w))\big)$. Comme $f\big(g(v), h(u,v)\big)$ et $f\big(g(w), h(w, j(x,w))\big)$ sont le résultat de l'application de la même fonction f au même nombre d'arguments (2 arguments), on peut appliquer la `décomposition`.

1 – Décomposition On supprime $\Big(f\big(g(v), h(u,v)\big), f\big(g(w), h(w, j(x,w))\big) \Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ les couples $\Big(g(v), g(w) \Big)$ et $\Big(h(u,v), h(w, j(x,w)) \Big)$.

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{ \Big(g(v), g(w) \Big), \Big(h(u,v), h(w, j(x,w)) \Big) \Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(g(v), g(w) \Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $g(v) \neq g(w)$. Comme $g(v)$ et $g(w)$ sont le résultat de l'application de la même fonction g au même nombre d'arguments (1 argument), on peut appliquer la `décomposition`.

2 – Décomposition On supprime $\Big(g(v), g(w) \Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ le couple $\Big(v, w \Big)$. Comme $\mathcal{U}$ est modélisé par une file, on ajoute le nouveau couple à la suite des couples déjà présents dans $\mathcal{U}$ (on ajoute donc « par la droite »).

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{ \Big(h(u,v), h(w, j(x,w)) \Big), \Big(v, w \Big) \Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(h(u,v), h(w, j(x,w)) \Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $h(u,v) \neq h(w, j(x,w))$. Comme $h(u,v)$ et $h(w, j(x,w))$ sont le résultat de l'application de la même fonction h au même nombre d'arguments (2 arguments), on peut appliquer la `décomposition`.

3 – Décomposition On supprime $\Big(h(u,v), h(w, j(x,w)) \Big)$ de $\mathcal{U}$. On ajoute dans $\mathcal{U}$ les couples $\Big(u, w \Big)$ et $\Big(v, j(x,w) \Big)$.

$$\sigma = [\,] \qquad \mathcal{U} = \Big\{ \Big(v, w \Big), \Big(u, w \Big), \Big(v, j(x,w) \Big) \Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(v, w \Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $v \neq w$. Comme v et w ne sont pas le résultat de l'application de la même fonction, on ne peut pas appliquer la `décomposition`. Comme v est une variable, $w \neq v$, v n'est pas déjà modifié par σ (car $\sigma = [\,]$), et v n'apparait pas dans $\sigma(w) = w$, on peut appliquer `association`.

4 – Association On met à jour σ par $[\sigma(w)/v] \circ \sigma$.

$$\sigma := [\sigma(w)/v] \circ \sigma = [w/v] \circ [\,] = [w/v]$$

On supprime le couple $\Big(v, w\Big)$ de $\mathcal{U}$, puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant le nouveau σ.

$$\mathcal{U} = \Big\{\sigma\Big(u, w\Big), \sigma\Big(v, j(x, w)\Big)\} = \Big\{\Big(u, w\Big), \Big(w, j(x, w)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(u, w\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $u \neq w$. Comme u et w ne sont pas le résultat de l'application de la même fonction, on ne peut pas appliquer la `décomposition`. Comme u est une variable, $w \neq u$, u n'est pas déjà modifié par σ, et u n'apparait pas dans $\sigma(w) = w$, on peut appliquer `association`.

5 – Association On met à jour σ par $[\sigma(w)/u] \circ \sigma$.

$$\sigma := [\sigma(w)/u] \circ \sigma = [w/u] \circ [w/v] = [w/v, w/u]$$

On supprime le couple $\Big(u, w\Big)$ de $\mathcal{U}$, puis on met à jour $\mathcal{U}$ en appliquant le nouveau σ.

$$\mathcal{U} = \Big\{\sigma\Big(w, j(x, w)\Big)\} = \Big\{\Big(w, j(x, w)\Big)\Big\}$$

On s'intéresse maintenant au premier couple présent dans $\mathcal{U}$: $\Big(w, j(x, w)\Big)$. On ne peut pas appliquer `suppression`, car $w \neq j(x, w)$. Comme w et $j(x, w)$ ne sont pas le résultat de l'application de la même fonction, on ne peut pas appliquer la `décomposition`. Comme w apparait dans $\sigma(j(x, w)) = j(x, w)$, on ne peut pas appliquer `association`. Comme w n'est pas modifié par σ, on ne peut pas appliquer `fusion`. Aucune étape ne peut s'appliquer ; les termes ne sont donc pas unifiables.

3 Deduction naturelle

1

$$\wedge I\;\dfrac{\to E\;\dfrac{\wedge E_g\;\dfrac{\to I\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p \to (q \wedge r)} \qquad Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p}}{\Gamma \vdash q \wedge r}}{\Gamma = p \to (q \wedge r), p \vdash q}}{p \to (q \wedge r) \vdash p \to q} \qquad \to E\;\dfrac{\wedge E_g\;\dfrac{\to I\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p \to (q \wedge r)} \qquad Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p}}{\Gamma \vdash q \wedge r}}{\Gamma = p \to (q \wedge r), p \vdash q}}{p \to (q \wedge r) \vdash p \to q}}{p \to (q \wedge r) \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)}$$

2

$$\to I\;\dfrac{\to E\;\dfrac{\wedge E_g\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash (p \to r) \wedge (q \to r)}}{\Gamma \vdash p \to r} \qquad \wedge E_g\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash p \wedge q}}{\Gamma \vdash p}}{\Gamma = (p \to r) \wedge (q \to r), (p \wedge q) \vdash r}}{(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r}$$

4 Resolution en logique des predicats

Pour démontrer ϕ, on raisonne par l'absurde.

1 – Contraposée On s'intéresse donc aux formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ p(x) \to q(x, c) \\
\phi_2 &= \forall x. \exists y.\ ((r(x) \vee \neg p(y)) \to s(x, y)) \\
\phi_3 &= \forall x.\ p(x) \\
\neg\phi &= \exists x. \Big(r(x) \wedge \forall y. \big(\neg s(x, y) \vee \neg b(y, c) \big) \Big)
\end{aligned}$$

En appliquant la règle de résolution en logique des prédicats, on cherche à aboutir à une contradiction. Pour pouvoir appliquer cette règle, il faut mettre les formules sous forme normale.

2 – Mise sous forme normale

a) Mise sous forme prénexe La forme prénexe d'une formule F est une formule F' équivalente telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F'. ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 **sont déjà sous forme prénexe**. En rouge et en bleu, la subdivision en sous-formules de $\neg\phi$ pour la mise sous forme prénexe grâce au tableau des équivalences.

$$\neg\phi = \exists x. \Big(r(x) \wedge \forall y. \big(\neg s(x, y) \vee \neg b(y, c) \big) \Big) \equiv \exists x.\ \forall z.\ \Big(r(x) \wedge \big(\neg s(x, z) \vee \neg b(z, c) \big) \Big)$$

b) Mise sous forme normale de Skolem La forme normale de Skolem d'une formule F est une formule F' telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F' et sont tous des quantificateurs universels. ϕ_1 et ϕ_3 **sont déjà sous forme normale de Skolem**.

ϕ_2 : on définit une fonction f d'arité 1 qui fournit une valeur $y = f(x)$ telle que

$$((r(x) \vee \neg p(f(x))) \to s(x, f(x)))$$

est vraie. On a alors :

$$\forall x.\ ((r(x) \vee \neg p(f(x))) \to s(x, f(x)))$$

que l'on va appeler F_2.

$\neg\phi$: on définit une constante k telle que $\forall z.\ \Big(r(k) \wedge \big(\neg s(k, z) \vee \neg b(z, c) \big) \Big)$ est vraie. On appelle cette formule F_4.

c) Mise sous forme normale conjonctive ϕ_3 est déjà sous forme normale conjonctive, il s'agit d'une conjonction de disjonctions (0 conjonctions, 0 disjonctions).

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ p(x) \to q(x,c) \equiv \forall x.\ \neg p(x) \vee q(x,c) \\
F_2 &= \forall x.\ \Big(\big(r(x) \vee \neg p(f(x))\big) \to s(x, f(x))\Big) \\
&\equiv \forall x.\ \Big(\neg\big(r(x) \vee \neg p(f(x))\big) \vee s(x, f(x))\Big) \\
&\equiv \forall x.\ \Big(\big(\neg r(x) \wedge p(f(x))\big) \vee s(x, f(x))\Big)
\end{aligned}$$

On pose $P = s\big(x, f(x)\big)$ et $Q \wedge R = \neg r(x) \wedge p\big(f(x)\big)$, puis on applique l'équivalence $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

$$F_2 = \forall x.\ \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee \neg r(x)\Big) \wedge \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee p\big(f(x)\big)\Big)$$

F_4 est déjà sous forme normale conjonctive. On sépare F_2 en F_5, F_6 et F_4 en F_7, F_8. Voici les formules que l'on considère maintenant :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \phi_1 = \forall x.\ \Big(\neg p(x) \vee q(x,c)\Big) \\
F_3 &= \phi_3 = \forall x.\ p(x) \\
F_5 &= \forall x.\ \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee \neg r(x)\Big) \\
F_6 &= \forall x.\ \Big(s\big(x, f(x)\big) \vee p\big(f(x)\big)\Big) \\
F_7 &= \forall z.\ r(k) \\
F_8 &= \forall z.\ \Big(\neg s(k,z) \vee \neg q(z,c)\Big)
\end{aligned}$$

On cherche à appliquer la règle de résolution en logique des prédicats pour combiner ces formules et aboutir à une contradiction. Afin de pouvoir combiner les formules, il faut procéder à des substituions judicieuses.

3 – Substitution et résolution *Par application de la règle de résolution* à F_1 et F_3, on a :

$$\forall x.\ q(x,c) = F_9$$

Soit u une variable fraîche.

$$\begin{aligned}
F_9[u/x] &= \forall u.\ q(u,c) \\
F_8[u/z] &= \forall u.\ \Big(\neg s(k,u) \vee \neg q(u,c)\Big)
\end{aligned}$$

Par application de la règle de résolution on a :

$$\forall u.\ \neg s(k,u) = F_{10}$$

Maintenant :

$$F_5[k/x] = s\big(k, f(k)\big) \vee \neg r(k)$$

Par application de la règle de résolution avec F_7 on a :

$$s\big(k, f(k)\big)$$

Ce qui entre en contradiction avec $F_{10}[f(k)/u] = \neg s(k, f(k))$. Ainsi, $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \vdash \phi$.

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Substitutions – Exercices & corrigés

Exercice 1 Soit la formule de la logique des prédicats suivante :

$$H = \big(\forall x. \forall y.\ A(x, y)\big) \rightarrow B(x, y)$$

1. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
2. Donner tous les prédicats et toutes les fonctions, avec leurs arités, qui apparaissent dans la formule.
3. Effectuer, étape par étape, la substitution $H[f(x, y)/x]$.
4. Effectuer, étape par étape, la substitution $H[f(x, y)/y]$.

Exercice 2 Soit la formule de la logique des prédicats suivante :

$$F = \big(\forall x \exists y\ R(f(x), f(y))\big) \wedge \big((\forall z\ R(x, z)) \rightarrow S(x)\big)$$

1. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
2. Donner tous les prédicats et toutes les fonctions, avec leurs arités, qui apparaissent dans la formule.
3. Effectuer, étape par étape, la substitution $F[f(z)/x]$.
4. Effectuer, étape par étape, la substitution $F[R(x, y)/z]$.

Exercice 3 Soit la formule de la logique des prédicats suivante :

$$G = \forall x. \Big(u\big(h(x, y), g(y), z\big) \vee \big(\forall y.\ \exists z.\ (v(y, z) \rightarrow w(x, y, z))\big)\Big)$$

1. Pour chaque occurrence de variable, dire si elle est libre ou liée et dans le cas où elle est liée, indiquer le quantificateur correspondant.
2. Donner tous les prédicats et toutes les fonctions, avec leurs arités, qui apparaissent dans la formule.
3. Effectuer, étape par étape, la substitution $G[t(x, y)/y]$.
4. Effectuer, étape par étape, la substitution $G[f(x, y, z)/x]$.

Correction – Exercice 1

3. On écrit $H_1(x)$ où n'apparaît aucune occurence liée de x (la variable à substituer). On écrit $H_2(x)$ dont aucune variable liée n'apparait dans $f(x,y)$ (le terme substitutant).

$$H_1(x) = \big(\forall a.\forall y.\ A(a,y)\big) \to B(x,y)$$
$$H_2(x) = \big(\forall a.\forall b.\ A(a,b)\big) \to B(x,y)$$
$$H[f(x,y)/x] = \big(\forall a.\forall b.\ A(a,b)\big) \to B(f(x,y),y)$$

4.

$$H[f(x,y)/y] = \big(\forall a.\forall b.\ A(a,b)\big) \to B(x,f(x,y))$$

Correction – Exercice 2

3.

$$F_1(x) = \big(\forall a.\exists y.\ R(f(a),f(y))\big) \wedge \big((\forall z\ R(x,z)) \to S(x)\big)$$
$$F_2(x) = \big(\forall a.\exists y.\ R(f(a),f(y))\big) \wedge \big((\forall b\ R(x,b)) \to S(x)\big)$$
$$F[f(z)/x] = \big(\forall a.\exists y.\ R(f(a),f(y))\big) \wedge \big((\forall b\ R(f(z),b)) \to S(f(z))\big)$$

4.

$$F_1(z) = \big(\forall x.\exists y.\ R(f(x),f(y))\big) \wedge \big((\forall a.\ R(x,a)) \to S(x)\big)$$

Il n'y a plus d'occurence libre de z. Donc $F[R(x,y)/z] = F_1(z)$.

Correction – Exercice 3

3.

$$G_1(y) = \forall x.\ \Big(u\big(h(x,y),g(y),z\big) \vee \big(\forall a.\ \exists z.\ (v(a,z) \to w(x,a,z))\big)\Big)$$
$$G_2(y) = \forall b.\ \Big(u\big(h(b,y),g(y),z\big) \vee \big(\forall a.\ \exists z.\ (v(a,z) \to w(b,a,z))\big)\Big)$$
$$G[t(x,y)/y] = \forall b.\ \Big(u\big(h(b,t(x,y)),g(t(x,y)),z\big) \vee \big(\forall a.\ \exists z.\ (v(a,z) \to w(b,a,z))\big)\Big)$$

4.

$$G_1(x) = \forall a.\ \Big(u\big(h(a,y),g(y),z\big) \vee \big(\forall y.\ \exists z.\ (v(y,z) \to w(a,y,z))\big)\Big)$$

Il n'y a plus d'occurence libre de x. Donc $G[f(x,y,z)/x] = G_1(x)$.

Formalismes de Représentation et Raisonnements

Déduction naturelle – Exercices & corrigés

Exercice 1 Montrer, à l'aide des règles de la déduction naturelle :

$$\forall x.\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x.\ F(x)) \wedge (\forall x.\ G(x))$$

Exercice 2 Montrer, à l'aide des règles de la déduction naturelle :

$$\forall x.\ (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x.\ \big(F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x))\big)$$

Correction – exercice 1

$$\wedge I\;\dfrac{\forall I \text{ car x lié dans } \Gamma\;\dfrac{\wedge E_g\;\dfrac{\forall E\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\,(F(x) \wedge G(x))}}{\Gamma \vdash F \wedge G}}{\Gamma \vdash F}}{\Gamma \vdash \forall x.\,F(x)} \qquad \forall I\;\dfrac{\wedge E_d\;\dfrac{\forall E\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\,(F(x) \wedge G(x))}}{\Gamma \vdash F \wedge G}}{\Gamma \vdash G}}{\Gamma \vdash \forall x.\,G(x)}}{\Gamma = \forall x.\,(F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x.\,F(x)) \wedge (\forall x.\,G(x))}$$

Correction – exercice 2

$$\forall I \text{ car x est lié dans } \Gamma \quad \to I\;\dfrac{\vee I_g\;\dfrac{\to E\;\dfrac{\forall E\;\dfrac{Ax\;\dfrac{}{\Gamma, F \vdash \forall x.\,(F(x) \to G(x))}}{\Gamma, F \vdash F \to G} \qquad Ax\;\dfrac{}{\Gamma, F \vdash F}}{\Gamma, F \vdash G}}{\Gamma, F \vdash G \vee H}}{\dfrac{\Gamma \vdash F \to (G \vee H)}{\Gamma = \forall x.\,(F(x) \to G(x)) \vdash \forall x.\,\big(F(x) \to (G(x) \vee H(x))\big)}}$$