Formalismes de Représentation et Raisonnements

Devoir d'Évaluation – Sujet 4 – à rendre le 11/05/2020

Une part importante de l'évaluation sera accordée à la clarté et à la lisibilité de la copie rendue.

1 Logique propositionnelle

1. Pour quelles valeurs de vérité des variables p, q, r les formules suivantes sont-elles vraies ?
   (a) $\neg(q \to p) \wedge r$
   (b) $(p \to q) \wedge (q \to p) \wedge \neg(q \to r)$
2. Mettre les formules précédentes sous forme normale conjonctive.
3. Soient les bases de règles et de faits suivantes :

   Base de règles :

   R1 : Si lait et farine alors béchamel

   R2 : Si lait et farine alors appareil [1]

   R3 : Si eau et farine alors pâte

   R4 : Si pommes de terre et béchamel alors gratin

   R5 : Si pâte et pommes alors pirozhki [2]

   R6 : Si pâte et appareil et pommes alors tarte aux Pommes

   Base de faits = {lait, farine, eau, pommes}

   (a) Les règles de la base de règles sont-elles sous forme de clause de Horn ?
   (b) Le gratin fait-il partie de la base de faits saturée ? (C'est-à-dire, peut-on préparer un gratin en disposant des ingrédients présents dans la base de faits ?)
   (c) Si on ajoute des pommes de terre dans la base de faits, le gratin fait-il partie de la base de faits saturée ? Argumenter.
4. Écrire l'arbre de décomposition de la formule suivante :

$$h \to ((f \vee p) \wedge (p \to (\neg i \to e))).$$

2 Logique et langage naturel

1. Soient a : « Alcibiade », b : « Aphrodite », c : « Xantippe », $f(x)$: « le frère de x », $p(x)$: « le père de x », $s(x)$: « la statue de x », $D(x, y, z)$: « x donne y à z ». Exprimer en langage de logique des prédicats du premier ordre la proposition : « Le frère d'Alcibiade donne la statue d'Aphrodite au père de Xantippe ».

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Appareil#Divers
2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pirojki

2. Donner la négation des propositions :
   (a) « Personne ne chante dans les cafés ni les restaurants. »
   (b) « Tous les amis de Camille connaissent un de ses chats. »
3. Traduire en langage propositionnel la phrase suivante : « En hiver, il fait froid ou il pleut, et quand il pleut, les routes qui ne sont pas innondées sont encombrées ».

3 Substitutions

On considère la formule :

$$F = \forall x.\ \Big(u(h(x,y), g(y), z)\Big) \vee \Big(\forall y. \exists z.\ (v(y,z) \rightarrow w(x,y,z))\Big)$$

1. Pour chacun des symboles u, h, g, v, w dire s'il s'agit d'une fonction ou d'un prédicat, et donner leur arité.
2. Quelles sont les variables libres de F ?
3. Quel est le résultat de la substitution $F[f(x,y,z)/x]$?
4. Quel est le résultat de la substitution $F[t(x,y)/y]$?

4 Déduction naturelle

A l'aide des règles de la déduction naturelle, montrer les postulats suivants :

1. $\forall x.\ (F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x.\ (F(x) \rightarrow (G(x) \vee H(x)))$
2. $\{p \wedge q, q \rightarrow (p \rightarrow r)\} \vdash q \wedge r$
3. $\{(p \vee q) \rightarrow r, q \wedge \neg p\} \vdash q \wedge r$

5 Résolution en logique des prédicats

Soit le prédicat a d'arité 1 et des variables x, y, z. On définit les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \forall x.\ \Big((\exists y. \neg a(x,y)) \rightarrow \exists y.\ (a(x,y) \wedge a(y,x))\Big) \\
\phi_2 &= \forall x. \forall y. \forall z.\ (a(x,y) \wedge a(y,z) \rightarrow a(x,z)) \\
\phi &= \forall x.\ a(x,x)
\end{aligned}$$

Montrer que $\phi_1, \phi_2 \vdash \phi$.

Annexes

Algorithme: Chainage_avant (BF (base de faits), BR (base de règles (R)), F (fait que l'on cherche à établir))

tant que *(F $\notin$BF) ET ($\exists$ R $\in$ BR applicable)* **faire**

- Choisir une règle applicable R
- BR = BR - R — désactivation de R
- BF = BF $\bigcup$ conclusion(R) — déclenchement de la règle R, conclusion de R ajoutée à la base de faits

si *F $\in$ BF* **alors**

F est établi

sinon

F n'est pas établi

Entrée : ensemble de couples de termes à unifier $\mathcal{U}$ (récursivité !).
Soient $(s, t) \in \mathcal{U}$ et σ l'unificateur en construction :

suppression Si $s = t$, on les supprime de $\mathcal{U}$.

décomposition Si $s = f(s_1, ..., s_n)$ et $t = f(t_1, ..., t_n)$, on supprime le couple de $\mathcal{U}$, et on y ajoute les couples $(s_1, t_1), ..., (s_n, t_n)$.

association Si $s = x$ (et $t \neq x$), et :

- x n'est pas déjà modifié par σ,
- x n'apparaît pas dans t_σ

alors on met à jour σ par $\sigma[t\sigma/x]$ (de même en inversant s et t)

fusion Si $s = x$ (et $t \neq x$), et x est modifié par σ, on remplace le couple à unifier (x, t) par $(\sigma(x), t)$.

Si aucune étape ne peut s'appliquer, les termes ne sont pas unifiables.

La formule	se transforme en
$\neg(\forall x.\, \phi)$	$\exists x.\, \neg\phi$
$\neg(\exists x.\, \phi)$	$\forall x.\, \neg\phi$
$\phi \vee \forall x.\, \phi'$	$\forall x'.\, (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$\phi \vee \exists x.\, \phi'$	$\exists x'.\, (\phi \vee \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\, \phi) \vee \phi'$	$\forall x'.\, (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$(\exists x.\, \phi) \vee \phi'$	$\exists x'.\, (\phi[x'/x] \vee \phi')$
$\phi \wedge \forall x.\, \phi'$	$\forall x'.\, (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$\phi \wedge \exists x.\, \phi'$	$\exists x'.\, (\phi \wedge \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\, \phi) \wedge \phi'$	$\forall x'.\, (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$(\exists x.\, \phi) \wedge \phi'$	$\exists x'.\, (\phi[x'/x] \wedge \phi')$
$\phi \rightarrow \forall x.\, \phi'$	$\forall x'.\, (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$\phi \rightarrow \exists x.\, \phi'$	$\exists x'.\, (\phi \rightarrow \phi'[x'/x])$
$(\forall x.\, \phi) \rightarrow \phi'$	$\exists x'.\, (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$
$(\exists x.\, \phi) \rightarrow \phi'$	$\forall x'.\, (\phi[x'/x] \rightarrow \phi')$

Règle de résolution en logique des prédicats :

$$\frac{\neg p \vee L_1 \vee \ldots \vee L_m \qquad p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}{L_1 \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_n}$$

Règles d'inférence de la déduction naturelle

Axiome :

$$Ax \quad \frac{}{\Gamma, p \vdash p}$$

Introduction de la *négation* :

$$\neg I \quad \frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

Élimination de la *négation* :

$$\neg E \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash \neg p}{\Gamma \vdash \bot}$$

Ab absurdo :

$$Abs \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *faux* (*ex falso*) :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Introduction de l'*implication* :

$$\to I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \to q}$$

Élimination de l'*implication* (*modus ponens*) :

$$\to E \quad \frac{\Gamma \vdash p \to q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *et* :

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \wedge q}$$

Élimination du *et* à gauche (attention, on garde la gauche) :

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash p}$$

Élimination du *et* à droite (attention, on garde la droite) :

$$\wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \wedge q}{\Gamma \vdash q}$$

Introduction du *ou* à gauche (attention, on introduit à droite) :

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Introduction du *ou* à droite (attention, on introduit à gauche) :

$$\vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

Élimination du *ou* :

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$

Introduction du *quantificateur universel* :

$$\forall I \quad \frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \forall x\ F} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma$$

Élimination du *quantificateur universel* :

$$\forall E \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ F(x)}{\Gamma \vdash F[t/x]}$$

Introduction du *quantificateur existentiel* :

$$\exists I \quad \frac{\Gamma \vdash F(t)}{\Gamma \vdash \exists x\ F(x)}$$

Élimination du *quantificateur existentiel* :

$$\exists E \quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ F \qquad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G} \text{ si x n'est pas libre dans } \Gamma \text{ et } G$$