Formalismes de Représentation et Raisonnements

Devoir d'Évaluation – Sujet 1 – à rendre le 11/05/2020
Une part importante de l'évaluation sera accordée à la clarté et à la lisibilité de la copie rendue.

1 Logique propositionnelle

1. Pour quelles valeurs de vérité des variables p, q, r la formule

$$F = \neg p \rightarrow (q \vee r)$$

est-elle fausse ?

2. Soient les bases de règles et de faits suivantes :
Base de règles :
R1 : Si carottes alors carottes rapées
R2 : Si pommes et eau alors compote de pommes
R3 : Si carottes et pommes de terre alors purée
R4 : Si compote de pommes et carottes rapées et farine alors carrot cake
R5 : Si compote de pommes et pommes de terre et farine alors rapés
R6 : Si carottes et pommes de terre et eau alors soupe
R7 : Si purée et farine alors gnocchis
Base de faits = {carottes, eau, pommes de terre, farine}
   (a) Les règles de la base de règles sont-elles sous forme de clause de Horn ?
   (b) Saturer la base de faits avec les règles en suivant l'algorithme de chaînage avant.
   (c) Le carrot cake fait-il partie de la base de faits saturée ? (C'est-à-dire, peut-on préparer un carrot cake en disposant des ingrédients présents dans la base de faits ?)
   (d) Si on ajoute des pommes dans la base de faits, le carrot cake fait-il partie de la base de faits saturée ? Argumenter.

3. Écrire l'arbre de décomposition de la formule suivante :

$$h \rightarrow ((f \vee p) \wedge (p \rightarrow (\neg i \rightarrow e))).$$

4. Mettre la formule précédente sous forme normale conjonctive, en détaillant le calcul.

2 Logique et langage naturel

1. Soit $f(x)$ la fonction unaire « le frère de x » et $F(x, y)$ le prédicat binaire « x est le frère de y ». Soit a une constante pour « Alam ». Que signifie l'expression $F(f(a), a)$?
2. Donner les négations des propositions :
   (a) « Toute personne a une mère. »
   (b) « Aucune personne n'est sans ami. »
   (c) « On n'a invité à la fête que des chats de Camille. »
3. Soient les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} p &: \text{je pars} \\ q &: \text{tu restes} \\ r &: \text{il y a quelqu'un à la maison} \end{aligned}$$

   Interpréter les trois propositions suivantes :
   (a) $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$
   (b) $\neg q \rightarrow (p \wedge \neg r)$
   (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$

3 Substitutions

On considère la formule du premier ordre, où x, y, z sont des variables :

$$F = \big(a(x, y) \rightarrow \forall x.\exists y.\ (\neg b(x, y, c(z, y)) \vee (d(x)))\big) \wedge e\big(f(x, g(y))\big)$$

1. Pour chacun des symboles a, b, c, d, e, f, g dire s'il s'agit d'une fonction ou d'un prédicat, et donner leur arité.
2. Quelles sont les variables libres de F ?
3. Quel est le résultat de la substitution $F[f(x, y, z)/x]$?
4. Quel est le résultat de la substitution $F[t(x, y)/y]$?

4 Déduction naturelle

À l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. $\forall x.\ (F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x.\ F(x)) \wedge (\forall x.\ G(x))$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
3. $\{p \rightarrow (q \wedge r), p\} \vdash r$

5 Résolution en logique des prédicats

Soient les prédicat p, q, r, s d'arité 1 et des variables x, y, z. On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \exists x.\ p(x) \wedge q(x) \\
\phi_2 &= \forall y.\ p(y) \rightarrow (r(y) \wedge s(y)) \\
\phi &= \exists z.\ q(z) \wedge s(z)
\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Annexes

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**
- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**
F est établi
sinon
F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).
Soient $(s,t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :
- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x,t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg(\forall x.\ \phi)$	$\exists x.\ \neg\phi$
$\neg(\exists x.\ \phi)$	$\forall x.\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Règles d'inférence de la déduction naturelle

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \bot}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux* (*ex falso*) :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'*implication* (*modus ponens*) :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F \qquad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$