Formalismes de Représentation et Raisonnements

Devoir d'Évaluation – Sujet 3 – à rendre le 11/05/2020

Une part importante de l'évaluation sera accordée à la clarté et à la lisibilité de la copie rendue.

1 Logique propositionnelle

1. Soient les propositions élémentaires p, q, r. Montrer les équivalences :
   (a) $(p \rightarrow q) \wedge r \equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
   (b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
2. Mettre les formules précédentes sous forme normale conjonctive.
3. Soient les bases de règles et de faits suivantes :

   Base de règles :

   R1 : Si eau et farine alors pâte

   R2 : Si riz et lait alors riz au lait

   R3 : Si poireaux et riz alors risotto

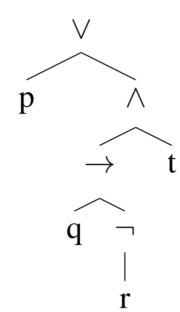
   R4 : Si carottes et riz alors risotto

   R5 : Si carottes et poireaux et riz alors risotto

   R6 : Si pâte et poireaux alors tarte aux poireaux

   Base de faits = {eau, riz, lait, poireaux, carottes}

   (a) Les règles de la base de règles sont-elles sous forme de clause de Horn ?
   (b) La tarte aux poireaux fait-elle partie de la base de faits saturée ? (C'est-à-dire, peut-on préparer une tarte aux poireaux en disposant des ingrédients présents dans la base de faits ?)
   (c) Si on ajoute de la farine dans la base de faits, la tarte aux poireaux fait-il partie de la base de faits saturée ? Argumenter.
4. Écrire la formule dont l'arbre est :



2 Logique et langage naturel

1. Soient la constante n : « Noa » et les fonctions f(x) : « la fille de x », m(x) : « la mère de x », s(x) : « la soeur de x », p(x) : « le père de x ». Soit le prédicat $a(x, y)$: « x est amie avec y ». Exprimer en langage de logique du premier ordre la proposition : « La tante maternelle de Noa est amie avec le père de sa fille ».
2. Donner les négations des propositions :
   (a) « Toute personne a une mère. »
   (b) « Aucune personne n'est sans ami. »
   (c) « On n'a invité à la fête que des chats de Camille. »
3. On considère les propositions suivantes :

$$\begin{aligned} f &: \text{il fait froid} \\ p &: \text{il pleut} \\ h &: \text{c'est l'hiver} \\ i &: \text{les routes sont innondées} \\ e &: \text{les routes sont encombrées} \end{aligned}$$

   Traduire en langage propositionnel la phrase suivante : « En hiver, il fait froid ou il pleut, et quand il pleut, les routes qui ne sont pas innondées sont encombrées ».

3 Substitutions

On considère la formule :

$$F = \forall x. \left(u(h(x, y), g(y), z)\right) \vee \left(\forall y. \exists z. \ (v(y, z) \to w(x, y, z))\right)$$

1. Pour chacun des symboles u, h, g, v, w dire s'il s'agit d'une fonction ou d'un prédicat, et donner leur arité.
2. Quelles sont les variables libres de F ?
3. Quel est le résultat de la substitution $F[f(x, y, z)/x]$?
4. Quel est le résultat de la substitution $F[t(x, y)/y]$?

4 Déduction naturelle

À l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. $(\forall x. \ (F(x) \to G(x))) \wedge F(a) \vdash \exists x. \ G(x)$
2. $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

5 Résolution en logique des prédicats

Soient les prédicat p, q, r, s d'arité 1 et des variables x, y, z. On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \exists x.\ p(x) \wedge q(x) \\
\phi_2 &= \forall y.\ p(y) \rightarrow (r(y) \wedge s(y)) \\
\phi &= \exists z.\ q(z) \wedge s(z)
\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Annexes

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).

Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg(\forall x.\ \phi)$	$\exists x.\ \neg\phi$
$\neg(\exists x.\ \phi)$	$\forall x.\ \neg\phi$
$\phi \vee \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x.\ \phi'$	$\forall x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x.\ \phi'$	$\exists x'.\ (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$(\exists x.\ \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\ (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Règles d'inférence de la déduction naturelle

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \bot}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux* (*ex falso*) :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$$

Élimination de l'*implication* (*modus ponens*) :

$$\rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F \qquad \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$