Formalismes de Représentation et Raisonnements

Résolution en logique des prédicats – un exemple

Énoncé : Soit un prédicat « chemin » (c) d'arité 2, une fonction « voisin » (v) d'arité 1, les variables 'a, x, y, z', et une constante « ici » (i). On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ c\big(x, v(x)\big) \\
\phi_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \land c(z,y)\big) \to c(x,y)\Big) \\
\phi &= \exists a.\ c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Résolution : Pour démontrer ϕ, on va raisonner par l'absurde : on va chercher à démontrer **la contraposée** de ϕ ($\neg\phi$) et aboutir à une contradiction.

1 – Contraposée On s'intéresse donc aux formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ c\big(x, v(x)\big) \\
\phi_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \land c(z,y)\big) \to c(x,y)\Big) \\
\neg\phi &= \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)
\end{aligned}$$

En appliquant la règle de résolution en logique des prédicats, on cherche à aboutir à une contradiction. Pour pouvoir appliquer cette règle, il faut mettre les formules sous forme normale.

2 – Mise sous forme normale

a) Mise sous forme prénexe La forme prénexe d'une formule F est une formule F' équivalente telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F'. ϕ_1, ϕ_2 et $\neg\phi$ **sont déjà sous forme prénexe**.

b) Mise sous forme normale de Skolem La forme normale de Skolem d'une formule F est une formule F' telle que tous les quantificateurs soient regroupés au début de F' et sont tous des quantificateurs universels (F' n'est pas nécessairement équivalente à F mais l'une est satisfiable si et seulement si l'autre l'est). ϕ_1, ϕ_2 et $\neg\phi$ **sont déjà sous forme normale de Skolem** car tous les quantificateurs qu'elles contiennent sont regroupés au début des formules et tous ces quantificateurs sont des quantificateurs universels.

c) Mise sous forme normale conjonctive ϕ_1 est déjà sous forme normale conjonctive, il s'agit d'une conjonction de disjonctions (0 conjonctions, 0 disjonctions).

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \to c(x,y)\Big) \equiv \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg\big(c(x,z) \wedge c(z,y)\big) \vee c(x,y)\Big) \\ &\equiv \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big)\end{aligned}$$

$\neg\phi$ est déjà sous forme normale conjonctive, il s'agit d'une conjonction de disjonctions (0 conjonctions, 0 disjonctions). Voici les trois formules que l'on considère maintenant :

$$\begin{aligned}F_1 &= \phi_1 = \forall x.\ c\big(x, v(x)\big) \\ F_2 &= \forall x.\forall y.\forall z.\ \Big(\neg c(x,z) \vee \neg c(z,y) \vee c(x,y)\Big) \\ F_3 &= \neg\phi = \forall a.\ \neg c\Big(i, v\big(v(a)\big)\Big)\end{aligned}$$

On cherche à appliquer la règle de résolution en logique des prédicats pour combiner F_1, F_2 et F_3 et aboutir à une contradiction. Afin de pouvoir combiner les formules, il faut procéder à des substituions judicieuses.

3 – Substitution et résolution Soit u une variable fraîche.

$$F_2\Big[i/x, v(v(u))/y\Big] = \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u)\big) \vee c\big(i, v(v(u))\big)\Big)$$

$\forall x$ disparait car la variable x est substituée par le terme i qui est une constante. $\forall u$ vient remplacer $\forall y$ puisque toutes les expressions dépendant de la variable y dépendent maintenant de la variable u.

$$F_3\Big[u/a\Big] = \forall u.\ \neg c\Big(i, v\big(v(u)\big)\Big)$$

On met ainsi en évidence la présence d'une sous-formule dans F_2, et de la négation de la même sous-formule dans F_3 :

$$\begin{aligned}F_2 &= \forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u)\big) \vee \boldsymbol{c\big(i, v(v(u))\big)}\Big) \\ F_3 &= \forall u.\ \boldsymbol{\neg c\Big(i, v\big(v(u)\big)\Big)}\end{aligned}$$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions :

$$\forall u.\forall z.\ \Big(\neg c(i,z) \vee \neg c\big(z, v(v(u))\big)\Big) = F_4$$

On procède de même pour combiner F_4 et F_1.

$$\begin{aligned}F_4\Big[v(i)/z, i/u\Big] &= \neg c\big(i, v(i)\big) \vee \boldsymbol{\neg c\big(v(i), v(v(i))\big)} \\ F_1\Big[v(i)/x\Big] &= \boldsymbol{c\big(v(i), v(v(i))\big)}\end{aligned}$$

Par application de la règle de résolution aux résultats des substitutions :

$$\neg c\big(i, v(i)\big) = F_5$$

On peut maintenant essayer de combiner F_1 et F_5.

$$F_1\Big[i/x\Big] = c\big(i, v(i)\big) \text{ ce qui contredit } F_5.$$

On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.