



**MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE**

DIRECTION GÉNÉRALE DES RESSOURCES HUMAINES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES  
CONCOURS EXTERNE

Session 2010

LES RAPPORTS DES JURYS DE CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Composition du jury</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Déroulement du concours et statistiques</b>	<b>7</b>
2.1	Déroulement du concours . . . . .	7
2.2	Statistiques et commentaires généraux sur la session 2010 . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Épreuve écrite de mathématiques générales</b>	<b>16</b>
3.1	Énoncé . . . . .	16
3.2	Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales . . . . .	21
3.3	Corrigé . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Épreuve écrite d'analyse et probabilités</b>	<b>29</b>
4.1	Énoncé . . . . .	29
4.2	Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités . . . . .	35
4.3	Corrigé . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique.</b>	<b>60</b>
5.1	Organisation des épreuves 2010 . . . . .	60
5.1.1	Première partie : présentation du plan . . . . .	61
5.1.2	Deuxième partie : le développement . . . . .	61
5.1.3	Troisième partie : questions et dialogue . . . . .	63
5.1.4	Rapport détaillé sur les épreuves orales . . . . .	63
5.2	Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D . . . . .	70
5.3	Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique - Option D . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Épreuve orale de modélisation</b>	<b>72</b>
6.1	Organisation de l'épreuve de modélisation . . . . .	72
6.2	Utilisation de l'outil informatique . . . . .	74
6.3	Option A : probabilités et statistiques . . . . .	74
6.4	Option B : Calcul scientifique . . . . .	75
6.5	Option C : Algèbre et Calcul formel . . . . .	77
6.6	Option D : modélisation et analyse de systèmes informatiques . . . . .	79
6.6.1	Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation. . . . .	80

<b>7 Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2010</b>	<b>83</b>
<b>8 Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique</b>	<b>90</b>
<b>9 Annexe 3 : Le programme 2011</b>	<b>95</b>
9.1 Algèbre linéaire . . . . .	95
9.1.1 Espaces vectoriels . . . . .	95
9.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	95
9.2 Groupes et géométrie . . . . .	96
9.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles . . . . .	96
9.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel . . . . .	97
9.5 Géométries affine, projective et euclidienne . . . . .	97
9.6 Analyse à une variable réelle . . . . .	98
9.7 Analyse à une variable complexe . . . . .	99
9.8 Calcul différentiel . . . . .	100
9.9 Calcul intégral et probabilités . . . . .	100
9.10 Analyse fonctionnelle . . . . .	101
9.11 Géométrie différentielle . . . . .	102
9.12 Algorithmique fondamentale . . . . .	105
9.13 Automates et langages . . . . .	106
9.14 Calculabilité, décidabilité et complexité . . . . .	106
9.15 Logique et démonstration . . . . .	106
<b>10 Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation</b>	<b>107</b>

# Chapitre 1

## Composition du jury

### Directoire

**Foulon Patrick, Président**  
**Bougé Luc, Vice-président**  
**Godefroy Gilles, Vice-président**  
**Moisan Jacques, Vice-président**  
**Torossian Charles, Vice-président**

Professeur des Universités  
Professeur des Universités  
Directeur de recherche  
Inspecteur général  
Inspecteur général

**Boisson François, Directoire**  
**Cori René, Directoire**  
**Goudon Thierry, Directoire**  
**Mestre Jean François, Directoire**  
**Petazzoni Bruno, Directoire**

Professeur de chaire supérieure  
Maître de conférences  
Directeur de recherche  
Professeur des Universités  
Professeur de chaire supérieure

**Abergel Luc**  
**Bachmann Florence**  
**Barbolosi Dominique**  
**Bardet Jean-Marc**  
**Barou Geneviève**  
**Baumann Pierre**  
**Bayle Lionel**  
**Bayle Vincent**  
**Bechata Abdellah**  
**Bennequin Daniel**  
**Bernis Laurent**  
**Bertrand Pierre**  
**Biolley Anne-Laure**  
**Blanloeil Vincent**  
**Bonnaillie-Noël Virginie**  
**Bonnefont Claire**  
**Borel Agnès**  
**Bouton-Drouhin Catherine**  
**Boyer Franck**  
**Brémont Julien**  
**Brinon Olivier**  
**Cadore Anna**

Professeur de chaire supérieure  
Professeure agrégée  
Maître de conférences  
Professeur des Universités  
Maître de conférences  
Chargé de recherche  
Maître de conférences  
Professeur agrégé  
Professeur agrégé  
Professeur des Universités  
Professeur de chaire supérieure  
Directeur de recherche  
Professeure agrégée  
Maître de conférences  
Chargée de recherche  
Professeure de chaire supérieure  
Professeure de chaire supérieure  
Professeure de chaire supérieure  
Professeur des Universités  
Maître de conférences  
Maître de conférences  
Maître de conférences

<b>Caldero Philippe</b>	Maître de conférences
<b>Cerf-Danon Hélène</b>	Professeure de chaire supérieure
<b>Chabanol Marie-Line</b>	Maître de conférences
<b>Chafaï Djalil</b>	Professeur des Universités
<b>Chardin Marc</b>	Chargé de recherches
<b>Chillès Alain</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Contejean Evelyne</b>	Chargée de recherche
<b>Correia Hubert</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Czarnecki Marco</b>	Professeur des universités
<b>D'Angelo Yves</b>	Professeur des Universités
<b>De Seguins Pazzis Clément</b>	Professeur agrégé
<b>Dozias Sandrine</b>	Professeure de chaire supérieure
<b>Dumas Laurent</b>	Maître de conférences
<b>Dutrieux Yves</b>	Maître de conférences
<b>Fakhi-Souchu Saâdia</b>	Professeure agrégée
<b>Favennec Denis</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Feauveau Jean-Christophe</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Fleurant Sandrine</b>	Professeure agrégée
<b>Fontaine Philippe</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Fontanez Françoise</b>	Professeure de chaire supérieure
<b>Fort Jean-Claude</b>	Professeur des Universités
<b>Gallois Mirentchu</b>	Professeure de chaire supérieure
<b>Gamboa Fabrice</b>	Professeur des Universités
<b>Gaussier Hervé</b>	Professeur des Universités
<b>Germain Cyril</b>	Professeur agrégé
<b>Gonnord Stéphane</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Haas Bénédicte</b>	Maître de conférences
<b>Hanrot Guillaume</b>	Professeur des Universités
<b>Hernandez David</b>	Chargé de recherche
<b>Hubert Evelyne</b>	Chargée de recherches
<b>Isaïa Jérôme</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Istas Jacques</b>	Professeur des Universités
<b>Julg Pierre</b>	Professeur des Universités
<b>Kostyra Marie-Laure</b>	Professeure agrégée
<b>Lafitte Pauline</b>	Maître de conférences
<b>Le Merdy Sylvie</b>	Professeure agrégée
<b>Lefèvre Pascal</b>	Professeur des Universités
<b>Lévy Véhel Jacques</b>	Directeur de recherche
<b>Loiseau Bernard</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Marchal Philippe</b>	Chargé de recherche
<b>Méthou Edith</b>	Professeure agrégée
<b>Meunier Nicolas</b>	Maître de conférences
<b>Mézard Ariane</b>	Professeure des Universités
<b>Michel Julien</b>	Maître de conférences
<b>Mneimné Rached</b>	Maître de conférences
<b>Monier Marie</b>	Professeure agrégée
<b>Noble Pascal</b>	Maître de conférences
<b>Paroux Katy</b>	Maître de conférences
<b>Pennequin Denis</b>	Maître de conférences
<b>Peyre Emmanuel</b>	Professeur des Universités
<b>Philibert Bertrand</b>	Professeur agrégé

<b>Prieur Christophe</b>	Chargé de recherche
<b>Recher François</b>	Maître de conférences
<b>Régnier Mireille</b>	Directrice de recherche
<b>Riche Simon</b>	Chargé de recherche
<b>Risler Jean-Jacques</b>	Professeur des Universités
<b>Rousseau Antoine</b>	Chargé de recherche
<b>Samson Adeline</b>	Maître de conférences
<b>Sauloy Jacques</b>	Maître de conférences
<b>Sauvageot François</b>	Maître de conférences
<b>Sauvé Marie</b>	Professeure agrégée
<b>Seuret Stéphane</b>	Maître de conférences
<b>Starynkevitch Jean</b>	Professeur agrégé
<b>Stoltz Gilles</b>	Chargé de recherche
<b>Taïeb Franck</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Teillaud Monique</b>	Chargée de recherche
<b>Thomé Emmanuel</b>	Chargé de recherche
<b>Tosel Emmanuelle</b>	Professeure agrégée
<b>Tosel Nicolas</b>	Professeur de chaire supérieure
<b>Vernier le Goff Claire</b>	Professeure agrégée
<b>Vincent Christiane</b>	Professeure de chaire supérieure
<b>Weil Jacques-Arthur</b>	Maître de conférences
<b>Zinsmeister Michel</b>	Professeur des Universités
<b>Zwald Laurent</b>	Maître de conférences

## Chapitre 2

# Déroulement du concours et statistiques

### 2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mardi 20 avril 2010 ;
- Épreuve d'analyse et probabilités : mercredi 21 avril 2010 .

La liste d'admissibilité a été publiée le lundi 7 juin 2010.

L'oral s'est déroulé du 25 juin au 14 juillet à la Halle aux farines, Université Paris Diderot. La liste d'admission a été publiée le lundi 17 juillet 2010.

Depuis 2006 le concours propose quatre options. Les trois premières ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que Les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques. En 2010 comme en 2009, on peut constater que dans les trois premières options, les nombres d'inscrits sont similaires ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D. Dans les quatre options, les pourcentages d'admis sont similaires. Nous continuons, tant que ces options ne sont pas stabilisées, à ne pas donner de statistiques détaillées par option.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collège) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, Grandes Écoles, classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs).

Les candidats qui ont été admis à un concours de recrutement sont nommés professeurs agrégés stagiaires à la rentrée scolaire de l'année au titre de laquelle est organisé le recrutement et classés, dès leur nomination, selon les dispositions du décret du 5 décembre 1951 susvisé. Ils sont affectés dans une académie par le ministre chargé de l'éducation dans des conditions fixées par arrêté de ce dernier. Le stage a une durée d'un an. Au cours de leur stage, les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée, dans le cadre des orientations définies par l'Etat, sous la forme d'actions organisées à l'université, d'un tutorat, ainsi que, le cas échéant, d'autres types d'actions d'accompagnement. Les modalités du stage et les conditions de son évaluation sont arrêtées par le ministre chargé de l'éducation

"Pour la cession 2011, il nous a été confirmé par le bureau des affectations et des mutations des personnels du second degré (DGRH B2-2) que devraient être reconduites les dispositions de la note de service 2010-047 du 2 avril 2010 relative à l'affectation des lauréats des concours du second degré en qualité de professeur stagiaire, notamment en ce qui concerne les reports de stages accordés aux agrégés qui souhaitent poursuivre des études doctorales. Cependant, lorsqu'un lauréat de l'agrégation est, suite à sa demande, nommé stagiaire et affecté en académie, l'annulation de sa nomination ne peut se faire sans l'accord du recteur

concerné. Notons toutefois, que le lauréat peut demander à effectuer son stage en tant qu'ATER ou docteur contractuel selon les modalités de la note de service."

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse

<http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm>

ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse

<http://www.agreg.org>

où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

**Epreuve "Agir en fonctionnaire de l'état de manière éthique et responsable".**

Une nouvelle épreuve apparaît pour la session 2011. Suivant l'option choisie elle sera cumulée soit à l'épreuve "Algèbre et Géométrie" soit à l'épreuve "Mathématiques pour l'Informatique". Les contenus pour cette nouvelle épreuve sont précisés dans le texte suivant.

Les candidats se verront remettre un extrait court d'un texte officiel en relation avec les connaissances décrites dans le point 1 de l'arrêté du 12 mai 2010 fixant le contenu de la compétence « Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable » et une liste de suggestions utilisables par le candidat pour préparer son exposé. Des données supplémentaires utiles à la préparation pourront être fournies aux candidats.



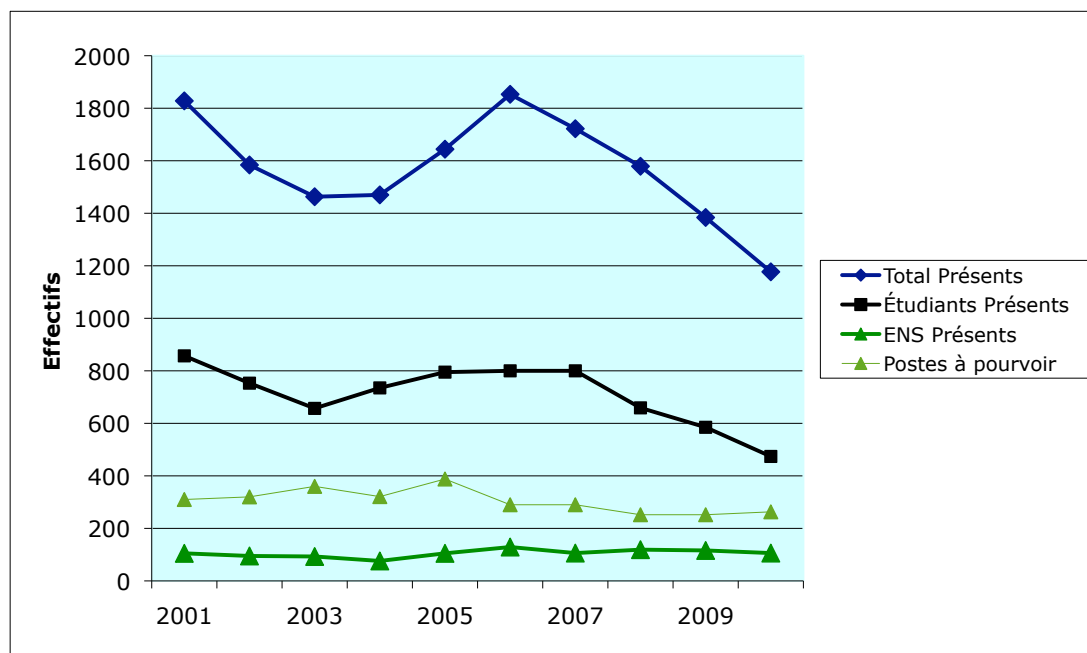
## 2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2010

Après la diminution sensible du nombre de postes au concours 2006 (de 388 postes en 2005 à 290 postes en 2006 et 2007 soit une diminution de plus de 25%), le nombre de postes proposés au concours a subi une nouvelle baisse de 13% en 2008 pour se stabiliser à 252 en 2008 et 2009. Pour 2010 ce nombre à été légèrement revu à la hausse avec un total de 263 postes soit une croissance de 4,4%.

Le nombre d'inscrits a atteint un plafond en 2006-07. Depuis on constate une baisse sensible. Le phénomène est particulièrement marqué en ce qui concerne le nombre de candidats effectivement présents aux deux épreuves écrites. Cette baisse est sûrement en relation forte avec les variations du nombre de postes mis au concours. Elle reflète aussi sans doute la baisse du nombre des étudiants suivant une préparation qui est exigeante. Enfin beaucoup de candidats s'inscrivent mais se sentent insuffisamment préparés. Ce fait semble confirmé par analyse un peu plus fine qui montre que cette diminution est particulièrement visible dans les catégories des étudiants hors ENS.<sup>1</sup>

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
<b>2001</b>	<b>2663</b>	<b>1828</b>	857	105	310	<b>5,9</b>
<b>2002</b>	<b>2343</b>	<b>1584</b>	753	95	320	<b>5,0</b>
<b>2003</b>	<b>2217</b>	<b>1463</b>	657	93	360	<b>4,1</b>
<b>2004</b>	<b>2333</b>	<b>1470</b>	735	76	321	<b>4,6</b>
<b>2005</b>	<b>2560</b>	<b>1644</b>	795	105	388	<b>4,2</b>
<b>2006</b>	<b>2849</b>	<b>1853</b>	800	129	290	<b>6,4</b>
<b>2007</b>	<b>2801</b>	<b>1722</b>	800	106	290	<b>5,9</b>
<b>2008</b>	<b>2491</b>	<b>1579</b>	659	119	252	<b>6,3</b>
<b>2009</b>	<b>2351</b>	<b>1384</b>	585	116	252	<b>5,5</b>
<b>2010</b>	<b>2332</b>	<b>1177</b>	474	106	263	<b>4,5</b>

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



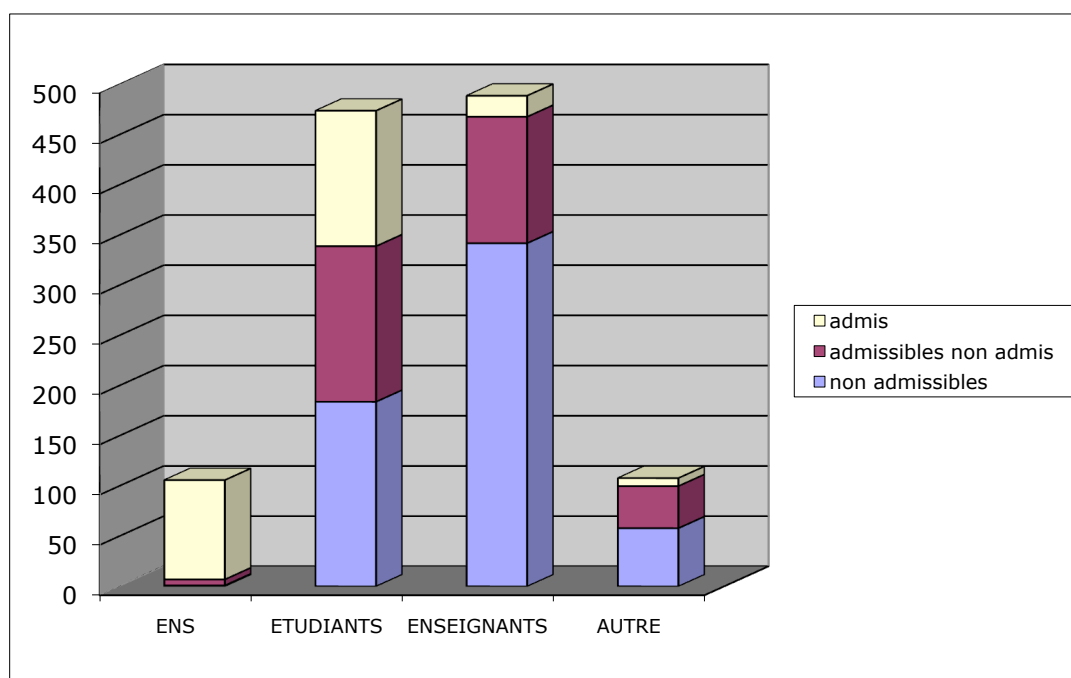
1. Dans cette population, sont regroupées les catégories « étudiant » et « élève de 1<sup>re</sup> année d'IUFM ».

À l'issue de la délibération d'écrit, 592 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,75/20 et le dernier une moyenne de 8,375/20. Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 263 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 18,7/20, le dernier admis une moyenne de 9,8/20.

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle, âge). Dans ces tableaux, **tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents.**

CATÉGORIES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE IUFM 1re ANNÉE	96	63	15	1	23,8	1,6
ÉLÈVE D'UNE ENS	112	106	105	99	99,1	93,4
ÉTUDIANT	542	411	275	134	66,9	32,6
SALARIE SECTEUR PRIVÉ	137	30	16	2	53,3	6,7
SANS EMPLOI	135	54	26	5	48,1	9,3
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	25	10	6	2	60,0	20,0
AGRÉGÉ	8	2	1	0	50,0	0,0
CERTIFIÉ	843	337	104	16	30,9	4,7
PLP	35	5	1	0	20,0	0,0
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	312	134	34	3	25,4	2,2
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	9	1	1	0	100,0	0,0
AUTRE FONCTIONNAIRE	19	5	3	0	60,0	0,0
SURVEILLANT	19	6	0	0	0,0	0,0
AUTRE	40	13	5	1	38,5	7,7
<b>TOTAL</b>	<b>2332</b>	<b>1177</b>	<b>592</b>	<b>263</b>	<b>50,3</b>	<b>22,3</b>

Résultat du concours par catégories professionnelles<sup>2</sup>



Résultat du concours par grandes catégories

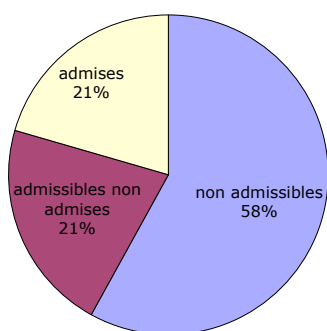
Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, un concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet, comme en 2008 et 2009, 92 % de l'effectif des admis.

2. Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

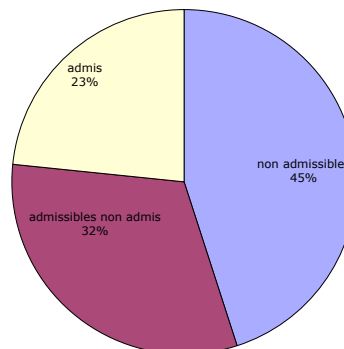
## Répartition selon le genre

GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	754	424	178	87	41,98	20,52
HOMMES	1578	753	414	176	54,98	23,37
TOTAL	2332	1177	592	263	50,30	22,34

## Résultat du concours par genres



## FEMMES



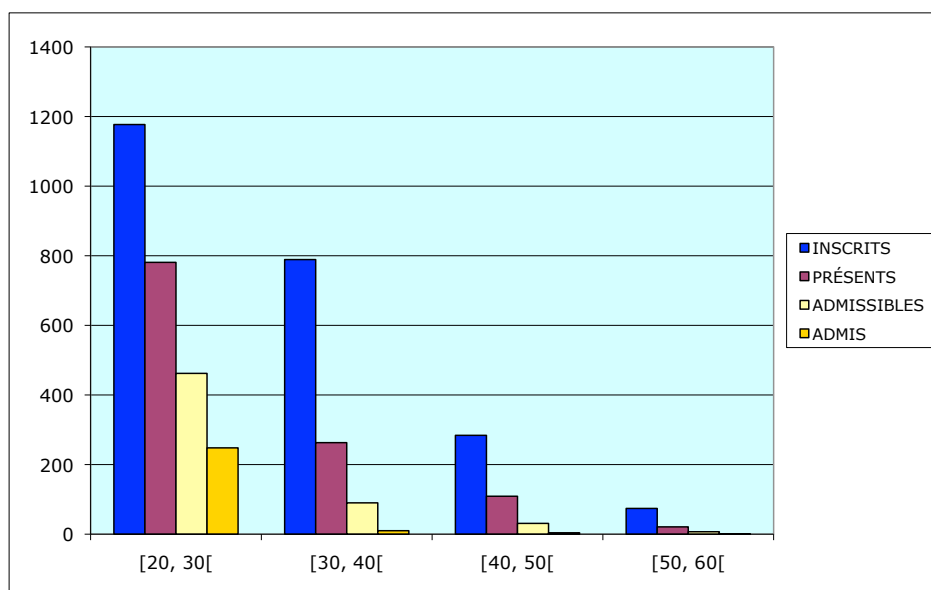
## HOMMES

On constate un remarquable rééquilibrage de la parité pour le succès au concours en 2010 (23,37% d'admis pour 20,52% d'admises). Le résultat est très différent des pourcentages constatés en 2009 (22,01% d'admis pour 10,50% d'admises). Ceci fait suite à une baisse du pourcentage des admises, constatée depuis 2006 alors que les taux de succès chez les femmes (23%) et chez les hommes (24%) étaient pratiquement identiques en 2005. Ces pourcentages sont à apprécier en tenant compte du fait que les femmes ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS, 10% en 2009, à comparer aux 23% de 2010.

## Répartition selon l'âge

TRANCHE D'ÂGE	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS
[20, 30[	1177	781	462	248
[30, 40[	789	263	90	10
[40, 50[	284	109	31	4
[50, 60[	74	21	7	1

Répartition par tranches d'âge



Cette répartition par tranches d'âge confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes constituent en effet l'essentiel des présents mais surtout des admis au concours, 94 % des reçus ont moins de 30 ans. Cependant des candidats plus avancés en âge se sont présentés avec succès.

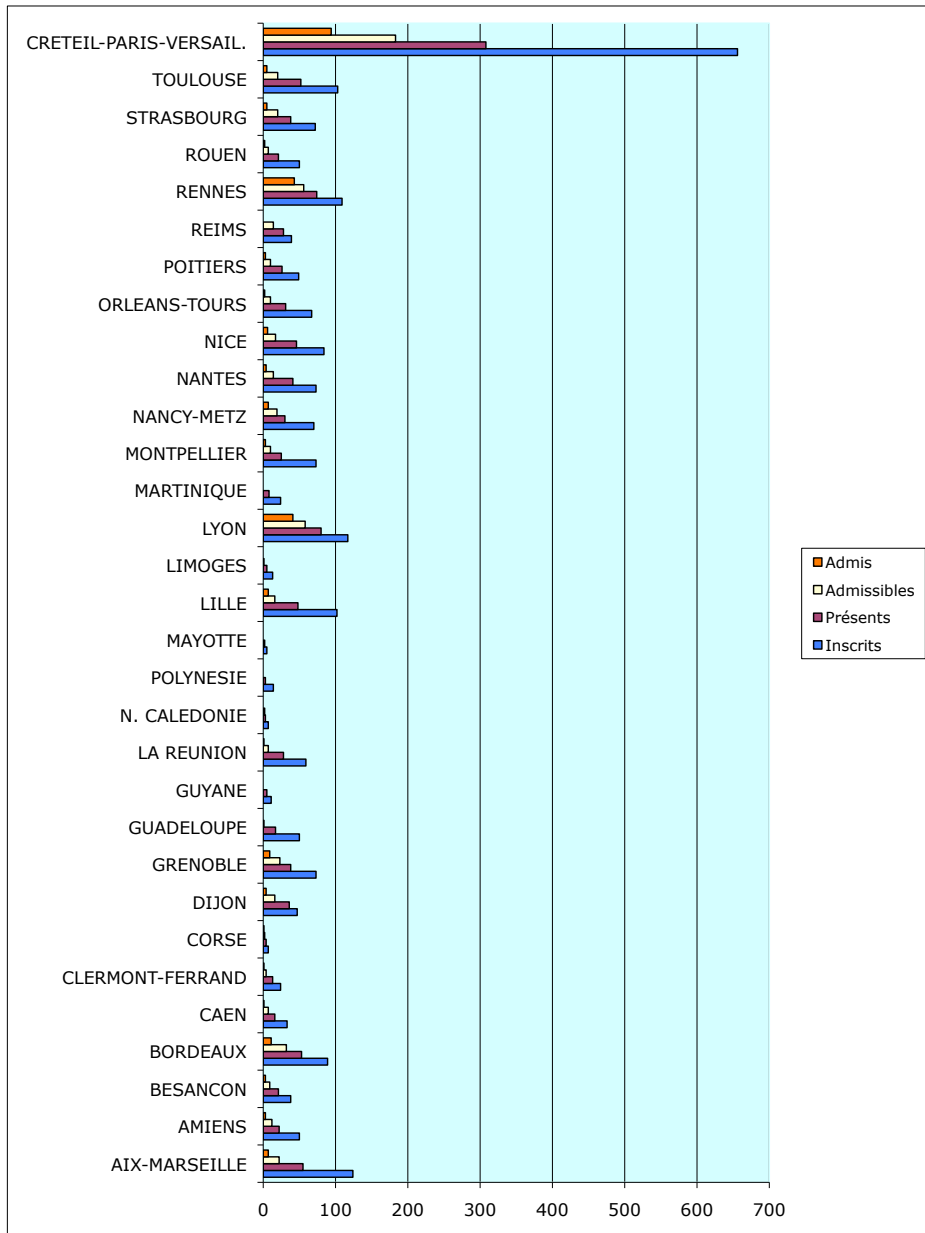
**Répartition selon l'académie**

Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	124	55	22	7
AMIENS	50	22	12	3
BESANCON	38	21	9	3
BORDEAUX	89	53	32	11
CAEN	33	16	7	1
CLERMONT-FERRAND	24	13	4	1
CORSE	7	4	2	1
DIJON	47	36	16	4
GRENOBLE	73	38	23	9
GUADELOUPE	50	17	1	0
GUYANE	11	5	0	0
LA REUNION	59	28	7	1
N. CALEDONIE	7	3	2	0
POLYNESIE	14	3	0	0
MAYOTTE	5	2	0	0
LILLE	102	48	16	7
LIMOGES	13	5	1	0
LYON	117	80	58	41
MARTINIQUE	24	8	0	0
MONTPELLIER	73	25	10	3
NANCY-METZ	70	30	19	7
NANTES	73	41	14	4
NICE	84	46	17	6
ORLEANS-TOURS	67	31	10	2
POITIERS	49	26	10	3
REIMS	39	28	14	0
RENNES	109	74	56	43
ROUEN	50	21	7	2
STRASBOURG	72	38	20	5
TOULOUSE	103	52	20	5
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	656	308	183	94
TOTAL	2332	1177	592	263

Hors ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	605	261	136	50
RENNES	81	47	30	18
LYON	87	50	28	12

ENS seulement	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	51	47	47	44
RENNES	28	27	26	25
LYON	30	30	30	29

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)



## Chapitre 3

# Épreuve écrite de mathématiques générales

### 3.1 Énoncé

#### Préambule et notations

On note  $\mathbf{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbf{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbf{Q}$  le corps des nombres rationnels,  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels et  $\mathbf{C}$  le corps des nombres complexes.

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$ . Pour  $p$  entier  $\geq 1$ , on note  $M_p(K)$  l'algèbre des matrices carrées à  $p$  lignes à coefficients dans  $K$ .

Pour  $A \in M_p(K)$  et  $n$  entier  $\geq 1$ , on note  $S_A$  l'ensemble des matrices  $X \in M_p(K)$  telles que  $X^n = A$ .

- On note  $0_p$  la matrice nulle et  $I_p$  la matrice unité de  $M_p(K)$ . Le groupe des matrices inversibles de  $M_p(K)$  est noté  $GL_p(K)$ .
- On note  $C(A)$  le sous-groupe de  $GL_p(K)$  formé des matrices  $P$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire telles que  $AP = PA$ .
- On note  $K[x]$  l'algèbre des polynômes à coefficients dans  $K$  à une indéterminée  $x$ . Un élément non nul de  $K[x]$  est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.
- Le polynôme minimal de toute matrice  $A$  de  $M_p(K)$  est noté  $m_A$ . C'est un polynôme unitaire de  $K[x]$ .
- On note  $K^p$  l'espace vectoriel des matrices-colonnes à  $p$  lignes à coefficients dans  $K$ . L'image  $\text{Im} A$ , le noyau  $\text{Ker} A$ , les sous-espaces stables de  $A$ , le déterminant  $\det A$ , sont ceux de l'endomorphisme  $v \mapsto Av$  de  $K^p$  canoniquement associé à  $A$ .
- La matrice  $A$  de  $M_p(K)$  est semblable sur  $K$  à une matrice  $A'$  de  $M_p(K)$ , s'il existe  $P \in GL_p(K)$  telle que  $A = PA'P^{-1}$ . Cette relation d'équivalence est la similitude.
- Pour  $k$  entier  $\geq 1$ , on note  $N_k \in M_k(K)$  la matrice triangulaire inférieure

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire dont les coefficients sont

$$N_k(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Pour  $a \in K$ , on pose  $J_k(a) = aI_k + N_k$ . Pour  $k, \ell$  entiers strictement positifs, on note  $0_{k,\ell}$  la matrice nulle à  $k$  lignes et  $\ell$  colonnes. On appelle matrice de Jordan une matrice  $J$  de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(a_1) & 0_{k_1,k_2} & \cdots & 0_{k_1,k_r} \\ 0_{k_2,k_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{k_{r-1},k_r} \\ 0_{k_r,k_1} & \cdots & 0_{k_r,k_{r-1}} & J_{k_r}(a_r) \end{pmatrix}$$

où  $a_i \in K$  et  $k_i$  est entier  $\geq 1$  pour tout indice  $i$  de 1 à  $r$ .

- Lorsque le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $K$ , le théorème de Jordan établit l'existence et l'unicité, à permutation près de l'ensemble des indices  $i$  de 1 à  $r$ , d'une matrice  $J$  de Jordan semblable sur  $K$  à  $A$ . Une telle matrice  $J$  est dite réduction de Jordan de  $A$ .
- On note  $\binom{n}{p}$  le coefficient binomial  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

## Partie I.

Dans cette partie, on fixe une matrice  $A \in M_p(K)$ .

1. Soit  $X$  un élément de  $S_A$ .

- (a) Démontrer que  $X$  commute avec  $A$ .
- (b) Montrer que le polynôme minimal  $m_X$  de  $X$  divise  $m_A(x^n)$ .
- (c) On suppose que  $n$  et  $p$  sont  $\geq 2$ . Montrer que  $S_{0_p}$  est infini.
- (d) On suppose que  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux. Soit  $\lambda \in K$ . Montrer que  $S_{\lambda I_p}$  est vide si et seulement si le polynôme  $x^n - \lambda^p$  n'a pas de racine dans  $K$ .

2. (a) Soit  $A'$  semblable sur  $K$  à  $A$ . Montrer qu'il existe  $P \in GL_p(K)$  telle que

$$S_{A'} = \{PXP^{-1}, X \in S_A\}$$

(b) Soit  $P$  une matrice de  $GL_p(K)$  et  $X \in S_A$ . Démontrer que  $PXP^{-1}$  est aussi dans  $S_A$  si et seulement si  $P$  commute avec  $A$ .

3. On considère une matrice  $A'$  de  $M_p(K)$  semblable sur  $\mathbf{C}$  à  $A$ . Soit  $L$  le corps de décomposition de  $m_A$ , i.e. le plus petit sous-corps de  $\mathbf{C}$  contenant  $K$  et pour lequel  $m_A$  est scindé sur  $L$ .

- (a) Montrer que le corps de décomposition d'un polynôme de  $K[x]$  de degré  $r$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $d \leq r!$ .
- (b) Démontrer qu'une fonction polynôme à  $d$  variables, à coefficients dans  $\mathbf{C}$ , non nulle sur  $\mathbf{C}^d$  est non nulle sur  $K^d$ .
- (c) A l'aide du théorème de Jordan, démontrer que  $A'$  est semblable à  $A$  sur  $L$ .
- (d) Prouver que  $A'$  est semblable à  $A$  sur  $K$ .

4. (a) Soit  $m$  un polynôme unitaire de  $K[x]$  de degré  $\leq p$ . Montrer que l'ensemble des matrices de  $M_p(K)$  de polynôme minimal  $m$  est la réunion d'un ensemble fini de classes de similitude sur  $K$  de matrices de  $M_p(K)$ .

(b) En déduire que  $S_A$  est la réunion d'un ensemble fini d'orbites pour l'action de  $C(A)$  sur  $M_p(K)$  par automorphisme intérieur.

5. (a) On suppose que  $C(Y) = C(A)$  pour toute solution  $Y$  dans  $S_A$ . Montrer que  $S_A$  est fini.

(b) On suppose qu'il existe  $Y \in S_A$  pour laquelle  $C(Y) \neq C(A)$ . Montrer que  $S_A$  est infini.

6. (a) Montrer qu'il existe  $q \in K[x]$  tel que  $q(N_p)^n = I_p + N_p$ .  
 (b) Si  $K = \mathbf{C}$ , montrer que si  $A$  est inversible, alors  $S_A \neq \emptyset$ .

## Partie II.

1. Montrer qu'il existe une norme  $N$  sur le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $M_p(\mathbf{C})$  vérifiant  $N(BC) \leq N(B)N(C)$  pour toutes matrices  $B$  et  $C$  de  $M_p(\mathbf{C})$ .

Dans toute cette partie  $N$  est une telle norme et  $A$  est une matrice de  $GL_p(K)$ ; une matrice  $X$  est dans  $S_A$  si et seulement si  $X^{-n} - B = 0_p$  où  $B = A^{-1}$ . Ceci conduit à introduire la suite :

$$X_{k+1} = (1 + 1/n)X_k - (1/n)BX_k^{n+1}$$

de premier terme  $X_0$  commutant avec  $A$ .

2. On suppose dans cette question que la suite  $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  converge vers une matrice  $Y$  de  $GL_p(\mathbf{C})$ .  
 (a) Démontrer que pour tous  $k, k' \in \mathbf{N}$ , les matrices  $X_k, X_{k'}, Y$  et  $A$  commutent deux à deux.  
 (b) Démontrer que  $Y^n = A$ .  
 (c) On pose  $U_k = X_k Y^{-1} - I_p$ . Démontrer que la suite  $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$  vérifie la relation de récurrence :

$$nU_{k+1} + \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} U_k^j = 0_p.$$

3. Soit  $\mathbf{R}$  le corps des nombres réels.

- (a) Démontrer qu'il existe un unique réel  $r > 0$  tel que

$$nr = \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} r^j.$$

- (b) Démontrer que la suite récurrente définie par  $x_0 \in \mathbf{R}$ ,  $0 \leq x_0 < r$  et

$$x_{k+1} = (1/n) \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} x_k^j$$

converge en précisant sa limite.

4. Soit  $Y \in M_p(\mathbf{C})$  une solution de  $Y^n = A$ . On suppose que  $X_0$  est une matrice de  $M_p(K)$  qui commute avec  $Y$ . Déterminer  $\alpha > 0$  tel que  $N(X_0 - Y) < \alpha$  entraîne que la suite  $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  converge vers  $Y$ .

## Partie III.

Dans cette partie  $A$  est une matrice de  $M_p(K)$ , telle qu'il existe un vecteur  $v$  de  $K^p$  tel que  $(A^j v)_{0 \leq j < p}$  est une base de  $K^p$ .

1. (a) Soit  $X$  un élément de  $S_A$ . Montrer qu'il existe  $h \in K[x]$ , de degré  $< p$ , tel que  $X = h(A)$ .

- (b) En déduire que  $S_A$  est en bijection avec l'ensemble des éléments  $z$  de  $K[x]/(m_A)$  tels que  $z^n = \bar{x}$ , où  $\bar{x}$  est la classe de  $x \pmod{m_A}$ .

On rappelle que  $(m_A)$  est l'idéal de  $K[x]$  engendré par  $m_A$ .

- (c) Montrer que, si  $m_A$  est irréductible dans  $K[x]$ ,  $S_A$  admet au plus  $n$  éléments. En déduire que, si  $m_A$  est un produit de  $s$  polynômes irréductibles distincts,  $S_A$  admet au plus  $n^s$  éléments.
- (d) Montrer que, si  $p$  et  $n$  sont  $\geq 2$ , et si  $m_A = x^p$ , alors  $S_A$  est vide.
- (e) Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $K[x]$  premiers entre eux, et  $r$  un entier  $\geq 1$ . On suppose qu'il existe  $y_1 \in K[x]$  tel que  $y_1^n \equiv g \pmod{f^r}$ . Montrer qu'il existe un élément  $y_2 \in K[x]$ , unique modulo  $f^{r+1}$ , tel que

$$\begin{cases} y_2 \equiv y_1 \pmod{f^r} \\ y_2^n \equiv g \pmod{f^{r+1}} \end{cases}$$

(On pourra poser  $y_2 = y_1 + f^r q$ , et développer  $y_2^n$ .)

(f) Soit  $s$  le nombre de facteurs irréductibles distincts de  $m_A$ . Montrer que  $S_A$  a au plus  $n^s$  éléments.

2. Montrer que, si  $K = \mathbf{R}$  et si  $m_A$  n'a pas de racine réelle,  $S_A$  est non vide.

3. Soit  $r$  et  $s$  des rationnels tels que  $\cos(r\pi) = s$ .

- (a) Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on définit  $a_n = 2 \cos(2^n r\pi)$ . Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ . Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de nombres rationnels, périodique à partir d'un certain rang.
- (b) Démontrer que si  $b_n$  est le dénominateur  $> 0$  de la forme irréductible de  $a_n$ , alors  $b_n^2$  est celui de  $a_{n+1}$ .
- (c) En déduire que  $|s| \in \{0, 1/2, 1\}$ .

4. Soit  $n$  un entier  $> 1$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer  $S_A$  lorsque  $K = \mathbf{R}$ .
- (b) Déterminer  $S_A$  lorsque  $K = \mathbf{Q}$ .
- (c) Déterminer  $S_A$  lorsque  $K = \mathbf{C}$ .

#### Partie IV.

On note  $d_1 = \dim \text{Ker } A$ , et pour tout  $i \geq 2$ ,  $d_i = \dim \text{Ker } A^i - \dim \text{Ker } A^{i-1}$ .

1. On suppose dans cette question qu'il existe  $k \geq 1$  tel que le polynôme minimal de  $A$  est  $x^k$ .

- (a) Démontrer que pour tout  $X$  dans  $S_A$ , il existe un entier  $r$  tel que  $m_X = x^r$  et

$$(k-1)n < r \leq kn.$$

- (b) En déduire que, si  $(k-1)n \geq p$ , alors  $S_A = \emptyset$ .

2. Soit  $X$  une matrice de  $M_p(K)$  telle qu'il existe  $v$  dans  $\text{Ker } X^p$  pour lequel  $(X^j v)_{0 \leq j < p}$  est une base  $\mathcal{B}$  de  $K^p$ .

- (a) Calculer la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $X^n$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- (b) En déduire une réduction de Jordan de  $X^n$ .

- (c) Soit  $A = \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$ . Quel est l'ensemble des valeurs de  $n$  pour lesquelles  $S_A$  est non vide ?

3. On suppose dans cette question que

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{k_r} \end{pmatrix}$$

est une réduction de Jordan de  $A$ .

- (a) Montrer que  $d_i = \text{Card}\{j \leq r, k_j \geq i\}$ .
- (b) On suppose que  $S_A \neq \emptyset$ . Montrer que pour tout entier  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i \in ]ns, n(s+1)[$ .
- (c) Soit  $J = \begin{pmatrix} N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}$ . Pour quels  $n$  a-t-on  $S_J = \emptyset$  ?
- (d) Etablir la réciproque de la question (b) (*On pourra raisonner par récurrence.*)
4. Montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $B$  et  $C$  sont des matrices carrées à coefficients dans  $K$  telles que  $B^p = 0$  et  $\det C \neq 0$ , puis qu'il existe une application bijective  $\varphi : S_B \times S_C \rightarrow S_A$ .
5. On suppose ici que  $K = \mathbf{C}$ . Montrer que  $S_A$  est non vide si et seulement si, pour tout entier  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i \in ]ns, n(s+1)[$ .

## 3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

### Objet du problème

L'objet du problème est l'étude des racines  $n$ -ièmes d'une matrice fixée. Le résultat principal est le critère d'existence d'une racine  $n$ -ième d'une matrice carrée de taille  $p$  à coefficients complexes, critère énoncé dans la dernière question du problème.

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbf{C}$ ,  $A$  une matrice de  $M_p(K)$  et  $n$  un entier supérieur à 1. On note  $S_A$ , l'ensemble des matrices  $X \in M_p(K)$  telles que  $X^n = A$ .

Dans la partie I, on présente plusieurs exemples où l'ensemble  $S_A$  est vide, fini ou infini. Lorsque  $K = \mathbf{C}$  et que la matrice est inversible, on montre que  $S_A$  est non vide.

Dans la partie II, on donne un moyen effectif, via la méthode de Newton, de déterminer une solution de  $X^n = A$ .

Dans la partie III, on considère le cas des matrices associées à des endomorphismes cycliques. Dans ce cas, on majore le cardinal de  $S_A$ . On met également en évidence le rôle du corps des coefficients  $K$ .

Enfin dans la partie IV, de l'étude de l'existence d'une racine  $n$ -ième d'une matrice nilpotente de  $M_p(\mathbf{C})$ , on déduit le critère d'existence d'une racine  $n$ -ième d'une matrice de  $M_p(\mathbf{C})$ .

Le problème faisait intervenir les ingrédients suivants :

- les notions de base de réduction d'endomorphismes, la notion de matrices semblables, de sous-espaces stables, le théorème des noyaux, les notions de norme d'algèbre, de polynôme minimal, de polynôme annulateur. Le théorème de réduction de Jordan était énoncé et admis en préambule de l'énoncé.
- les notions de base sur les polynômes à une ou plusieurs variables, polynômes irréductibles, corps de rupture, corps de décomposition, fonction polynôme associée à un polynôme de plusieurs variables, théorème de Bezout ;
- le calcul numérique, via la méthode de Newton et l'étude de suites numériques.

### Remarques générales sur les copies

La plupart des remarques des années précédentes restent valables et peuvent être lues avec profit par les candidats. Nous développerons cependant les points plus spécifiques au sujet de cette année qui nous semblent plus particulièrement utiles pour les futurs candidats.

L'orthographe mérite d'être soignée, car il est naturel d'attendre d'un enseignant une maîtrise raisonnable de la langue écrite. Les formules d'évitement de démonstration comme " on a clairement " sont à proscrire. L'utilisation d'un résultat d'une question précédente doit être clairement indiquée avec des références précises.

Les correcteurs sont particulièrement satisfaits de la pertinence et de la qualité de la discrimination induite par ce problème. Les candidats ont pu s'exprimer sur de très nombreuses questions concernant des points variés du programme.

### Partie I

Cette partie a été abordée par une grande majorité des candidats.

Les questions I-1-a et I-1-b ont été traitées par tous les candidats. Elles ne présentaient pas de difficulté. Elles permettaient de mettre en place deux arguments extrêmement utiles pour la suite. Certains candidats pensent cependant que la nullité du polynôme minimal d'une matrice  $A$  en  $A$  est liée au théorème de

Cayley-Hamilton, d'autres que le polynôme minimal de  $X$  divise celui de  $X^n$ .

La question I-1-c reposait sur le caractère infini du corps  $K$  de caractéristique zéro, sous-corps de  $\mathbf{C}$ . Il est faux de croire qu'un corps fini puisse se réaliser comme sous-corps de  $\mathbf{C}$ .

La question I-1-d reposait sur le théorème de Bezout. Là-encore, certains candidats ont considéré le cas où  $K$  est un corps fini. Le cas  $\lambda = 0$  était à traiter séparément car le théorème de Bezout était susceptible de faire intervenir des puissances négatives de  $\lambda$ . Ce dernier point a été majoritairement omis.

Les questions I-2-a et I-2-b ne posaient pas de difficulté.

La question I-3 permettait d'établir que deux matrices de  $M_p(K)$  semblables sur  $\mathbf{C}$  étaient semblables sur  $K$ . Il était important de préciser les notions de similitude sur les différents corps. La notion d'extension de corps et de dimension d'une extension sur son corps de base n'est pas toujours maîtrisée. Par ailleurs certains candidats confondent nullité et annulation de la fonction polynôme.

La question I-4, bien qu'élémentaire, a été peu abordée. De nombreux candidats oublient de vérifier que  $C(A)$  agit bien sur  $S_A$  et que la conjugaison dans  $GL_n(K)$  conserve  $S_A$  uniquement pour les matrices de  $C(A)$ . Il semble que la précision de la terminologie ait effrayé les candidats. Par ailleurs, certains candidats pensent que les polynômes minimal et caractéristique caractérisent la classe de similitude d'une matrice.

Les questions I-5 et I-6 étaient probablement les plus difficiles de cette première partie.

## Partie II

La partie II a été traitée par une grande majorité des candidats.

La question II-1 pourtant classique a posé des difficultés. Il s'agissait d'exhiber une norme d'algèbre sur  $M_p(\mathbf{C})$ . Les normes proposées étaient souvent correctes mais les inégalités déduites étaient parfois insolites.

La question II-2-a a été traitée partiellement, la relation binaire " commute avec " n'étant pas transitive il fallait considérer plusieurs couples de matrices. La commutativité avec  $Y$  nécessitait un passage continu à la limite. Dire que  $X_k$  était une fonction de  $X_0$  ne suffisait pas à établir la commutativité : c'était parce qu'il s'agissait d'un polynôme en  $X_0$ . La longueur des démonstrations effectuées était souvent excessive, même pour les candidats qui finissaient par affirmer "une récurrence immédiate montre que" sans jamais l'avoir mise en place.

La question II-2-c nécessitait des calculs qui devaient être justifiés (la commutativité de  $Y$  et  $X_k$  devait être mentionnée).

Les réponses à la question II-3 ont été souvent mal argumentées : les hypothèses des théorèmes étaient souvent négligées. Les théorèmes des valeurs intermédiaires et de bijection ont été confondus. La continuité de la fonction et sa monotonie n'ont pas été évoquées.

La question II-4 a donné également lieu à des confusions : les suites  $(x_k)$  et  $(N(U_k))$  ont souvent été confondues.

## Partie III

Les premières questions de la partie III ont été abordées par la majorité des candidats. Les questions III-3 et III-4, bien que de résolutions indépendantes et élémentaires, n'ont pas été souvent traitées. Les candidats perdus dans la question III-1 ont sans doute renoncé à chercher la suite de cette partie.

La question III-1-b nécessitait une définition claire de l'application bijective considérée.

La question III-3-a devait aboutir à la formule  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$  issue de la trigonométrie. Malheureusement cette formule fut rarement obtenue.

La question III-3-b a conduit à d'étranges erreurs comme celle qui consiste à écrire que la non irréductibilité de la fraction  $c_n/b_n$  est équivalente à  $b_n$  divise  $c_n$  ou  $c_n$  divise  $b_n$ .

La question III-3-c ne présentait aucune difficulté.

La question III-4 pouvait être partiellement traitée de façon indépendante du reste du problème. Seul un nombre infime de candidats a interprété la matrice  $A$  comme une matrice de rotation, ce qui permettait d'imaginer rapidement des racines  $n$ -ièmes dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{Q}$ .

#### **Partie IV**

La question IV-1 a été correctement traitée.

La question IV-3 nécessitant une compréhension fine de la structure des matrices nilpotentes, était difficile.

La question IV-3-d, sans doute très originale, fut la seule question qui n'a été abordée par aucun candidat.

Les questions IV-4 et IV-5 permettaient d'établir le critère d'existence d'une racine  $n$ -ième des matrices complexes via le rapprochement des questions IV-3 et I-6.

#### **Bibliographie**

[1] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques. Algèbre commutative*. Masson-Dunod.

[2] P. Psarrakos, On the  $m$ th roots of a complex matrix, *Electronic Journal of Linear Algebra* ISSN 1081-3810, A publication of the International Linear Algebra Society, Volume 9, (2002) 32-41.

### 3.3 Corrigé

#### Partie I.

1.

1.(a) Comme  $A = X^n$ , on a  $XA = X^{n+1} = AX$  donc  $X$  commute avec  $A$ .

1.(b) On a  $m_A(X^n) = m_A(A) = 0$  donc le polynôme minimal de  $X$  divise  $m_A(x^n)$ .

1.(c) Si  $n, p \geq 2$ ,  $S_{0,p}$  contient l'ensemble des matrices  $X = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq p}$  dont tous les coefficients sont nuls sauf  $x_{1,p} \in K$ . Comme  $K$  est infini,  $S_{0,p}$  est infini.

1.(d) Si  $X \in S_{\lambda I_p}$  alors  $(\det X)^n = \lambda^p$ , donc le polynôme  $x^n - \lambda^p$  a une racine dans  $K$ .

Réciproquement si  $\lambda = 0$  le polynôme a une racine et  $S_{0,p}$  n'est pas vide. Supposons que  $\lambda \neq 0$  et que le polynôme  $x^n - \lambda^p$  ait une racine  $\alpha$  dans  $K$ . Comme  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux, il existe  $u, v \in \mathbf{Z}$  tels que  $nu + pv = 1$ . Ainsi  $\lambda = (\lambda^u)^n (\lambda^p)^v = (\lambda^u \alpha^v)^n$ . Donc  $x^n - \lambda$  a une racine  $\beta = \lambda^u \alpha^v$  dans  $K$ . Alors  $\beta I_p \in S_{\lambda I_p}$ . Donc  $S_{\lambda I_p}$  est vide si et seulement si le polynôme  $x^n - \lambda^p$  n'admet pas de racine dans  $K$ .

2.

2.(a) Soit  $P \in \text{GL}_d(K)$ , tel que  $A' = PAP^{-1}$ . Alors  $X^n = A$  si et seulement si  $PX^n P^{-1} = (PXP^{-1})^n = A'$ . Donc  $S_{A'} = \{PXP^{-1}, X \in S_A\}$ .

2.(b) On a  $PAP^{-1} = (PXP^{-1})^n$ . Donc  $PXP^{-1} \in S_A$  si et seulement si  $P$  commute avec  $A$ .

3.

3.(a) Soit  $f \in K[X]$  avec degré de  $f$  égal à  $r$ . Soit  $a$  une racine complexe de  $f$ , alors  $K[a]$  est de degré  $\leq r$  sur  $K$ . Une autre racine complexe  $b$  de  $f$  annule un polynôme de  $K[a][x]$  de degré  $\leq r-1$  donc engendre une extension  $K[a, b]$  de degré inférieur à  $r(r-1)$ . Par induction on obtient que le corps de décomposition de  $f$  sur  $K$  est de degré inférieur à  $r!$  sur  $K$ .

3.(b) Le résultat est vrai pour  $d = 1$  car tout polynôme non nul admet une valeur non nulle dans le corps infini  $K$ . On suppose le résultat établi pour  $d-1$ . Soit  $f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_d]$  non nul sur  $\mathbf{C}^d$ . On écrit  $f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=0}^r f_i(x_1, \dots, x_{d-1}) x_d^i$ . Le polynôme  $f$  est non nul sur  $\mathbf{C}^d$  donc il existe  $i$  avec  $f_i(x_1, \dots, x_{d-1})$  non nul sur  $\mathbf{C}^{d-1}$ .

Il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}) \in K^d$  tel que  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}, x_d)$  est un polynôme non nul sur  $\mathbf{C}$  donc sur  $K$ .

3.(c) Comme  $A$  et  $A'$  sont semblables sur  $\mathbf{C}$ , elles ont même polynôme minimal  $m_A \in K[x]$ . Ce polynôme  $m_A$  est scindé dans  $L$  donc  $A$  et  $A'$  sont semblables sur  $L$  à la même réduction de Jordan. Donc  $A$  et  $A'$  sont semblables dans  $L$ .

3.(d) Notons  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  une base de  $L$  sur  $K$ . Comme  $A$  est semblable à  $A'$  sur  $L$ , il existe  $P \in \text{GL}_p(L)$  avec

$A' = PAP^{-1}$ . Écrivons  $P = \sum_{i=1}^d P_i e_i$  pour  $P_i \in M_p(K)$ . Pour  $1 \leq i \leq d$ ,  $A'P_i = P_i A$  et le polynôme en  $d$  variables

$\det(\sum_{i=1}^d P_i x_i)$  est non nul dans  $L^d$  donc non nul dans  $K^d$ . Ainsi il existe une matrice  $Q \in M_p(K)$  avec  $A'Q = QA$

et  $A$  est semblable à  $A'$  sur  $K$ .

4.

4.(a) A polynôme minimal  $m$  fixé, il n'existe qu'un nombre fini de matrices de Jordan, donc un nombre fini de classes de similitude sur  $K$ .

4.(b) Le polynôme minimal  $m_X$  divise  $m_A(x^n)$  donc par réduction sur  $\mathbf{C}$ , le nombre d'orbites est fini sur  $\mathbf{C}$  donc aussi sur  $K$ .

5.

5.(a) D'après I.4.(b), l'ensemble  $S_A$  est réunion finie d'orbites pour l'action de  $C(A)$ . Comme le commutant de tout élément de  $(S_A)$  est  $C(A)$ , les orbites sont réduites à un élément. Donc l'ensemble  $S_A$  est fini.



**5.(b)** Soit  $P \in C(A) - C(Y)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $I_p + \varepsilon P \in C(A) - C(Y)$  et pour  $\varepsilon$  assez petit  $I_p + \varepsilon P \in GL_p(\mathbb{K})$ . Ainsi pour tous les  $\varepsilon > 0$  assez petits  $(I_p + \varepsilon P)Y(I_p + \varepsilon P)^{-1}$  décrivent des éléments distincts de  $S_A$ . Donc  $S_A$  est infini.

**6.**

**6.(a)** Considérons le développement limité à l'ordre  $p-1$  de  $f(x) = (1+x)^{1/n}$  :

$$f(x) = q(x) + O(x^p)$$

avec  $q \in \mathbb{Q}[X]$  et degré de  $q \leq p-1$ . Par unicité de la partie régulière, le développement limité à l'ordre  $p-1$  de  $f(x)^n$  s'obtient en tronquant à l'ordre  $p-1$  le polynôme  $q(x)^n$ . Or  $f(x)^n = 1+x = q(x) + x^p h(x)$  avec  $h \in \mathbb{Q}[x]$ . Alors  $q(N_p)^n = I_p + N_p$  avec  $q \in \mathbb{Q}[x] \subset K[x]$ .

**6.(b)** Soit  $A \in GL_d(\mathbb{C})$ . D'après le théorème de Jordan, il existe  $r \geq 1$ ,  $(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}_{>0}^r$ ,  $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^{*r}$  et  $P \in GL_d(\mathbb{C})$  tels que  $P^{-1}AP$  soit la matrice de Jordan de blocs  $J_{k_1}(a_1), \dots, J_{k_r}(a_r)$ . D'après I.6.(a), pour tout  $1 \leq i \leq r$ , il existe un polynôme  $q_{k_i} \in K[x]$  tel que  $q_{k_i}(N_{k_i})^n = I_{k_i} + N_{k_i}$ . Pour tout  $1 \leq i \leq r$  choisissons  $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$  une racine  $n$ -ième de  $a_i \neq 0$ . Ainsi

$$(\alpha_i q_{k_i}(N_{k_i}/a_i))^n = a_i I_{k_i} + N_{k_i}.$$

Soit  $X'$  la matrice bloc  $\alpha_i q_{k_i}(N_{k_i}/a_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Alors  $PX'P^{-1} \in S_A$ . Donc si  $A$  est inversible et  $K = \mathbb{C}$  alors  $S_A$  n'est pas vide.

## Partie II.

**1.** On peut prendre pour  $N$  la norme uniforme sur la boule unité pour une norme  $z \mapsto |z|$  quelconque de  $\mathbb{C}^p$ , autrement dit  $N(A) = \max_{|v|=1} |Av|$ .

**2.**

**2.(a)** Les matrices  $X_k$  et  $A$  sont dans l'algèbre commutative  $K[A, X_0]$  et par continuité du produit,  $Y$  commute avec toute matrice de  $K[A, X_0]$ .

**2.(b)** Par continuité du produit et convergence de toute suite extraite, on a  $Y = (1 + 1/n)Y - (1/n)BY^{n+1}$ . D'où  $Y^n = A$ .

**2.(c)** Comme  $X_k = (U_k + I_p)Y$  avec la récurrence et la formule du binôme, on obtient

$$nU_{k+1} + \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} U_k^j = 0_p, k \geq 0.$$

**3.**

**3.(a)** La fonction polynôme  $t \mapsto n - \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j+1} t^j$  est strictement décroissante, vaut  $n$  en 0 et tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ . Par conséquent, il existe un unique  $r > 0$  satisfaisant l'égalité annoncée.

**3.(b)** La fonction polynôme  $t \mapsto (1/n) \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} t^j$  est croissante, convexe et a pour seuls points fixes positifs  $r$  et 0. Donc  $x_k$  décroît et converge vers 0 pour  $0 \leq x_0 < r$ .

**4.** Pour  $N(U_0) = N(X_0 - Y)N(Y)^{-1} = x_0 \leq r$ , on a par récurrence,  $N(U_k) \leq x_k$ . Par conséquent  $X_k$  converge vers  $Y$ .

**Partie III.****1.**

**1.(a)** Par hypothèse, il existe  $h \in K[x]$  de degré  $\leq p-1$  tel que  $Xv = h(A)v$ . Comme  $X \in S_A$ ,  $X$  commute avec  $A$ , donc  $XA^j v = h(A)A^j v$ ,  $0 \leq j < p$ . Donc  $X = h(A)$ .

**1.(b)** Pour tout  $f \in K[x]$ ,

$$X = f(A) \in S_A \iff f(A)^n = A \iff m_A | f^n - x \iff \overline{f^n} = \overline{x} \in K[x]/m_A.$$

L'évaluation  $\varphi : \{f \in K[x] | \overline{f^n} = \overline{x}\} \rightarrow S_A$ ,  $f \mapsto f(A)$  se factorise donc par l'injection  $\overline{\varphi} : \{\overline{f} \in K[x]/(m_A) | \overline{f^n} = \overline{x}\} \rightarrow S_A$ ,  $\overline{f} \mapsto f(A)$  qui est surjective d'après III.1.(a). Donc  $\overline{\varphi}$  est une bijection.

**1.(c)** Si  $m_A$  est irréductible,  $K[x]/(m_A)$  est un corps. Le polynôme  $t^n - \overline{x}$  a au plus  $n$  solutions dans  $K[x]/(m_A)$ . Donc  $\{\overline{f} \in K[x]/(m_A) | \overline{f^n} = \overline{x}\}$  et  $S_A$  (d'après III.1.(b)) ont au plus  $n$  éléments.

**1.(d)** Soit  $f = \sum_{j=0}^{\ell} a_j x^j \in K[x]$ . Si  $\overline{f^n} = \overline{x} \in K[x]/(x^p)$  alors  $a_0 = 0$ . Donc  $\overline{f^n} = \overline{x^n h \overline{x}}$  pour  $h \in K[x]$ . Or  $n, p \geq 2$ ,  $\overline{f^n} \neq \overline{x} \in K[x]/(x^p)$ . Donc  $\{\overline{f} \in K[x]/(m_A) | \overline{f^n} = \overline{x}\}$  et  $S_A$  (d'après III.1.(b)) sont vides.

**1.(e)** Posons dans  $K[x]$ ,  $y_2 = y_1 + f^r q$  et  $y_1^n = g + f^r h$ . Ainsi il existe  $w \in K[x]$ ,  $y_2^n = y_1^n + n y_1^{n-1} f^r q + f^{r+1} w = g + f^r (n y_1^{n-1} + h) + f^{r+1} w$ . Donc  $y_2^n \equiv g \pmod{f^{r+1}}$  si et seulement si  $f | n y_1^{n-1} q + h$  dans  $K[x]$ . Or  $y_1^n \equiv g \pmod{f^r}$  et  $f \wedge g = 1$ , donc  $y_1 \wedge f = 1$ . Ainsi  $y_1^{n-1}$  est inversible dans  $K[x]/(f)$ . Donc il existe un unique  $q \in K[x]/(f)$  tel que  $n y_1^{n-1} q + h \equiv 0 \pmod{f}$ . Donc il existe un élément  $y_2 \in K[x]$  unique modulo  $f^{r+1}$  tel que le système de congruence de III.1.(e) soit satisfait.

**1.(f)** Ecrivons  $m_A = \prod_{i=1}^s f_i^{r_i}$ , où les  $f_i$  sont des facteurs irréductibles distincts. D'après le théorème chinois de résolution des congruences simultanées

$$\{z \in K[x]/(m_A) | z^n = \overline{x}\} \cong \prod_{i=1}^s \{z_i \in K[x]/(f_i^{r_i}) | z_i^n \equiv x \pmod{f_i^{r_i}}\}.$$

Si  $f_i \wedge x = 1$  d'après III.1.(e), les cardinaux de  $\{z_i \in K[x]/(f_i^{r_i}) | z_i^n \equiv x \pmod{f_i^{r_i}}\}$  et de  $\{z_i \in K[x]/(f_i^{r_i}) | z_i^n \equiv x \pmod{f_i}\}$  sont égaux et inférieurs à  $n$  d'après III.1.(c). Si  $f_i = x$  et si  $r_i = 1$  alors le cardinal de  $\{z_i \in K[x]/(x) | z_i^n \equiv x \pmod{x}\} \leq n$  car  $K$  est un corps. Si  $f_i = x$  et  $r_i > 1$ ,  $\{z \in K[x]/(x^{r_i}) | z^n \equiv x \pmod{x^{r_i}}\}$  est vide d'après III.1.(d). Par conséquent, les cardinaux de  $\{z \in K[x]/(m_A) | z^n = \overline{x}\}$  et de  $S_A$  (d'après III.1.(b)) sont inférieurs à  $n^s$ .

**2.** Si  $K = \mathbf{R}$  et  $m_A$  n'a pas de racine réelle, alors ses facteurs irréductibles sont de degré 2. Soit  $f$  un tel facteur, ainsi  $\mathbf{R}[x]/(f) \cong \mathbf{C}$  est algébriquement clos. Donc si  $f$  est de multiplicité 1 dans la décomposition de  $m_A$ ,  $\{z \in \mathbf{R}[x]/(f) | z^n \equiv x \pmod{f}\}$  est non vide. D'après l'isomorphisme III.1.(f) donné par le théorème chinois et III.1.(b), les ensembles  $\{z \in K[x]/(m_A) | z^n = \overline{x}\}$  et  $S_A$  sont non vides. Si  $f$  n'est pas de multiplicité 1 dans  $m_A$ , comme  $m_A$  n'a pas de racine réelle, 0 n'est pas racine de  $m_A$ , et  $S_A$  n'est pas vide d'après III.1.(f).

**3.**

**3.(a)** Pour tout réel  $t$ , on a  $2 \cos(2t) = 4 \cos^2 t - 2$ . Donc  $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ . Comme  $a_0 = 2s$ , par récurrence  $a_n$  est rationnelle. Elle est périodique à partir d'un certain rang car récurrente et ayant un nombre fini de valeurs puisque  $a_n$  est deux fois la partie réelle d'une racine  $2d$ -ième de l'unité pour  $d$  dénominateur  $> 0$  de  $r$ .

**3.(b)** Soit  $c_n = a_n b_n$ , alors  $a_{n+1} = (c_n^2 - 2b_n^2)/b_n^2$  et  $b_n$  est premier avec  $c_n^2 - 2b_n^2$  donc aussi  $b_n^2$ .

**3.(c)** Puisque  $b_{n+1} = b_n^2$  et que la suite des entiers  $b_n$  est périodique à partir d'un certain rang,  $b_n = 1$  pour tout  $n$ ,  $2s$  est entier et  $|s| \leq 1$  car  $|\cos t| \leq 1$  pour tout réel  $t$ . Donc  $|s| \in \{0, 1/2, 1\}$ .

**4.**

**4.(a)** Pour  $K = \mathbf{R}$ , on obtient les solutions des  $n$  racines  $n$ -ièmes de  $i$ . Soit

$$\cos(2k\pi/n + \pi/2n)I_2 + \sin(2k\pi/n + \pi/2n)A, \quad 0 \leq k \leq n-1;$$

ou encore :  $A$  est la rotation d'angle  $\pi/2$ ; ses  $n$  racines  $n$ -ièmes sont donc les rotations d'angle  $\pi/2n + 2k\pi/n$ .

**4.(b)** Pour  $K = \mathbf{Q}$ , vu les solutions réelles, les solutions ne peuvent être que  $A$  et  $-A$ . La matrice  $A$  convient

si et seulement si  $n$  est congru à 1 modulo 4 et  $-A$  pour  $n$  congru à 3 modulo 4.

**4.(c)** Pour  $K = \mathbf{C}$ , la matrice  $A$  admet  $n^2$  racines  $n$ -ièmes,  $uI_2 + vA$  semblables aux matrices diagonales de valeurs propres les racines  $n$ -ièmes de  $i$  et  $-i$ . Autrement dit, avec les traces et le déterminant,  $2u = \alpha\omega^k + \beta\omega^{k'}$  avec  $\omega = e^{2i\pi/n}$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\{e^{i\pi/2n}, e^{-i\pi/2n}\}$  et  $v$  l'une ou l'autre des racines carrées de  $\omega^{k+k'} - u^2$ .

Pour déterminer quelle est la bonne racine carrée, on utilise le cas  $K = \mathbf{R}$  : si  $n$  est impair, les  $n^2$  solutions sont les rotations ci-dessus multipliées par les matrices scalaires  $z_n^k$ , avec  $z_n = e^{2\pi i/n}$ . Pour  $n$  pair, ce sont d'une part ces matrices, d'autre part leurs inverses multipliées par  $z_{2n}$ .

Solution alternative : il existe une matrice  $P \in \text{GL}_2(\mathbf{C})$  avec  $A = PA'P^{-1}$  avec  $A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ . Les éléments de

$S_A$  sont donc les  $n^2$  matrices de la forme  $PX'P^{-1}$  où  $X'$  décrit l'ensemble des matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi/2n+2ki\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2n+2k'i\pi/n} \end{pmatrix}, (k, k') \in \{0, \dots, n-1\}^2.$$

#### Partie IV.

**1.**

**1.(a)** Comme  $A^{k-1}$  n'est pas nulle,  $X^{(k-1)n}$  non plus. Comme  $A^k$  est nulle,  $X^{kn}$  aussi. Donc  $k$  est le plus petit entier  $\geq r/n$ .

**1.(b)** On a  $r \leq p$ .

**2.**

**2.(a)** Soit  $E_{ij}$  la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne  $i$  colonne  $j$  égal à 1. Puisque  $X^n X^j v = X^{n+j} v$ , la matrice cherchée est  $\sum_{1 \leq j \leq p-n} E_{j, j+n}$ .

**2.(b)** La réduction de Jordan de  $X^n$  est donc nulle si  $n \geq p$ . Autrement pour  $0 \leq j \leq n-1$  le cycle engendré par les images par  $X^n$  de  $X^j v$  est de longueur  $\lfloor (p-j)/n \rfloor$ . Donc la réduction de Jordan de  $X^n$  est constituée de  $n$  matrices carrées de Jordan de taille  $\lfloor (p-j)/n \rfloor$  pour  $0 \leq j < n$ . En résumé si  $p = nq + r$ , avec  $q$  et  $r$  quotient et reste de la division euclidienne de  $p$  par  $n$ , la réduction de Jordan de  $X^n$  est constituée de  $r$  blocs de taille  $q+1$  et de  $n-r$  blocs de taille  $q$ . (Ceci reste vrai pour  $n \geq p$ ).

**2.(c)** Ici  $k=2$ . Donc d'après IV.1.(b),  $S_A = \emptyset$  si  $n \geq 4$ . Si  $n=1$ ,  $S_A = \{A\}$  non vide. Si  $n=2$ , il existe  $P \in G_4(K)$  tel que  $PN_4P^{-1} \in S_A$  non vide. Si  $n=3$  et  $X \in S_A$ , alors  $X^3 \neq 0$  dont  $X$  est nilpotente d'ordre 4. Donc  $\text{rg} X^3 = 1 \neq \text{rg} A$  absurde! Donc  $S_A$  est vide. L'ensemble des valeurs de  $n$  pour lesquelles  $S_A$  est non vide est  $\{1, 2\}$ .

**3.**

**3.(a)** On a

$$\dim N_k^i - \dim N_k^{i-1} \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq i \geq 1 \\ 0 & \text{si } k < i \end{cases}$$

D'où  $d_i = \text{Card}\{j \leq r, k_j \geq i\}$ .

**3.(b)** Pour  $B \in M_p(K)$  et  $i \geq 2$ , notons  $d_i(B) = \dim B^i - \dim B^{i-1}$ . Ainsi

$$d_i(A) = \dim(X^n)^i - \dim(X^n)^{i-1} = \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} d_j(X).$$

Remarquons que les suites  $(d_i)_{i \geq 2}$  et  $(d_i(X))_{i \geq 2}$  sont décroissantes. Donc  $nd_{in}(X) \leq d_i \leq nd_{(i-1)n+1}$  et  $nd_{i(n+1)}(X) \leq d_{i+1} \leq nd_{in+1}(X)$ . Supposons qu'il existe  $i \geq 2$  et  $s \in \mathbf{N}$  tels que  $ns < d_{i+1} \leq d_i < n(s+1)$ . Alors  $s < d_{in+1}(X) \leq d_{in}(X) < s+1$ . Ces inégalités entre entiers sont absurdes. Pour tout entier  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i \in ]ns, n(s+1)[$ .

**3.(c)** Pour  $A = J$ , on a  $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1$  et  $d_j = 0$  si  $j \geq 4$ . D'après IV.3.(b), les seuls  $n$  possibles pour avoir  $S_J \neq \emptyset$  sont donc 1 et 3. Si  $n=1$ , alors  $S_J = \{J\} \neq \emptyset$ . Si  $n=3$ , d'après IV.2.(b),  $N_J^3$  est semblable à  $J$  donc  $S_J$  est non vide. L'ensemble des  $n$  tels que  $S_J = \emptyset$  est  $\mathbf{N} - \{0, 1, 3\}$ .

**3.(d)** D'après I.2.(a), nous pouvons nous ramener au cas  $J = A$ . Effectuons une récurrence sur le nombre de blocs  $M$  de  $J$  : si  $M < n$ ,  $d_1 = M$ ,  $d_2 < d_1$ , donc par l'hypothèse  $d_2 = 0$ , donc  $J = 0$ , et est une puissance  $n$ -ième. Sinon, soit  $m$  la plus grande taille des blocs de Jordan. Si  $d_m \geq n$ , nous enlevons  $n$  blocs de taille  $m$ , qui forment une puissance  $n$ -ième d'après la question VI.2.(b). Les "nouveaux"  $d_i$  sont obtenus à partir des anciens en leur soustrayant  $n$ , donc l'hypothèse est conservée. Si  $d_m < n$ , l'hypothèse implique que  $d_{m-1} \geq n$ , et nous enlevons  $d_m$  blocs de taille  $m$  et  $n - d_m$  de taille  $d_{m-1}$ , qui, d'après VI.2.(b), forment les blocs d'une puissance  $n$ -ième. Par ailleurs, les nouveaux  $d_k$  sont égaux aux anciens moins  $n$  (sauf pour  $d_m$ , qui devient nul.)

**4.** Ecrivons  $m_A = x^r f$  avec  $x \wedge f = 1$ . D'après le théorème des noyaux  $K^p = \text{Ker } A^r \oplus \text{Ker } f(A)$ . La matrice  $A$  laisse stable les espaces propres  $E_1 = \text{Ker } A^r$  et  $E_2 = \text{Ker } f(A)$ . Donc  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $B$  (resp.  $C$ ) est la projection de  $A_{E_1}$  (resp.  $A_{E_2}$ ) sur  $E_1$  (resp.  $E_2$ ). Ainsi  $B^r = 0 = B^p$  (car  $p \leq r$ ) et le polynôme minimal de  $C$  est  $f$  avec  $f(0) \neq 0$  donc  $0$  n'est pas valeur propre de  $C$  et  $\det C \neq 0$ . Soit  $X \in S_A$ . D'après I.1.(a),  $X$  commute avec  $A$  donc laisse stable  $\text{Ker } A^p$  et  $\text{Ker } f(A)$  (si  $v \in \text{Ker } f(A)$ ,  $f(A)Xv = Xf(A)v = 0$  et  $Xv \in \text{Ker } f(A)$ ), donc  $X = P \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ . Donc on a la bijection

$$\varphi : S_B \times S_C \rightarrow S_A, (X_1, X_2) \mapsto P \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**5.** Si  $K = \mathbf{C}$ , alors d'après I.6.(b)  $S_C$  est non vide. D'après IV.3.(d),  $S_B$  est non vide si et seulement si, pour tout  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i(B) \in ]ns, n(s+1)[$ . Comme  $C$  est inversible,  $d_i(A) = d_i(B)$ ,  $i \geq 2$ . D'après IV.4. les ensembles  $S_A$  et  $S_B \times S_C$  sont en bijection. Donc  $S_A$  est non vide si et seulement si, pour tout  $s \geq 0$ , il existe au plus un indice  $i$  tel que  $d_i(A) \in ]ns, n(s+1)[$ .

# Chapitre 4

## Épreuve écrite d'analyse et probabilités

### 4.1 Énoncé

#### Objectif et notations

Dans ce problème, nous allons nous intéresser aux niveaux d'énergie de l'oscillateur classique et de l'oscillateur harmonique quantique.

Les différentes parties du problème peuvent être, dans une assez large mesure, traitées de manière indépendante.

- $\mathbf{R}$  désigne l'ensemble des réels,  $\mathbf{C}$  celui des nombres complexes,  $\mathbf{N}$  celui des entiers naturels, et  $\mathbf{N}^*$  celui des entiers naturels non nuls.
- Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $[[1, n]]$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et  $n$ .
- Pour  $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$  et  $d \in \mathbf{N}$ , on note  $\mathcal{C}^n(\mathbf{R}^d)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  de  $\mathbf{R}^d$  dans  $\mathbf{R}$ .
- On note  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  l'ensemble des fonctions infiniment dérivables de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ .
- On note  $L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  (respectivement  $L^2(\mathbf{R})$ ) l'ensemble des classes de fonctions intégrables de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  (respectivement de classes de fonctions réelles de carré intégrable) au sens de Lebesgue.
- Étant donnée une mesure  $\mu$  sur une tribu d'un ensemble  $X$ , on note  $L^2(\mu)$  l'ensemble des (classes de) fonctions de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  de carré intégrable pour la mesure  $\mu$ .
- Étant donnée  $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ , on note  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-iy\xi} dy.$$

- Étant donnée une matrice  $M$ , on note  $M^T$  sa transposée.
- La notation  $M_n(\mathbf{R})$  recouvre l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et à coefficients réels.

- Le gradient d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^{2d})$  est défini comme la fonction à valeurs vectorielles

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{2d}} \end{pmatrix}.$$

- Étant donné un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^{2d}$  et une fonction  $g : U \rightarrow \mathbf{R}^{2d}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  s'écrivant  $g(y) = (g_1(y), \dots, g_{2d}(y))$ , on définit la jacobienne de  $g$  en  $y \in U$  comme

$$\nabla g(y) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \right)_{1 \leq i, j \leq 2d} \in M_{2d}(\mathbf{R}).$$

## I. Polynômes de Hermite

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $H_n$  sur  $\mathbf{R}$  par

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2/2} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y^2/2}).$$

- Rappeler la valeur de  $\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2} dy$ .
- Calculer  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_2$ .
- Pour  $n \in \mathbf{N}$ , montrer que  $H_n$  est une fonction polynomiale et en préciser le degré et le coefficient dominant.
- On considère la mesure  $\mu$  sur  $\mathbf{R}$  définie à partir de la mesure de Lebesgue grâce à la fonction de poids  $y \mapsto \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ . On définit  $L^2(\mu)$  avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbf{R}} f(y) g(y) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy = \int_{\mathbf{R}} f g d\mu.$$

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $H_n$  est dans  $L^2(\mu)$ .
- Montrer que  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une famille orthogonale de l'espace  $L^2(\mu)$ .
- Calculer la norme de  $H_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

## II. Oscillateur harmonique classique

On considère une particule de masse  $m$ . On note  $x(t)$  la position de la particule à l'instant  $t$ . La fonction  $x$  est ainsi à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . L'équation du mouvement de cette particule s'écrit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (4.1)$$

On suppose que  $k$  est une constante réelle positive et on définit le potentiel  $V$  par

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2.$$

On pose

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1. Soient  $x_0$  et  $y_0$  deux réels donnés.

Résoudre l'équation différentielle (4.1) avec les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x'(0) = y_0. \quad (4.2)$$

2. Soient  $T$  un réel non nul et  $x_0, x_T$  deux réels.

Suivant les paramètres  $T$  et  $x_T$ , donner, lorsqu'il n'est pas vide, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (4.1) avec les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x(T) = x_T.$$

3. Soit  $x$  une solution de l'équation (4.1) satisfaisant les conditions (4.2). On définit l'impulsion de la particule  $p = m \frac{dx}{dt}$  et  $Y = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ .

Donner un système différentiel du premier ordre vérifié par  $Y$ .

4. On note  $E_c = \frac{p^2}{2m}$  l'énergie cinétique de la particule et  $\mathcal{E}(t) = E_c(t) + V(t)$  l'énergie totale à l'instant  $t$ . Montrer que la fonction  $\mathcal{E}$  est constante, calculer sa valeur en fonction de  $(x_0, y_0)$  et déterminer l'ensemble formé par ces valeurs lorsqu'on fait varier la condition initiale  $(x_0, y_0)$ .

### III. Oscillateur harmonique quantique

L'objet de cette partie et de la suivante est de montrer qu'en mécanique quantique, les niveaux d'énergie d'une particule dans un puits de potentiel sont quantifiés. On cherche donc à déterminer des réels  $E_n$  et des fonctions  $\Psi_n$  à valeurs réelles tels que  $\Psi_n$  soient de classe  $\mathcal{C}^2$ , de carré intégrable ainsi que ses dérivées première et seconde et pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x), \quad (4.3)$$

où les constantes  $\hbar$ ,  $m$  et  $\omega$  sont strictement positives.

1. Soient  $\Psi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}$  et  $E$  un réel tels que  $(\Psi, E)$  vérifie l'équation (4.3). Pour  $y \in \mathbf{R}$ ,

on pose  $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} y$  et  $\Phi(y) = \Psi(x)$ .

Montrer que  $\Phi$  satisfait une équation différentielle de la forme

$$-\Phi'' + y^2\Phi = e\Phi, \quad (4.4)$$

où  $e$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $E$ .

2. Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$  vérifiant

$$\forall y \in \mathbf{R}, \left( -\frac{d}{dy} + y \right) \left[ \left( \frac{d}{dy} + y \right) \varphi(y) \right] = 0. \quad (4.5)$$

- (a) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$-f'(y) + yf(y) = 0.$$

- (b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (4.5).

- (c) Montrer que

$$\varphi_0 : y \mapsto \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-y^2/2}$$

est l'unique solution de (4.5) vérifiant les conditions  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(y)^2 dy = 1$  et  $\varphi_0(0) > 0$ .

3. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on définit

$$\varphi_n : y \mapsto C_n \left( -\frac{d}{dy} + y \right)^n \varphi_0(y),$$

où  $C_n$  est la constante positive telle que  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(y)^2 dy = 1$ .

La notation  $\left( -\frac{d}{dy} + y \right)^n \varphi_0(y)$  désigne la fonction obtenue à partir de  $\varphi_0$  en appliquant  $n$  fois l'opérateur  $\left( -\frac{d}{dy} + y \right)$ .

(a) Expliciter  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

(b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe une constante  $e_n$  telle que

$$\forall y \in \mathbf{R}, -\varphi_n''(y) + y^2 \varphi_n(y) = e_n \varphi_n(y).$$

Que vaut  $e_n$  ?

(c) Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale  $P_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de degré  $n$  et de coefficient dominant positif telle que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \varphi_n(y) = P_n(y) e^{-y^2/2}.$$

(d) Pour  $n \in \mathbf{N}$ , exprimer  $P_n$  en fonction du polynôme  $H_n$  de la partie I.

4. Déterminer une suite de réels  $E_n$  pour lesquels l'équation différentielle (4.3) admet une solution non identiquement nulle  $\Psi_n$  et telle que  $\Psi_n, \Psi_n'$  et  $\Psi_n''$  soient toutes de carré intégrable sur  $\mathbf{R}$ .

5. On se donne ici un réel  $E$ , une fonction  $\Psi$  non identiquement nulle et de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  avec  $\Psi \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $\Psi' \in L^2(\mathbf{R})$  et  $\Psi'' \in L^2(\mathbf{R})$  tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (4.6)$$

En considérant  $\int_{\mathbf{R}} E \Psi(x)^2 dx$ , montrer que  $E > 0$ .

## IV. Équation d'Hermite

Dans cette section, on fixe un réel  $\lambda$  et on s'intéresse à l'équation différentielle d'Hermite :

$$H''(y) - 2yH'(y) + \lambda H(y) = 0, \quad (A_\lambda)$$

dont on cherche les solutions définies sur  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

1. Soit  $H : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction. Montrer que  $\Phi : y \mapsto H(y) e^{-y^2/2}$  est solution de l'équation différentielle (4.4) si et seulement si  $H$  est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de  $(A_\lambda)$  ?

3. Soit une série formelle  $F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$  à coefficients dans  $\mathbf{R}$ .

Montrer que  $F$  vérifie la relation

$$F''(X) - 2XF'(X) + \lambda F(X) = 0 \quad (4.7)$$

si et seulement si la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  satisfait à une relation de récurrence linéaire que l'on précisera.

4. Montrer que lorsque la série formelle  $F$  vérifie la relation (4.7), la série entière  $\sum a_n z^n$  a un rayon de convergence infini.



5. On note respectivement  $a^+$  et  $a^-$  les suites vérifiant la relation de récurrence obtenue en IV.3 avec les conditions initiales respectives

$$a_0^+ = 1 \quad \text{et} \quad a_1^+ = 0 \quad ; \quad a_0^- = 0 \quad \text{et} \quad a_1^- = 1.$$

On définit deux fonctions  $H^+$  et  $H^-$  par :

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad H^+(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ y^n \quad \text{et} \quad H^-(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- y^n.$$

Montrer que  $(H^+, H^-)$  est une base de l'espace des solutions de  $(A_\lambda)$ .

6. Déterminer les réels  $\lambda$  pour lesquels  $(A_\lambda)$  admet une solution polynomiale non nulle.
7. On suppose que  $\lambda = 2n$  pour un certain entier naturel  $n$ .
- Comparer la fonction  $\varphi_n$  de la partie III aux solutions polynomiales de  $(A_\lambda)$ .
  - En déduire l'expression de chacun des coefficients du polynôme de Hermite  $H_n$ .
8. On suppose dans cette question que  $\lambda \neq 2n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
- Soit  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ . On définit  $g_\alpha : y \mapsto e^{\alpha y^2/2}$  sur  $\mathbf{R}$ .  
Déterminer l'expression des coefficients  $b_n$  du développement en série entière de  $g_\alpha$  autour de 0 en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue.
  - On suppose maintenant  $\alpha < 2$ .  
Montrer qu'il existe un entier  $N > 0$  tel que  $\frac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \geq \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}}$  pour tout  $n \geq N$ .
  - En déduire que  $g_\alpha(y) = O(H^+(y))$  quand  $|y| \rightarrow +\infty$ .
  - Montrer qu'aucune solution non identiquement nulle de  $(A_\lambda)$  n'est bornée.

## V. Fonctions propres non tempérées

On définit l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  comme l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  telle que, pour tout  $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$ , la fonction  $x \mapsto x^k f^{(\ell)}(x)$  soit bornée sur  $\mathbf{R}$ .

- Montrer que pour tout polynôme  $P$ , la fonction  $y \mapsto P(y) e^{-y^2/2}$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ .
- Montrer, pour tout  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  intégrable sur  $\mathbf{R}$ , l'équivalence

$$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \iff \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$

- Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ .  
Montrer que  $f$  est solution de (4.4) si et seulement si  $\widehat{f}$  est solution de (4.4).
- Suivant la valeur de  $e$ , déterminer les solutions de (4) définies sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs dans  $\mathbf{C}$  et appartenant à  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ .
- Soit  $n \in \mathbf{N}$ .
  - Montrer sans calcul que la fonction  $\widehat{\varphi}_n$  est colinéaire à  $\varphi_n$ .
  - Exprimer plus précisément  $\widehat{\varphi}_n$  à l'aide de  $\varphi_n$ .
- Pour cette question, on revient sur les polynômes  $H_n$  de la partie I. On rappelle que  $\mu$  désigne la mesure sur  $\mathbf{R}$  définie à partir de la mesure de Lebesgue avec la fonction de poids  $y \mapsto \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ . On se propose d'étudier l'adhérence dans l'espace préhilbertien réel  $L^2(\mu)$  du sous- $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $V$  engendré par la famille  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

- (a) On fixe  $f \in L^2(\mu)$  et on pose  $g : x \mapsto f(x) e^{-x^2/2}$ .  
Montrer que  $\hat{g}$  est définie et se prolonge en une fonction holomorphe de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$ .
- (b) En déduire l'adhérence de  $V$  dans  $L^2(\mu)$  puis décrire une base hilbertienne de  $L^2(\mu)$ .

## VI. Systèmes hamiltoniens

Soit  $\mathcal{H}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  définie sur  $\mathbf{R}^{2d}$  à valeurs réelles. On se fixe un point  $(p_1^0, \dots, p_d^0, q_1^0, \dots, q_d^0) \in \mathbf{R}^{2d}$ . On considère le système différentiel *hamiltonien*

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(p, q) \quad \text{et} \quad \frac{dq_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(p, q), \quad (4.8)$$

avec conditions initiales

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad p_j(0) = p_j^0 \quad \text{et} \quad q_j(0) = q_j^0, \quad (4.9)$$

d'inconnues  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_d \end{pmatrix}$  et  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_d \end{pmatrix}$ .

1. Dans cette question, on considère l'Hamiltonien de la mécanique classique

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{p_j^2}{m_j} + V(q),$$

où  $V$  désigne une fonction de  $\mathbf{R}^d$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Montrer que le système (4.8) se réécrit

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad m_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_j},$$

avec des conditions initiales à préciser.

2. Montrer que le système régissant le mouvement d'une particule (équation (4.1) avec conditions initiales (4.2)) peut s'écrire sous la forme d'un système hamiltonien.

Pour étudier le système (4.8) en toute généralité, on introduit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2d}(\mathbf{R}).$$

On dit qu'une application  $g$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^{2d}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^{2d}$  est **symplectique** si elle est différentiable et si, pour tout  $(p, q) \in U$ ,

$$(\nabla g(p, q))^T J \nabla g(p, q) = J.$$

3. Montrer que  $J$  est inversible et relier les matrices  $J^{-1}$ ,  $J^T$  et  $J$  les unes aux autres.

On définit  $y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2d}$  si bien que le système (4.8) se réécrit

$$\frac{dy}{dt} = J \nabla \mathcal{H}(y), \quad y(0) = \begin{pmatrix} p^0 \\ q^0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

4. Soit  $y$  une solution maximale de (4.10) définie sur un intervalle  $I$ .  
Montrer que la fonction  $t \mapsto \mathcal{H}(y(t))$  est constante sur l'intervalle  $I$ .

On suppose à partir de maintenant qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall y \in \mathbf{R}^{2d}, \mathcal{H}(y) \geq C \|y\|^2,$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne standard sur  $\mathbf{R}^{2d}$ .

5. Montrer alors que le système hamiltonien (4.8) admet une et une seule solution définie sur  $\mathbf{R}$  avec les conditions initiales (4.9).

Pour  $y_0 \in \mathbf{R}^{2d}$  et  $t \in \mathbf{R}$ , on définit  $\varphi_t(y_0)$  comme la valeur à l'instant  $t$  de la solution de  $\frac{dy}{dt} = J \nabla \mathcal{H}(y)$  avec la condition initiale  $y(0) = y_0$ .

6. (a) On suppose  $\mathcal{H}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  pour un  $k \geq 2$ .  
Que peut-on en déduire sur la régularité de la fonction  $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$  définie sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2d}$  ?  
(b) Pour  $t \in \mathbf{R}$  et  $y \in U$ , on pose  $\Psi_t(y) := (\nabla \varphi_t)(y)$ .  
Montrer que  $\Psi_t$  est bien définie et que pour tout  $y \in \mathbf{R}^{2d}$ , la fonction  $t \mapsto \Psi_t(y)$  est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_t(y)}{dt} = J \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y)) \Psi_t(y), \\ \Psi_0(y) = I_{2d}, \end{cases}$$

avec  $\nabla^2 \mathcal{H} = \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y_j \partial y_i} \right)_{1 \leq i, j \leq 2d}$  et  $I_{2d}$  la matrice identité de  $M_{2d}(\mathbf{R})$ .

- (c) Montrer que pour tout  $y \in \mathbf{R}^{2d}$ ,  $\frac{d}{dt}(\Psi_t(y)^T J \Psi_t(y)) = 0$  et en déduire que, pour tout réel  $t$ , l'application  $y \mapsto \varphi_t(y)$  est symplectique.  
(d) Montrer que  $\det \Psi_t(y) = 1$  pour tout réel  $t$  et tout  $y \in \mathbf{R}^{2d}$ .  
(e) Pour  $t \in \mathbf{R}$ , montrer que  $\varphi_t$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbf{R}^{2d}$  sur  $\mathbf{R}^{2d}$ .  
(f) Soit  $f : \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction intégrable sur  $\mathbf{R}^{2d}$ .  
Montrer que pour tout réel  $t$ ,

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^{2d}} f(\varphi_t(x)) dx.$$

## 4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

### Objet du problème

Le but de ce problème était d'étudier les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique, quantique et classique, en dimension 1. On montre dans ce problème que le spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique classique est continu (question II. 4) alors que l'énergie de l'oscillateur harmonique quantique est quantifiée et ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs (question III. 4).

Reprenons ces résultats :

En mécanique classique, l'oscillateur harmonique est une particule assujettie à se déplacer le long d'un axe et soumise à une force de rappel proportionnelle à la distance à un point situé sur cet axe. Le mouvement de la particule est régi par l'équation de la dynamique :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x.$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

où les paramètres sont déterminés par les conditions initiales. La particule est animée d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal autour du point  $O$ , d'amplitude  $x_0$  et de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . L'énergie totale (hamiltonien classique) est donnée par :

$$\mathcal{E}(t) = E_c(t) + V(x(t)) = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^2 + \frac{k}{2} (x(t))^2.$$

L'énergie totale est indépendante du temps et peut prendre n'importe quelle valeur positive. Le spectre d'énergie de l'oscillateur est donc continu (partie II).

En mécanique quantique, c'est l'oscillateur harmonique quantique qui intervient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Il s'agit de déterminer les valeurs propres de cet opérateur et des fonctions propres de carrés intégrables ainsi que leurs dérivées premières et secondes. On montre que le spectre d'énergie est discret :

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad n \in \mathbf{N},$$

les fonctions propres associées étant données par :

$$\Psi_n(x) = C_n H_n(x) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right),$$

où  $C_n$  est une constante de normalisation et  $H_n$  le  $n$ -ième polynôme d'Hermite. Les fonctions propres sont donc des fonctions de l'espace de Schwartz dont traite la partie V. Les parties I, III et IV sont consacrées à l'étude du hamiltonien quantique et aux polynômes d'Hermite.

Par ailleurs, l'oscillateur harmonique classique peut s'étudier dans le cadre plus large des systèmes hamiltoniens auxquels était consacrée la partie VI.

## Bibliographie

C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU, F. LALOË. Mécanique quantique. Hermann, 1997.

## Généralités

Le problème était long mais contenait de nombreuses questions de difficulté très modérée, y compris dans son ultime partie. Les parties I à IV évaluaient des connaissances du programme de L2, les deux dernières abordant les points les plus délicats du programme d'analyse de l'agrégation (transformée de Fourier, fonctions holomorphes, calcul différentiel et systèmes différentiels autonomes). Les différentes parties étaient pour l'essentiel indépendantes bien que les parties I, II et IV fussent reliées logiquement par quelques questions de synthèse qui débouchaient sur le calcul explicite des coefficients des polynômes de Hermite  $H_n$  en IV.7.(b). La partie V s'appuyait quant à elle très fortement sur les derniers résultats de la partie IV : il était bien entendu possible aux candidats d'admettre ces derniers.

Les candidats se sont limités pour l'essentiel aux parties I à IV et ont souvent traité correctement la question V.(a). Certains ont tenté de s'aventurer dans le début de la partie VI, sans grand succès cependant. Seules les meilleures copies traitent avec brio les deux dernières parties.

Au cours du problème, les candidats ont été amenés à résoudre des questions en utilisant des raisonnements par récurrence. La rédaction est souvent trop imprécise : soit l'hypothèse de récurrence n'est pas énoncée, soit l'étape d'hérédité est mal présentée. Quant à la conclusion, elle est parfois omise.

Le jury a de nouveau constaté que les équations différentielles sont une partie du programme très mal assimilée par les candidats. Il a fréquemment vu des erreurs de logique et de rédaction, le passage de conditions nécessaires à des conditions nécessaires et suffisantes sans justification. Quant au théorème de Cauchy-Lipschitz, les hypothèses sont très rarement énoncées correctement.

On ne saurait enfin trop conseiller aux candidats de faire preuve de la plus grande attention dans la lecture de l'énoncé afin de bien répondre aux questions qui leur sont posées.

Pour terminer ces généralités, signalons quelques erreurs ou imprécisions de l'énoncé qui ont pu légèrement dérouter quelques candidats :

- dans la partie II, il convient de supposer  $k$  strictement positif (l'hypothèse  $m > 0$  était quant à elle implicite vu la définition de  $\omega$ ) ;
- dans la question II.4, la notation  $V(t)$  était incorrecte et devait être remplacée par  $V(x(t))$  ;
- de manière plus anecdotique, les conditions de II.2 ne méritaient pas d'être appelées "conditions initiales" ;
- dans la question V.2, il faut supposer  $f$  continue sans quoi le fait que  $\hat{f}$  appartienne à la classe de Schwartz ne peut suffire à prouver que  $f$  est indéfiniment dérivable.

Dans les deux premiers cas, les candidats ont très souvent su rectifier d'eux-mêmes en faisant preuve de bon sens. Les deux derniers problèmes n'ont visiblement perturbé aucun candidat et le jury n'a pas tenu compte dans l'appréciation des copies de la subtilité de V.2.

## Partie I

1. L'énoncé indique clairement que l'on n'attend qu'un rappel du résultat et non une idée de démonstration : bien des candidats se sont sentis obligés de donner des éléments de preuve et ont ainsi perdu un temps précieux. On signale par ailleurs que les candidats ayant oublié le résultat pouvaient facilement le retrouver car il est implicite dans l'énoncé de III.2.(c).
2. Cette question de calcul n'a pas posé de problème aux candidats.
3. La relation de récurrence permettant d'écrire  $H_{n+1}$  en fonction de  $H_n$  est souvent bien dégagée mais le jury est étonné de voir des candidats affirmer sans démonstration une égalité comme  $\deg(XH_n - H'_n) = \deg H_n + 1$  : on attend un minimum de détails à ce niveau. Signalons également que la formule  $\deg P' = \deg P - 1$  est fautive lorsque le polynôme  $P$  est constant.
4. (a) Beaucoup d'erreurs de base sur cette question, un nombre trop élevé de candidats pensant qu'une fonction continue ayant pour limite 0 en  $\pm\infty$  est nécessairement intégrable sur  $\mathbf{R}$ , et certains confondant intégrabilité et intégrales convergentes. On attendait ici un raisonnement précis et non une simple affirmation du type "il y a intégrabilité par croissances comparées de  $t \mapsto e^{-t^2/2}$  et des fonctions puissances".  
 (b) Peu de candidats se sont tirés sans dommage de cette question dont la technique relativement classique (montrer une orthogonalité en intégrant par parties) doit être maîtrisée. Le jury regrette le manque de précautions de nombreux candidats dans l'utilisation des intégrations par parties de  $-\infty$  à  $+\infty$  : celle-ci doit être justifiée par l'existence d'une des intégrales et du terme tout intégré  $[\dots]_{-\infty}^{+\infty}$ .  
 (c) La même technique d'intégration par parties qu'à la question précédente fournissait le résultat. On a relevé plusieurs fois la confusion entre une norme et son carré ainsi que l'erreur consistant à dire que le  $n$ -ième polynôme dérivé d'un polynôme unitaire de degré  $n$  est le polynôme constant 1 (au lieu de  $n!$ ).

## Partie II

1. Une question très élémentaire. Au niveau de l'agrégation, on peut donner directement la solution générale d'une équation différentielle aussi classique sans passer par l'équation caractéristique associée. On a vu énormément de fautes logiques sur la résolution avec conditions initiales (la majorité des candidats se contentent plus ou moins explicitement de conditions nécessaires).
2. La question est à nouveau élémentaire. Son traitement est souvent très décevant dans les copies faute d'une argumentation logique correcte. On trouve un nombre substantiel de candidats qui ne sait pas localiser les zéros de la fonction sinus.
3. Cette question a été bien réussie par les candidats.
4. Quasiment tous les candidats parviennent à prouver de manière efficace que l'énergie est constante et à exprimer sa valeur en 0 à l'aide des conditions initiales. L'ensemble des valeurs possibles pour l'énergie a donné lieu à des réponses extrêmement surprenantes, bien des candidats n'ayant pas compris le sens de la question posée : on ne demandait pas l'ensemble des conditions initiales fournissant une énergie donnée ! Une lecture plus attentive de l'énoncé aurait permis d'éviter ce genre de faute.

## Partie III

1. La réponse se résume à un calcul de dérivée d'une fonction composée et cela a été bien réussi dans l'ensemble.
2. (a) On pouvait se contenter de donner directement le résultat en appliquant pour cela un théorème du cours. Cette question très élémentaire a néanmoins posé de gros problèmes à de nombreux candidats. Parmi les erreurs classiques, nous signalons de nombreux raisonnements se limitant à une succession de conditions nécessaires sur les solutions. Le jury a également été surpris de la fréquence des résolutions de type  $\frac{f'(y)}{f(y)} = \dots$ . Dans ce cas, les candidats précisent très rarement qu'ils ne considèrent que des solutions ne s'annulant pas sur  $\mathbf{R}$  et parmi ceux qui le mentionnent, très peu expliquent ce qu'il advient des autres solutions. On voit souvent la fonction  $y \mapsto \frac{f'(y)}{f(y)}$  avoir pour primitive  $y \mapsto \ln f(y)$  au lieu de  $y \mapsto \ln|f(y)|$  et enfin le passage de  $\exists \lambda \in \mathbf{R}_+^* : \forall y \in \mathbf{R}, |f(y)| = \lambda e^y$  à  $\exists \lambda \in \mathbf{R}^* : \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = \lambda e^y$  est généralement effectué sans justification alors que la continuité de  $f$  joue un rôle essentiel ici.
- (b) La plupart des candidats a bien vu qu'il s'agissait d'intégrer deux équations différentielles linéaires successives. À nouveau, la rédaction manque trop souvent de rigueur tout au long de cette question, la réduction à la résolution d'une équation différentielle à paramètre étant la plupart du temps maladroitement exprimée. La recherche d'une solution particulière de  $f'(y) + y f(y) = \lambda e^{y^2/2}$  a donné lieu à une faute de logique très répandue sur la méthode dite de "variation de la constante" : cette méthode, et plus généralement n'importe laquelle des méthodes classiques de recherche de solutions sous une forme particulière, consiste en la mise en évidence d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'un certain type puisse être solution de l'équation différentielle considérée, et seul le caractère *suffisant* de cette condition est généralement intéressant. Le jury a été surpris de lire, dans la majorité des copies, des raisonnements fondés sur une simple recherche de conditions nécessaires et faisant totalement l'impasse sur l'existence d'une solution. Il était bien sûr possible de raisonner par conditions nécessaires en invoquant un théorème d'existence et en justifiant que toute solution puisse être écrite sous la forme  $y \mapsto \mu(y)e^{-y^2/2}$  avec  $\mu$  dérivable.
- (c) Cette question nécessitait d'avoir résolu l'équation différentielle du (b). La plupart des candidats parviennent à s'assurer que  $\varphi_0$  vérifie les conditions voulues. La difficulté majeure est la preuve de l'unicité, laquelle s'appuie sur le fait que toute solution de (4.5) dans  $L^2(\mathbf{R})$  doit être colinéaire

à  $\varphi_0$ . Pour ce dernier point, trop peu de candidats pensent à la structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de  $L^2(\mathbf{R})$  : cela leur aurait permis, une fois vérifié que  $\varphi_0$  appartenait à  $L^2(\mathbf{R})$ , de se contenter d'étudier la fonction  $x \mapsto e^{-x^2/2} \int_0^x e^{y^2} dy$ .

3. (a) Question de calcul assez similaire à I.2 mais où le calcul des constantes  $C_1$  et  $C_2$  nécessitait d'effectuer les intégrations par parties soigneusement. Les candidats persévérants ont été bien récompensés de leur succès.
  - (b) Il s'agit à nouveau d'une question assez technique. L'essentiel des candidats ayant réussi cette question a raisonné par récurrence. Les solutions les plus efficaces sont venues des quelques candidats ayant fort pertinemment interprété la relation recherchée comme découlant d'une étude du crochet  $[A, B] = AB - BA$ , où  $A = -\frac{d}{dy} + y$  et  $B = \frac{d}{dy} + y$  sont des opérateurs linéaires définis sur l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$  des fonctions indéfiniment dérivables de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .
  - (c) Il s'agit d'un raisonnement essentiellement similaire à I.3 à ceci près qu'il faut tenir compte du signe des constantes  $C_n$  et que l'on demande en plus un résultat d'unicité (assez immédiat au demeurant).
  - (d) La question n'est pas évidente et le jury a récompensé ceux qui avaient eu la bonne idée de départ, à savoir chercher à établir une relation entre  $P_n$  et  $y \mapsto H_n(y\sqrt{2})$ . Pour une telle question, les candidats auraient pu commencer par examiner au brouillon les premiers valeurs  $P_0, P_1, P_2$  et  $H_0, H_1, H_2$  déjà calculées, ce qui leur aurait sans doute permis de penser à ce changement de variable. On attendait ici un calcul de la constante  $C_n$  grâce à I.4.
4. Encore une question de synthèse : attention, il fallait expliquer que la réciproque de l'implication prouvée en III.1 est tout aussi vraie (inutile de rentrer dans les détails), justifier que la fonction  $\Psi_n$  donnée n'est pas nulle (la non-nullité de  $P_n$  doit être expliquée, on peut par exemple penser au calcul du degré effectué à la question précédente) et enfin la présence de  $\Psi_n, \Psi'_n$  et  $\Psi''_n$  dans  $L^2(\mathbf{R})$  mérite un minimum d'explications.
  5. Cette question ardue anticipait certains résultats de la partie V et constituait un exercice assez classique sur les intégrales généralisées. Si la plupart des candidats ont bien pensé à la technique d'intégration par parties, presque tous ont échoué sur la difficulté majeure de la question, à savoir l'existence et la nullité de la quantité  $[\Psi(t)\Psi'(t)]_{-\infty}^{+\infty}$  : à ce titre, beaucoup trop de candidats semblent persuadés que l'intégrabilité d'une fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$  implique l'existence et la nullité de ses limites en  $\pm\infty$ . Les candidats devraient connaître un contre-exemple simple à ce genre d'affirmation. En tout état de cause, le jury a systématiquement accordé davantage de points aux candidats qui ont identifié cette difficulté sans parvenir à la résoudre qu'à ceux qui l'ont ignorée.

## Partie IV

1. Une nouvelle question de calcul de dérivée qui a été relativement bien réussie, la plupart des candidats faisant bien attention à l'énoncé et parvenant comme souhaité à une équivalence entre deux conditions.
2. On attendait ici une justification très précise s'appuyant sur le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et rappelant ses hypothèses. On a souvent lu des raisonnements étranges fondés sur une comparaison avec l'équation (4.5) résolue explicitement de la partie III (alors qu'elle n'était qu'un cas particulier de la situation générale étudiée ici). Le jury a constaté de nombreuses confusions entre le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et sa version non-linéaire (qui fournit des résultats moins précis et ne donne pas en particulier de domaine de définition pour les solutions maximales).
3. Cette question a été bien réussie dans l'ensemble, les petites valeurs de  $n$  causant cependant des soucis à plusieurs candidats. Certains n'ont en revanche visiblement pas compris ce qu'est une série formelle et se sentent obligés de quantifier chaque égalité entre sommes de séries par un " $\forall X \in \mathbf{R}$ ".

4. Cette question, pourtant assez facile, a causé quelques difficultés aux candidats. On a régulièrement vu des caractérisations fantaisistes du rayon de convergence d'une série entière. L'erreur la plus fréquente a consisté en la considération du rapport  $\frac{a_{n+2}}{a_n}$  sans s'inquiéter d'une division éventuelle par zéro.
5. Question souvent réussie. Le jury s'étonne cependant de lire dans certaines copies une mauvaise définition d'une famille libre et regrette que trop peu de candidats pensent à s'appuyer sur le wronskien pour résoudre une telle question. Enfin, certains candidats ont malheureusement omis d'indiquer que  $H_+$  et  $H_-$  étaient bien des solutions de  $(A_\lambda)$ .
6. Les réponses ont été souvent très décevantes faute d'une articulation logique correcte, et l'on a trop souvent lu des raisonnements absurdes du genre de : "il existe une solution polynomiale si et seulement si la suite  $(a_n)$  est nulle à partir d'un certain rang". Les candidats auraient dû beaucoup plus spontanément se lancer dans des raisonnements de type "analyse-synthèse" : supposant qu'il existe une solution polynomiale non nulle, on montre que  $\lambda \in 2\mathbf{N}$ , et réciproquement si  $\lambda \in 2\mathbf{N}$ , on exhibe une solution polynomiale non nulle ( $H_+$  ou  $H_-$ , voire  $P_{\lambda/2}$ ).
7. (a) Les réponses sont ici souvent incomplètes faute d'une bonne interprétation de la question. Il s'agissait de remarquer qu'à partir de  $\varphi_n$ , une solution polynomiale de  $(A_\lambda)$  peut être déterminée puis éventuellement de déterminer toutes ces fonctions. On attend des candidats qu'ils remarquent que puisque  $P_n$  est solution de  $(A_\lambda)$ , toute fonction colinéaire à  $P_n$  est encore polynomiale et solution de  $(A_\lambda)$ .
- (b) Cette difficile question de synthèse couronnait l'essentiel du travail des parties I, III et IV (il fallait s'appuyer sur la question précédente, la relation de récurrence de III.4 et enfin le résultat trouvé en III.3.(d)). Le jury félicite les quelques candidats courageux étant parvenus à la résoudre.
8. (a) Cette question a permis à de nombreux candidats de montrer leurs connaissances, certains se signalant toutefois par un manque de précision sur le domaine de validité du développement en série entière.
- (b) Question souvent bien réussie. On voit trop peu de candidats justifier que  $a_{2n}^+$  est systématiquement non nul, et assez peu nombreux sont ceux qui pensent à étudier la limite de la suite de terme général  $u_n = \frac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \frac{b_{2n}}{b_{2n+2}}$  ce qui aurait largement simplifié leurs raisonnements (à condition de penser à étudier le signe des  $b_{2k}$ ).
- (c) Il s'agit d'une question assez classique de comparaison asymptotique de sommes de séries entières. Elle a été fort peu réussie bien que quelques candidats aient montré qu'ils avaient vaguement compris l'idée. Il fallait itérer la relation du 8.(b) pour obtenir que  $b_{2n} = O(a_{2n})$ , faire ensuite très attention au signe des  $a_{2k}$  et tenir compte des premiers termes des séries.
- (d) Un raisonnement similaire à celui de 8.(c), et pour lequel on attendait un minimum de détails, permettait d'obtenir la comparaison  $y g_\alpha(y) = o_{\pm\infty}(H_-(y))$ . On tirait facilement de ce résultat et du précédent que ni  $H_+$  ni  $H_-$  n'est bornée et on pouvait éventuellement préciser un peu mieux leurs limites en  $\pm\infty$ . Il était ensuite possible d'étudier les solutions de  $(A_\lambda)$  qui sont bornées sur  $\mathbf{R}$  en remarquant que  $H_+$  et  $H_-$  étaient respectivement paire et impaire. Plusieurs candidats ont bien compris la stratégie dans cette question sans nécessairement réussir complètement la précédente : ils ont été bien récompensés de leurs efforts.

## Partie V

1. Question souvent bien réussie par des candidats, et régulièrement la dernière traitée par ceux-ci. On attendait un minimum d'explications sur le fait que l'ensemble  $\{x \mapsto P(x) e^{-x^2/2} \mid P \in \mathbf{C}[X]\}$  est stable par dérivation. Par ailleurs, le fait que  $x \mapsto P(x) e^{-x^2/2}$  soit bornée sur  $\mathbf{R}$  nécessite deux arguments : la



continuité pour obtenir le caractère borné sur tous les segments, et l'étude des limites en  $\pm\infty$  pour obtenir le caractère borné au voisinage de l'infini.

2. Comme on l'a déjà signalé, la réciproque nécessite de supposer en outre que la fonction  $f$  est continue (sans quoi la condition " $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ " doit être remplacée par " $f$  coïncide presque partout avec un élément de  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ "). La plupart des candidats ont bien compris que l'on attendait d'eux une démonstration des deux résultats suivants lorsque  $f$  est une fonction de la classe de Schwartz :

- la transformée de Fourier  $\widehat{f}$  est dérivable de dérivée  $i\gamma \widehat{f}(\gamma)$  ;
- pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ , on a la relation

$$(i\xi) \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}'(x\xi).$$

Pour la première relation, on a trop souvent vu de mauvaises dominations dans la dérivation sous l'intégrale. La seconde relation a été mieux redémontrée dans l'ensemble. L'utilisation de ces deux relations pour en déduire que  $\widehat{f}$  appartient à la classe de Schwartz a rarement été bien réalisée. La réciproque s'appuyait sur la formule d'inversion de Fourier  $\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$  qui est souvent mal maîtrisée.

3. Le sens direct est souvent bien obtenu en invoquant les formules établies à la question précédente, mais le sens réciproque n'est que trop rarement bien expliqué (il fallait à nouveau s'appuyer sur la formule d'inversion de Fourier, et il valait mieux une nouvelle fois faire attention au fait que cette formule décrit a priori une égalité *presque partout*).
4. Cette question difficile reprenait l'étude de la fin de la partie III et reposait sur des arguments similaires. Elle n'a été traitée qu'exceptionnellement.
- (a) Il s'agissait de combiner le résultat de la question V.4, que l'on aurait pu conjecturer, avec celui de V.3. On obtient alors que  $\widehat{\varphi}_n$  est colinéaire à  $\varphi_n$ .
- (b) La question est classique mais n'a quasiment pas été traitée. On trouve une relation entre  $\widehat{\varphi}_0$  et  $\varphi_0$  à l'aide du résultat précédent et de celui de I.1. On utilise ensuite les formules de la démonstration de V.2 pour en déduire une relation explicite entre  $\widehat{\varphi}_n$  et  $\varphi_n$ .
5. On montrait ici que la famille orthonormalisée de  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$  constitue une base hilbertienne de  $L^2(\mu)$ . À nouveau, la technique est classique et repose sur la théorie des fonctions holomorphes.
- (a) On a vu ici beaucoup de confusions entre les espaces  $L^2(\mu)$  et  $L^2(\mathbf{R})$ . Le jury constate avec satisfaction que les candidats font l'effort de citer le théorème d'holomorphic sous l'intégrale avec des hypothèses correctes, bien qu'ils aient plus de mal à parvenir à une domination correcte. L'argument-clef était ici le fait que les deux fonctions  $x \mapsto f(x)e^{-x^2/4}$  et  $x \mapsto e^{-x^2/4}$  appartenaient à  $L^2(\mathbf{R})$  si bien que leur produit était intégrable sur  $\mathbf{R}$  pour la mesure de Lebesgue.
- (b) Quelques candidats pensent à déterminer l'orthogonal de  $V$  dans  $L^2(\mu)$  mais peu voient que celui-ci est aussi l'orthogonal de l'ensemble  $\{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbf{N}\}$  des monômes, ce qui les empêche de traduire convenablement sur  $\widehat{g}$  l'appartenance de  $g$  à  $V^\perp$ .

## Partie VI

Compte tenu de la longueur du problème, très peu de candidats ont abordé avec profit cette partie. Nous ne reviendrons donc que sur les questions traitées par un nombre substantiel d'entre eux ou sur celles qui auraient pu les conduire à une mauvaise interprétation.

1. La réécriture du système hamiltonien comme système différentiel du second ordre est souvent bien comprise mais il manque presque systématiquement la moitié des conditions initiales.
2. Cette question était très élémentaire mais il fallait y répondre très précisément : on attendait une définition claire d'un hamiltonien pour l'équation différentielle considérée.

3. Beaucoup de candidats pensent que le déterminant de  $J$  est  $(-1)^d$  (en fait il vaut 1 ...). Devant une telle question, le premier réflexe d'un candidat devrait être de calculer  $J^T$  puis d'évaluer  $JJ^T$ .
4. La question est parfois bien comprise et pouvait être traitée ou bien de manière purement matricielle à l'aide de la relation  $J^T = -J$ , ou bien en développant complètement les calculs.
5. Cette question n'a donné lieu à aucune erreur particulière à signaler.
6. Le programme de l'agrégation comporte un théorème de régularité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux conditions initiales. La formulation de l'énoncé ne doit pas laisser de doute pour les candidats sur le fait que l'on attendait une simple invocation d'un tel théorème en 6.(a). Dans la question 6.(b), on retrouve ensuite, grâce au théorème des dérivées croisées de Schwarz, la formule donnant la différentielle du flot comme solution d'une équation différentielle linéaire (on ne peut raisonnablement attendre d'un agrégatif qu'il apprenne une telle formule par cœur, mais il doit en revanche savoir utiliser la méthode précédente pour la retrouver et savoir que cette formule vaut encore lorsque le champ de vecteurs définissant le système différentiel autonome est seulement de classe  $\mathcal{C}^2$ ).

### 4.3 Corrigé

#### I. Polynômes de Hermite

1. D'après le cours,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}.$$

2. Un calcul immédiat fournit, pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$H_0(y) = 1 \quad ; \quad H_1(y) = y \quad ; \quad H_2(y) = y^2 - 1.$$

3. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $H_n$  est polynomiale unitaire de degré  $n$ .

C'est immédiat pour tout  $n \in \{0, 1, 2\}$  d'après ce qui précède.

Soit un  $n \geq 1$  pour lequel cette propriété est vraie. On a, pour tout réel  $y$ ,

$$\frac{d^n}{dy^n} (e^{-y^2/2}) = (-1)^n H_n(y) e^{-y^2/2}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} H_{n+1}(y) &= -e^{y^2/2} \frac{d}{dy} (H_n(y) e^{-y^2/2}) \\ &= e^{y^2/2} (y H_n(y) e^{-y^2/2} - H'_n(y) e^{-y^2/2}). \end{aligned}$$

Retenons la relation de récurrence

$$\forall y \in \mathbf{R}, H_{n+1}(y) = y H_n(y) - H'_n(y).$$

Par l'hypothèse de récurrence,  $H_n$  est polynomiale de degré  $n$ , donc  $H'_n$  est polynomiale et

$$\deg(y \mapsto y H_n(y)) = n + 1 > \deg H'_n,$$

si bien que  $H_{n+1}$  est polynomiale de degré  $n + 1$  et a même coefficient dominant que  $y \mapsto y H_n(y)$ , à savoir 1.

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la fonction  $H_n$  est polynomiale unitaire de degré  $n$ .

4. (a) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . La fonction  $y \mapsto H_n^2(y) e^{-y^2/2}$  est continue. En outre, la question précédente montre que  $H_n^2$  est polynômiale donc  $y \mapsto y^2 H_n^2(y)$  aussi, et les croissances comparées usuelles montrent donc que  $H_n^2(y) e^{-y^2/2} = o(1/y^2)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ . Ainsi,  $H_n \in L^2(\mu)$ .
- (b) Avant de calculer les produits scalaires  $\langle H_n, H_p \rangle$ , commençons par un calcul préliminaire. Soit  $P$  une fonction polynomiale et  $n \in \mathbf{N}^*$ . Pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$P(y) H_n(y) e^{-y^2/2} = (-1)^n P(y) \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y^2/2}).$$

Supposons  $n > 0$ . Alors

$$P(y) \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (e^{-y^2/2}) = (-1)^{n-1} P(y) H_{n-1}(y) e^{-y^2/2} \xrightarrow{|y| \rightarrow +\infty} 0$$

grâce aux croissances comparées usuelles ( $P H_{n-1}$  est polynomiale...). En intégrant par parties, on obtient donc

$$\begin{aligned} \langle P, H_n \rangle &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left[ P(y) \frac{d(e^{-y^2/2})}{dy^{n-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} P'(y) \frac{d}{dy^{n-1}} (e^{-y^2/2}) dy \\ \langle P, H_n \rangle &= \langle P', H_{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $(n, p) \in \mathbf{N}^2$ . En itérant le résultat précédent, on trouve :

$$\langle H_n, H_p \rangle = \langle H_n^{(p)}, H_0 \rangle.$$

Si en particulier  $p > n$ , alors  $H_n^{(p)} = 0$  car  $\deg H_n = n$ , et donc  $\langle H_n, H_p \rangle = 0$ .

Ainsi  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une famille orthogonale de  $L^2(\mu)$ .

- (c) Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors  $\langle H_n, H_n \rangle = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$ . Or  $H_n^{(n)} = n!$  vu le résultat de la question 3. Vu la valeur de l'intégrale de Gauss rappelée à la question 1, on en déduit

$$\|H_n\| = \sqrt{n! \langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{n!}.$$

## II. Oscillateur harmonique classique

L'énoncé est ici imprécis. Il faut évidemment supposer  $k$  strictement positif.

1. L'équation différentielle (4.1) se réécrit :

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

avec  $\omega \neq 0$ . Classiquement, l'ensemble de ses solutions est le plan vectoriel de  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  engendré par les deux fonctions  $t \mapsto \cos(\omega t)$  et  $t \mapsto \sin(\omega t)$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$  et posons  $x : t \mapsto \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$ .

Alors  $x(0) = \lambda$  et  $x'(0) = \omega \mu$ . Pour que  $x$  vérifie les conditions initiales (4.2), il est nécessaire et suffisant que  $\lambda = x_0$  et  $\mu = \frac{y_0}{\omega}$ . L'unique solution de (4.1) avec les conditions initiales (4.2) est donc

$$x : t \mapsto x_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t.$$

2. Nous réutilisons la solution générale de (4.1) déjà calculée. Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ . Pour que la fonction  $x : t \mapsto \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$  vérifie les conditions  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = x_T$ , il faut et il suffit que

$$\begin{cases} \lambda = x_0, \\ \lambda \cos(\omega T) + \mu \sin(\omega T) = x_T, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \lambda = x_0, \\ \mu \sin(\omega T) = x_T - x_0 \cos \omega T. \end{cases}$$

On distingue plusieurs cas :

- Si  $\omega T \notin \pi\mathbf{Z}$ , alors  $\sin(\omega T) \neq 0$  donc le système précédent a pour unique solution  $\left(x_0, \frac{x_T - x_0 \cos \omega T}{\sin \omega T}\right)$ , et ainsi l'unique solution de (4.1) avec les conditions  $x(0) = x_0$  et  $x(T) = x_T$  est

$$t \mapsto x_0 \cos \omega t + \frac{x_T - x_0 \cos \omega T}{\sin \omega T} \sin(\omega t).$$

- On suppose maintenant que  $\omega T = \ell\pi$  pour un  $\ell \in \mathbf{Z}$ . La condition  $\mu \sin(\omega T) = x_T - x_0 \cos \omega T$  est donc équivalente à  $x_T = x_0 \cos(\omega T)$ , ce qui ne dépend pas de  $\mu$ . Ou bien  $x_T \neq (-1)^\ell x_0$  et alors le problème considéré n'a pas de solution, ou bien  $x_T = (-1)^\ell x_0$  et alors l'ensemble des solutions du problème est la droite affine

$$\left\{t \mapsto x_0 \cos \omega t + \mu \sin \omega t \mid \mu \in \mathbf{R}\right\}.$$

3. Puisque  $p' = m x'' = -k x$  et  $x' = \frac{1}{m} p$ , on trouve

$$Y' = \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix} Y.$$

4. Les fonctions  $x$  et  $p$  sont dérivables, donc  $\mathcal{E}$  est dérivable et

$$\mathcal{E}' = \frac{p p'}{2m} + \frac{k x x'}{2} = \frac{m x' x'' + k x x'}{2} = \frac{x'}{2} (m x'' + k x) = 0.$$

Ainsi,  $\mathcal{E}$  est constante de valeur

$$\mathcal{E}(0) = \frac{m y_0^2}{2} + \frac{k x_0^2}{2}.$$

Comme  $m > 0$  et  $k > 0$ , il est alors immédiat que l'ensemble des valeurs possibles pour l'énergie lorsqu'on fait varier la condition initiale est  $\mathbf{R}_+$ .

### III. Oscillateur harmonique quantique

1. Pour simplifier les calculs, posons  $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ . Puisque  $\forall y \in \mathbf{R}$ ,  $\Phi(y) = \Psi(\alpha y)$  et que  $\Psi$  est deux fois dérivable,  $\Phi$  est également deux fois dérivable et

$$\forall y \in \mathbf{R}, \Phi''(y) = \alpha^2 \Psi''(\alpha y).$$

D'après l'équation différentielle (4.3), on a, pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(\alpha y) + \frac{1}{2} m \omega^2 (\alpha y)^2 \Psi(\alpha y) = E \Psi(\alpha y),$$

ce qui, après multiplication par  $\alpha^2$  se réécrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Phi''(y) + \frac{1}{2} m \omega^2 \alpha^4 y^2 \Phi(y) = E \alpha^2 \Phi(y),$$

soit, vu la valeur de  $\alpha$ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Phi''(y) + \frac{\hbar^2}{2m} y^2 \Phi(y) = \frac{\hbar E}{m \omega} \Phi(y),$$

et finalement

$$-\Phi''(y) + y^2 \Phi(y) = e \Phi(y), \quad \text{où } e := \frac{2E}{\hbar \omega}.$$

2. (a) L'équation considérée est linéaire homogène résolue du premier ordre. Une primitive de  $y \mapsto y$  étant  $y \mapsto \frac{y^2}{2}$ , on en déduit que l'ensemble des solutions sur  $\mathbf{R}$  est la droite vectorielle  $\left\{ y \mapsto \lambda e^{y^2/2} \mid \lambda \in \mathbf{R} \right\}$ .
- (b) Soit  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors, d'après la question précédente :

$$\varphi \text{ solution de (4.5)} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R} : \forall y \in \mathbf{R}, \varphi'(y) + y\varphi(y) = \lambda e^{y^2/2}.$$

Fixons  $\lambda \in \mathbf{R}$  et résolvons

$$f'(y) + yf(y) = \lambda e^{y^2/2}. \quad (4.11)$$

En raisonnant comme dans la question précédente, on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène  $f'(y) + yf(y) = 0$  est  $\left\{ y \mapsto \mu e^{-y^2/2} \mid \mu \in \mathbf{R} \right\}$ . Déterminons enfin une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

Soit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable et considérons  $f : y \mapsto g(y)e^{-y^2/2}$ . Alors  $f$  est dérivable et pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,  $f'(y) + yf(y) = g'(y)e^{-y^2/2}$ , si bien que  $f$  est solution de (4.11) dès que  $g$  est une primitive de  $y \mapsto \lambda e^{y^2/2}$  sur  $\mathbf{R}$ .

Par suite  $f_0 : y \mapsto \lambda e^{-y^2/2} \int_0^y e^{t^2} dt$  est solution de (4.11). On en déduit que  $\varphi$  est solution de (4.5)

si et seulement s'il existe un couple  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $\forall y \in \mathbf{R}, \varphi(y) = \lambda e^{-y^2/2} \int_0^y e^{t^2} dt + \mu e^{-y^2/2}$ .

Comme les fonctions vérifiant cette dernière propriété sont évidemment de classe  $\mathcal{C}^2$ , on en déduit que l'ensemble des solutions de (4.5) est :

$$\left\{ y \mapsto \lambda e^{-y^2/2} \int_0^y e^{t^2} dt + \mu e^{-y^2/2} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- (c) • D'après la question précédente,  $\varphi_0$  est bien une solution de (4.5) (prendre  $\lambda = 0$  et  $\mu = \pi^{-1/4}$ ). De plus  $\varphi_0(0) = \pi^{-1/4} > 0$ . Enfin,

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(y)^2 dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} dy.$$

Le changement de variable  $y = \frac{t}{\sqrt{2}}$  fournit donc

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(y)^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} dt = 1.$$

La fonction  $\varphi_0$  vérifie donc bien les conditions voulues.

- Réciproquement, soit  $\varphi$  une solution de (4.5) appartenant à  $L^2(\mathbf{R})$ . Compte tenu du résultat de la question précédente, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\varphi = \lambda \varphi_0 + \mu \psi$ , où  $\psi : y \mapsto e^{-y^2/2} \int_0^y e^{t^2} dt$ .

Supposons  $\mu \neq 0$ . Alors  $\psi = \frac{1}{\mu}(\varphi - \lambda \varphi_0)$  appartiendrait à  $L^2(\mu)$  (qui est stable par combinaison linéaire). Or cela est faux. En effet, on a pour tout  $y \in \mathbf{R}_+$ , par croissance et positivité de  $t \mapsto e^{t^2}$  sur  $\mathbf{R}_+$ ,

$$\psi(y) = e^{-y^2/2} \int_0^y e^{t^2} dt \geq e^{-y^2/2} \int_{y/\sqrt{2}}^y e^{t^2} dt \geq e^{-y^2/2} \left( y - \frac{y}{\sqrt{2}} \right) e^{y^2/2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} y$$

ce qui donne  $\lim_{+\infty} \psi = +\infty$  et empêche que  $\psi$  soit de carré intégrable sur  $\mathbf{R}$ .

De ce raisonnement par l'absurde, on déduit  $\mu = 0$  puis  $\varphi = \lambda \varphi_0$ . Par comparaison des normes, on en déduit  $\lambda^2 = 1$ , puis  $\lambda = \pm 1$ , et nécessairement  $\lambda = 1$  vu les conditions  $\varphi(0) > 0$  et  $\varphi_0(0) > 0$ . Ainsi  $\varphi = \varphi_0$ .

En conclusion,  $\varphi_0$  est l'unique solution de (4.5) vérifiant les conditions  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(y)^2 dy = 1$  et  $\varphi_0(0) > 0$ .

3. (a) Pour  $y \in \mathbf{R}$ , on pose

$$\psi(y) = \left(-\frac{d}{dy} + y\right)(\varphi_0(y)) = \frac{2}{\pi^{1/4}} y e^{-y^2/2}$$

et

$$\chi(y) = \left(-\frac{d}{dy} + y\right)(\psi(y)) = \frac{2}{\pi^{1/4}} (2y^2 - 1) e^{-y^2/2}.$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la fonction  $y \mapsto y^n e^{-y^2/2}$  est de carré intégrable sur  $\mathbf{R}$  car elle est continue et

$$(y^n e^{-y^2/2})^2 = y^{2n} e^{-y^2} = O_{|y| \rightarrow +\infty}(y^{-2}).$$

Par suite,  $\psi$  et  $\chi$  sont bien dans  $L^2(\mathbf{R})$ , et en notant  $L_n = \int_{\mathbf{R}} y^{2n} e^{-y^2} dy$  pour tout  $n$ , on a

$$\int_{\mathbf{R}} \psi^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} L_1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} \chi^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (4L_2 - 4L_1 + L_0).$$

On connaît déjà  $L_0 = \sqrt{\pi}$  depuis 2.(c). En intégrant par parties, on trouve (puisque  $y^n e^{-y^2/2}$  a une limite nulle en  $+\infty$  et  $-\infty$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ) :

$$L_1 = \left[-\frac{y}{2} e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} dy = \frac{L_0}{2}$$

puis

$$L_2 = \left[-\frac{y^3}{2} e^{-y^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_{\mathbf{R}} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{3L_1}{2} = \frac{3L_0}{4}.$$

On en déduit

$$\int_{\mathbf{R}} \psi^2 = 2 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} \chi^2 = 8.$$

Par suite  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $C_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  sont bien les seules constantes positives telles que  $C_1 \psi$  et  $C_2 \chi$  soient toutes deux de norme 1 dans  $L^2(\mathbf{R})$ . Ceci prouve que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont bien définies et que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \varphi_1(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} y e^{-y^2/2} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbf{R}, \varphi_2(y) = \frac{2y^2 - 1}{\sqrt{2}\pi^{1/4}} e^{-y^2/2}.$$

(b) • Un calcul essentiellement immédiat fournit, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$

$$\forall y \in \mathbf{R}, \left(-\frac{d}{dy} + y\right) \left(\frac{d}{dy} + y\right) \varphi(y) = -\varphi''(y) + (y^2 - 1) \varphi(y)$$

tandis qu'un calcul similaire fournit

$$\forall y \in \mathbf{R}, \left(\frac{d}{dy} + y\right) \left(-\frac{d}{dy} + y\right) \varphi(y) = -\varphi''(y) + (y^2 + 1) \varphi(y).$$

- Remarquons déjà que  $e_0 := 1$  donne une solution pour  $\varphi_0$ .
- Soit  $n \in \mathbf{N}$ . On suppose qu'il existe une constante  $e_n$  telle que

$$\forall y \in \mathbf{R}, -\varphi_n''(y) + y^2 \varphi_n(y) = e_n \varphi_n(y).$$

Compte tenu des calculs précédents, cela se réécrit

$$\forall y \in \mathbf{R}, \left(\frac{d}{dy} + y\right) \left(-\frac{d}{dy} + y\right) \varphi_n(y) = (e_n + 1) \varphi_n(y). \quad (4.12)$$

Or les définitions de  $\varphi_n$  et  $\varphi_{n+1}$  garantissent qu'il existe un  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \varphi_{n+1}(y) = \lambda \left( -\frac{d}{dy} + y \right) \varphi_n(y).$$

En appliquant à (4.12) l'opérateur  $-\frac{d}{dy} + y$  et en multipliant par  $\lambda$ , on en déduit donc :

$$\forall y \in \mathbf{R}, \left( -\frac{d}{dy} + y \right) \left( \frac{d}{dy} + y \right) \varphi_{n+1}(y) = (e_n + 1) \varphi_{n+1}(y)$$

soit

$$\forall y \in \mathbf{R}, -\varphi_{n+1}''(y) + y^2 \varphi_{n+1}(y) = (e_n + 2) \varphi_{n+1}(y)$$

ce qui est le résultat voulu au rang  $n + 1$  en posant  $e_{n+1} = e_n + 2$ .

Ce raisonnement par récurrence prouve donc le résultat recherché à tout rang, et plus explicitement, pour tout  $n \in \mathbf{N}$

$$\forall y \in \mathbf{R}, -\varphi_n''(y) + y^2 \varphi_n(y) = (2n + 1) \varphi_n(y).$$

- (c) • Notons  $\mathbf{R}[X]$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  et remarquons que  $\varphi_0$  est un élément de l'espace vectoriel  $V := \{y \mapsto P(y) e^{-y^2/2} \mid P \in \mathbf{R}[X]\}$ .

Ce dernier est stable par l'opérateur  $-\frac{d}{dy} + y$  : en effet, étant donné  $\varphi : y \mapsto P(y) e^{-y^2/2}$ , où  $P \in \mathbf{R}[X]$ , un calcul immédiat montre que pour tout réel  $y$ ,

$$\left( -\frac{d}{dy} + y \right) (\varphi(y)) = (2yP(y) - P'(y)) e^{-y^2/2},$$

et la fonction  $y \mapsto 2yP(y) - P'(y)$  est bien polynomiale.

- Notons  $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite de polynômes définie par

$$Q_0 = \frac{1}{\pi^{1/4}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, Q_{n+1} : y \mapsto 2yQ_n(y) - Q_n'(y),$$

le même raisonnement par récurrence qu'en I.3 montre que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la fonction  $Q_n$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant strictement positif.

- Soit  $n \in \mathbf{N}$ , et posons  $\psi_n : y \mapsto \left( -\frac{d}{dy} + y \right)^n \varphi_0(y)$ . Le premier point de la démonstration garantit alors par une récurrence immédiate que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \psi_n(y) = Q_n(y) e^{-y^2/2}.$$

Ainsi  $P_n := C_n Q_n$  est un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant strictement positif tel que

$$\forall y \in \mathbf{R}, \varphi_n(y) = P_n(y) e^{-y^2/2}.$$

L'unicité d'un polynôme vérifiant cette propriété est immédiate car l'exponentielle ne s'annule pas.

- (d) Reprenons les polynômes  $Q_n$  de la question précédente et posons

$$R_n : y \mapsto \frac{\pi^{1/4}}{2^{n/2}} Q_n(y/\sqrt{2}),$$

si bien que  $R_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la relation

$$\forall y \in \mathbf{R}, Q_{n+1}(y/\sqrt{2}) = \sqrt{2} y Q_n(y/\sqrt{2}) - Q_n'(y/\sqrt{2})$$

donne

$$\forall y \in \mathbf{R}, R_{n+1}(y) = y R_n(y) - R'_n(y).$$

La suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifie donc la même relation de récurrence que la suite  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , avec la même condition initiale. On a donc  $\forall n \in \mathbf{N}, H_n = R_n$ , et ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{R}, Q_n(y) = \frac{(\sqrt{2})^n}{\pi^{1/4}} H_n(y\sqrt{2}).$$

Par suite, étant donné  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\int_{\mathbf{R}} Q_n(y)^2 e^{-y^2} dy = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} H_n(y\sqrt{2})^2 e^{-y^2} dy.$$

Le changement de variable  $y = t/\sqrt{2}$  montre alors que

$$\int_{\mathbf{R}} Q_n(y)^2 e^{-y^2} dy = 2^n \langle H_n, H_n \rangle = 2^n n!.$$

Ainsi

$$C_n = \frac{1}{2^{n/2} \sqrt{n!}}.$$

On conclut que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{R}, P_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{n!}} H_n(y\sqrt{2}).$$

**Remarque :** grâce au I.2, on peut alors vérifier le calcul du (a).

4. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on dispose de la solution  $\varphi_n$ , non identiquement nulle car  $\deg P_n = n$ , de (4.4) pour  $e_n = 2n + 1$ . Remarquons que  $\varphi_n, \varphi'_n$  et  $\varphi''_n$  sont toutes de carré intégrable car toutes de la forme  $y \mapsto H(y)e^{-y^2/2}$  avec  $H$  polynomiale (on a vu que l'ensemble des fonctions de ce type est stable par dérivation, et on sait depuis III.3 qu'il contient  $\varphi_n$ ). En posant  $\alpha := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ , on trouve, en raisonnant comme en III.1, que  $\psi_n : x \mapsto \varphi_n(\alpha x)$  est une solution de (4.3) pour  $E = \frac{\hbar\omega}{2} e_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ . Un simple changement de variable affine montre que  $\psi_n, \psi'_n$  et  $\psi''_n$  sont bien toutes dans  $L^2(\mathbf{R})$ . Enfin  $\psi_n$  n'est pas identiquement nulle.

On conclut qu'une suite strictement croissante de niveaux d'énergie possibles est  $\left(\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ .

5. En multipliant (4.6) par  $\Psi$ , on trouve pour tout réel  $x$ ,

$$E \Psi(x)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) \Psi(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi(x)^2 \geq 0.$$

Comme  $\Psi$  et  $\Psi''$  sont de carré intégrable, la fonction de gauche est intégrable sur  $\mathbf{R}$  et on a donc en passant à l'intégrale :

$$E \int_{\mathbf{R}} \Psi^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbf{R}} \Psi'' \Psi \geq 0,$$

d'où

$$E \int_{\mathbf{R}} \Psi^2 \geq -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{\mathbf{R}} \Psi'' \Psi.$$

Puisque  $\Psi^2$  est continue et non identiquement nulle, on a  $\int_{\mathbf{R}} \Psi^2 > 0$ .

Pour montrer que  $E > 0$ , il suffit donc d'établir que  $\int_{\mathbf{R}} \Psi'' \Psi < 0$ , ce que nous allons maintenant faire.

Fixons  $x \in \mathbf{R}$ . Comme  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut intégrer par parties, ce qui donne

$$\int_0^x \Psi''(y) \Psi(y) dy = \Psi'(x) \Psi(x) - \Psi'(0) \Psi(0) - \int_0^x \Psi'(y)^2 dy.$$



Puisque  $\Psi''\Psi$  et  $(\Psi')^2$  sont intégrables sur  $\mathbf{R}$ , la fonction  $x \mapsto \int_0^x \Psi''(y)\Psi(y)dy + \int_0^x \Psi'(y)^2 dy$  a une limite finie en  $+\infty$ , donc  $\Psi'\Psi$  a elle-même une limite finie en  $+\infty$ . Supposons cette limite  $\ell$  non nulle. Alors  $(\Psi^2)'$  a pour limite  $2\ell$  en  $+\infty$ , et comme  $t \mapsto \ell$  est de signe constant et non intégrable sur  $\mathbf{R}$ , on en déduit par intégration des relations de comparaison que

$$\Psi^2(x) - \Psi^2(0) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ell x,$$

d'où on tire que  $\Psi^2$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  (le cas  $\ell < 0$  est exclu car  $\Psi^2 \geq 0$ ).

Cela contredit l'intégrabilité de  $\Psi^2$  sur  $\mathbf{R}$ .

On en déduit que  $\ell = 0$  autrement dit  $\lim_{+\infty} \Psi'\Psi = 0$ . Un raisonnement similaire assure  $\lim_{-\infty} \Psi'\Psi = 0$ .

En reprenant l'intégration par parties initiale, cette fois-ci entre  $x$  et  $-x$ , et en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on trouve donc

$$\int_{\mathbf{R}} \Psi''\Psi = - \int_{\mathbf{R}} (\Psi')^2 \leq 0.$$

Si on avait  $\int_{\mathbf{R}} \Psi''\Psi = 0$ , alors on en déduirait que  $\Psi' = 0$  (puisque  $(\Psi')^2$  est positive et continue), donc  $\Psi$  serait constante. Puisque  $\Psi \in L^2(\mathbf{R})$ , une telle constante devrait être nulle ce qui est interdit par hypothèses sur  $\Psi$ . On a donc bien  $\int_{\mathbf{R}} \Psi''\Psi < 0$ , ce qui, vu les considérations initiales, permet d'obtenir  $E > 0$ .

#### IV. Équation d'Hermite

1. Puisque  $\forall y \in \mathbf{R}$ ,  $H(y) = \Phi(y)e^{y^2/2}$ , la fonction  $\Phi$  est deux fois dérivable si et seulement si  $H$  est deux fois dérivable. Supposons maintenant  $H$  deux fois dérivable. Alors, pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$\Phi'(y) = (H'(y) - yH(y))e^{-y^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi''(y) = (H''(y) - 2yH'(y) - H(y) + y^2H(y))e^{-y^2/2}.$$

Par suite, pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , la condition

$$-\Phi''(y) + y^2\Phi(y) = e\Phi(y)$$

se réécrit

$$(-H''(y) + 2yH'(y) + H(y) - y^2H(y) + y^2H(y))e^{-y^2/2} = eH(y)e^{-y^2/2},$$

et est donc équivalente, puisque l'exponentielle ne s'annule pas, à

$$-H''(y) + 2yH'(y) + H(y) = eH(y).$$

On en déduit que  $\Phi$  est solution de (4.4) si et seulement si  $H$  est solution de  $(A_{e-1})$ .

2. L'équation  $(A_\lambda)$  est linéaire homogène résolue du second ordre à coefficients continus : le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure donc que l'ensemble de ses solutions sur  $\mathbf{R}$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

3. On a déjà

$$XF'(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n X^n \quad \text{et} \quad F''(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} X^n.$$

Ainsi,

$$F''(X) - 2XF'(X) + \lambda F(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n,$$

où, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$b_n = (n+1)(n+2) a_{n+2} - 2n a_n + \lambda a_n.$$

Pour que  $F''(X) - 2X F'(X) + \lambda F(X) = 0$ , il est donc nécessaire et suffisant que

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n+1)(n+2) a_{n+2} = (2n - \lambda) a_n$$

ce qui se réécrit

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

4. Supposons que  $F$  vérifie la relation (4.7). Alors  $a_{n+2} \sim \frac{2}{n} a_n$  et donc  $a_{n+2} = o(a_n)$ .  
Soit  $z \in \mathbf{C}$ . Les suites  $u = (a_{2n} z^{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $v = (a_{2n+1} z^{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  vérifient  $u_{n+1} = o(a_{2n} z^{2n} z^2) = o(u_n)$  et de même  $v_{n+1} = o(v_n)$ . Le critère de d'Alembert assure que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, ce qui montre par addition que  $\sum a_n z^n$  converge.  
On en déduit que la série entière  $\sum a_n z^n$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ .
5. On a vu en 4 que  $H^+$  et  $H^-$  sont bien définies sur  $\mathbf{R}$ . Les séries formelles associées vérifient toutes deux la relation (4.7), donc, vu le lien entre dérivation des séries formelles et dérivation des sommes de séries entières, les fonctions  $H^+$  et  $H^-$  sont bien des solutions de l'équation différentielle  $(A_\lambda)$ .  
Puisque le wronskien de  $(H^+, H^-)$  en 0 est  $\begin{vmatrix} a_0^+ & a_0^- \\ a_1^+ & a_1^- \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , on en déduit que  $(H^+, H^-)$  est une base de l'espace des solutions sur  $\mathbf{R}$  de  $(A_\lambda)$ .
6. • Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Supposons que  $(A_\lambda)$  admette une solution polynomiale non nulle  $P : y \mapsto \sum_{n=0}^N a_n y^n$  avec  $a_N \neq 0$ . Compte tenu du lien entre séries formelles et sommes de séries entières, les coefficients de la série formelle  $F := \sum_{n=0}^N a_n X^n$  vérifient la relation de récurrence obtenue en 3. En convenant que  $a_n = 0$  pour  $n > N$ , on a alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n$ . En particulier, comme  $a_{N+2} = 0$ , on a nécessairement  $\lambda = 2N$ .  
• Réciproquement, soit  $n \in \mathbf{N}$ . D'après III.3.(b), III.3.(c) et IV.1, le polynôme  $P_n$  (qui est non nul) est solution de l'équation différentielle  $(A_\lambda)$  pour  $\lambda = (2n+1) - 1 = 2n$ .  
On conclut que  $(A_\lambda)$  admet une solution polynomiale si et seulement si  $\lambda \in 2\mathbf{N}$ .

7. (a) • On vient de voir que  $P_n$  est une solution de  $(E_{2n})$ .  
• Soit  $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite réelle vérifiant la relation trouvée en 3. Notons  $m$  l'unique élément de  $\{0, 1\}$  tel que  $n \neq m$  [2]. Une itération de la relation trouvée en 3 montre que  $a_{m+2k}$  est produit de  $a_m$  par un réel non nul quel que soit  $k \in \mathbf{N}$ ; si en particulier  $a_m \neq 0$ , alors  $a_{m+2k} \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ . Par suite, l'une des fonctions  $H^+$  ou  $H^-$  n'est pas polynomiale.  
• Puisque l'ensemble des solutions polynomiales de  $(A_\lambda)$  forme un sous-espace vectoriel strict non nul du plan vectoriel des solutions, c'est une droite vectorielle. Il contient  $P_n$  donc il s'agit de  $\text{Vect}(P_n)$ .

On en déduit que l'ensemble des solutions polynomiales de  $(A_\lambda)$  est  $\text{Vect}(P_n)$  où on rappelle que  $P_n : y \mapsto \varphi_n(y) e^{y^2/2}$ .

- (b) On commence par calculer les coefficients de  $P_n$ .

On note  $P_n : y \mapsto \sum_{k=0}^n a_k y^k$  et on convient que  $a_k = 0$  pour  $k > n$ . Compte tenu du lien entre séries entières et séries formelles, on sait que les coefficients de  $P_n$  vérifient la relation

$$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{n\}, a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2k-2n} a_{k+2}.$$

Comme  $a_{n+1} = 0$ , on en déduit  $a_{n-1} = 0$  puis par itérations  $a_{n-2k-1} = 0$  pour tout entier  $k$  tel que  $n \geq 2k+1$ .

D'autre part, par itérations successives, pour tout entier  $k \in [0, n/2]$ ,

$$a_{n-2k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{(-4)^k k!} a_n = \frac{n!}{(-4)^k (n-2k)! k!} a_n.$$

Notons

$$H_n : y \mapsto \sum_{k=0}^n b_k y^k.$$

Compte tenu de la relation établie en III.3.(d) et par unicité des coefficients, on trouve un réel  $\lambda$  tel que

$$\forall k \in [0, n], b_k = \lambda \frac{a_k}{(\sqrt{2})^k},$$

d'où :

- $b_{n-2k-1} = 0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq 2k+1$  ;
- pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n/2$ ,

$$b_{n-2k} = \frac{n!}{(-2)^k (n-2k)! k!} b_n = \frac{n!}{(-2)^k (n-2k)! k!}$$

puisque  $H_n$  est unitaire.

On en déduit l'expression développée :

$$H_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \frac{n!}{2^k (n-2k)! k!} X^{n-2k}.$$

8. (a) Pour tout réel  $t$ , on a  $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ , d'où, par simple substitution,

$$\forall y \in \mathbf{R}, g_\alpha(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{2^n n!} y^{2n}.$$

Ainsi,  $g_\alpha$  est développable en série entière autour de 0 avec un rayon de convergence infini.

En réécrivant  $\sum b_n z^n$  la série entière associée, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, b_{2n} = \frac{\alpha^n}{2^n n!} \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = 0.$$

- (b) Puisque  $a_0^+ \neq 0$  et  $2n - \lambda \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la relation de récurrence du 3 permet de voir que  $a_{2n}^+ \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Par suite, la relation de récurrence du 3 donne

$$\frac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \sim \frac{2(2n) - \lambda}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{n}$$

tandis que l'expression trouvée en (a) montre que

$$\frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} \sim \frac{\alpha}{2n}.$$

Ainsi,

$$\frac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \frac{b_{2n}}{b_{2n+2}} \sim \frac{2}{\alpha}.$$

Puisque  $\frac{2}{\alpha} > 1$ , on en déduit un rang  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,

$$\frac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \frac{b_{2n}}{b_{2n+2}} \geq 1,$$

ce qui assure, puisque  $b_{2k} > 0$  pour tout  $k$ , que

$$\frac{a_{2n+2}^+}{a_{2n}^+} \geq \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} \geq 0.$$

- (c) Par suite,  $(a_{2n}^+)_{n \in \mathbf{N}}$  est de signe constant à partir du rang  $N$  (puisque  $(b_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  est à termes positifs).
- On suppose pour commencer que  $a_{2N}^+ > 0$ .  
En faisant le produit des inégalités précédentes de  $N$  à un rang  $n \geq N$ , on trouve (produit télescopique)

$$\frac{a_{2n}^+}{a_{2N}^+} \geq \frac{b_{2n}}{b_{2N}},$$

si bien qu'en posant  $\beta := \frac{a_{2N}^+}{b_{2N}}$ , on a

$$\forall n \geq N, a_{2n}^+ \geq \beta b_{2n}.$$

Soit maintenant  $y \in \mathbf{R}$ . En multipliant par le réel positif  $y^{2n}$  puis en sommant, on trouve alors

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_{2n}^+ y^{2n} \geq \beta \sum_{n=N}^{+\infty} b_{2n} y^{2n}.$$

La relation obtenue en 3 et le fait que  $a_1^+ = 0$  montrent par itérations que  $a_{2k+1}^+ = 0$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , donc

$$\sum_{n=2N}^{+\infty} a_n^+ y^n \geq \beta \sum_{n=2N}^{+\infty} b_n y^n$$

ce qui, en posant

$$P(y) := \sum_{n=0}^{2N-1} (a_n^+ - \beta b_n) y^n,$$

se réécrit

$$\frac{H^+(y)}{\beta} \geq g_\alpha(y) - \frac{P(y)}{\beta}.$$

Comme  $P$  est polynomiale, les croissances comparées usuelles garantissent que  $P(y) = o(g_\alpha(y))$ , donc

$$g_\alpha(y) - \frac{1}{\beta} P(y) \underset{|y| \rightarrow +\infty}{\sim} g_\alpha(y).$$

Ainsi, pour  $|y|$  voisin de  $+\infty$ , on trouve

$$0 \leq g_\alpha(y) \leq \frac{2H^+(y)}{\beta}$$

et donc

$$g_\alpha(y) = O_{|y| \rightarrow +\infty}(H^+(y)).$$

- Si  $a_{2N}^+ < 0$ , on procède de la même manière pour montrer que

$$g_\alpha(y) = O_{|y| \rightarrow +\infty}(-H^+(y)) = O_{|y| \rightarrow +\infty}(H^+(y)).$$

Dans tous les cas, on a établi le résultat souhaité.

- (d) En prenant  $\alpha = 1$ , on trouve que  $g_1$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ , donc  $H^+$  n'est pas bornée. On montre de manière similaire que  $H^-$  n'est pas bornée : donnons simplement les grandes lignes de la démonstration. On fixe à nouveau un  $\alpha \in ]0, 2[$ .

- On prouve qu'il existe un rang  $N$  tel que  $\forall n \geq N, \frac{a_{2n+3}^-}{a_{2n+1}^-} \geq \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}}$ .
- On suppose  $a_{2N+1}^- > 0$ . On en déduit, en posant  $\beta := \frac{a_{2N+1}^-}{b_{2N}}$ , que pour tout  $y \in \mathbf{R}_+$ ,

$$H^-(y) \geq \beta y g_\alpha(y) - P(y),$$

avec  $P(y) := \sum_{n=0}^{2N} a_n^- y^n - \beta y \sum_{n=0}^{2N} b_n y^n$ . Ceci assure, puisque  $P(y) = o(y g_\alpha(y))$  et  $y g_\alpha(y) \geq 0$  pour  $y \geq 0$ , que

$$y g_\alpha(y) = O_{y \rightarrow +\infty}(H^-(y)).$$

- Si  $a_{2N+1}^- < 0$ , on montre de même que

$$y g_\alpha(y) = O_{y \rightarrow +\infty}(-H^-(y)) = O_{y \rightarrow +\infty}(H^-(y)).$$

Dans tous les cas, puisque  $y \mapsto y g_1(y)$  a une limite infinie en  $+\infty$ , on en déduit que  $H^-$  n'est pas bornée.

On peut maintenant conclure.

Soit  $H$  une solution bornée de  $(A_\lambda)$ . D'après la question 5, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $H = aH^+ + bH^-$ .

Remarquons que  $H^+$  est paire alors que  $H^-$  est impaire. Il s'ensuit que  $a.H^+$  et  $b.H^-$  sont respectivement la partie paire et la partie impaire de  $H$ , ce qui assure qu'elles sont bornées (en effet la partie paire de  $H$  s'écrit  $x \mapsto \frac{H(x) + H(-x)}{2}$  et sa partie impaire  $x \mapsto \frac{H(x) - H(-x)}{2}$ ). Comme ni  $H^+$  ni  $H^-$  n'est bornée, ceci impose  $a = b = 0$ , donc  $H = 0$ . Réciproquement, la solution nulle est bornée.

On a donc prouvé que la seule solution bornée de  $(A_\lambda)$  est la solution nulle.

## V. Fonctions propres non tempérées

1. On introduit le sous-espace vectoriel  $V := \{y \mapsto P(y)e^{-y^2/2} \mid P \in \mathbf{R}[X]\}$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ .

- Tout élément de  $V$  est borné. Soit en effet  $P$  un polynôme, et posons  $f : y \mapsto P(y)e^{-y^2/2}$ . Par les croissances comparées usuelles  $P(y) = O_{|y| \rightarrow +\infty}(e^{y^2/2})$ , autrement dit  $f$  est bornée au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ . D'autre part,  $f$  est continue, donc bornée sur tout compact. On en déduit que  $f$  est bornée.
- On a déjà vu dans les parties précédentes que  $V$  est stable par dérivation, et il est évident qu'il est stable par multiplication par un polynôme. Par suite, pour tout  $f \in V$  et tout  $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$ , la fonction  $y \mapsto y^k f^{(\ell)}(y)$  appartient à  $V$ , et elle est donc bornée.

On a donc prouvé que  $V \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ , ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  intégrable sur  $\mathbf{R}$ , que l'on suppose de plus continue. On suppose en outre  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ .

- Commençons par montrer que  $\hat{f}$  est indéfiniment dérivable et calculer ses dérivées successives. Soit  $k \in \mathbf{N}$ . On a pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ ,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(y)e^{-i\xi y} dy.$$

Pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , la fonction  $\xi \mapsto f(y)e^{-i\xi y}$  est dérivable à l'ordre  $k$  de dérivée  $k$ -ème  $\xi \mapsto (-iy)^k f(y)e^{-i\xi y}$ .

Pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ , on a

$$\forall y \in \mathbf{R}, |(-i)^k y^k f(y)e^{-i\xi y}| = |y^k f(y)|.$$

Enfin, la fonction  $y \mapsto y^k f(y)$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$  : en effet, elle est continue, et puisque  $y \mapsto y^{k+2} f(y)$  est bornée, on a

$$y^k f(y) = O_{|y| \rightarrow +\infty}(y^{-2}).$$

Ceci vaut pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , donc les théorèmes de dérivation sous l'intégrale garantissent que  $\hat{f}$  est indéfiniment dérivable et que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall y \in \mathbf{R}, (\hat{f})^{(k)}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} (-i)^k y^k f(y)e^{-i\xi y} dy.$$

- Vérifions maintenant que  $\xi \mapsto \xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi)$  est bornée pour tout  $(k, l) \in \mathbf{N}^2$ .

Commençons par un résultat préliminaire en calculant  $\hat{f}'$ , ce qui a un sens puisque de manière évidente  $f' \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ , donc  $f'$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ . Soit  $\xi \in \mathbf{R}$ . Intégrons par parties  $\int_{\mathbf{R}} f'(y)e^{-i\xi y} dy$ .

La fonction  $y \mapsto i\xi f(y)e^{-i\xi y}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ . La fonction  $y \mapsto f(y)e^{-i\xi y}$  a des limites nulles en  $+\infty$  et  $-\infty$  car  $y \mapsto yf(y)$  est bornée. On trouve donc

$$\int_{\mathbf{R}} f'(y)e^{-i\xi y} dy = [f(y)e^{-i\xi y}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbf{R}} i\xi f(y)e^{-i\xi y} dy = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

On a ainsi établi :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

En itérant le procédé, on trouve alors, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi).$$

Par suite, pour tout  $(k, l) \in \mathbf{N}^2$ ,

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \xi^k \widehat{f^{(l)}}(\xi) = (-i)^{l+k} \widehat{g_{k,l}}(\xi),$$

où  $g_{k,l} : y \mapsto \frac{d}{dy^k}(y^l f(y))$ . La formule de Leibniz montre que  $g_{k,l}$  est combinaison linéaire de fonctions de la forme  $y \mapsto y^a f^{(b)}(y)$  avec  $(a, b) \in \mathbf{N}^2$  : toutes ces fonctions sont intégrables sur  $\mathbf{R}$  (même principe d'argumentation qu'au premier point en utilisant le caractère borné de  $y \mapsto y^{a+2} f^{(b)}(y)$ ), donc  $g_{k,l}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$  et ainsi sa transformée de Fourier est bornée sur  $\mathbf{R}$  (majorée en norme infinie par  $\int_{\mathbf{R}} |g_{k,l}|$ ).

- On a donc bien prouvé que si  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ , alors  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ .
- Réciproquement, on suppose  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ . Alors  $\widehat{f}$  est intégrable donc elle admet une transformée de Fourier  $g$  et le sens direct montre que  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ . La formule d'inversion de Fourier assure quant à elle que

$$\forall y \in \mathbf{R}, f(y) = \frac{1}{2\pi} g(-y)$$

(égalité valable sur tout  $\mathbf{R}$  et non seulement presque partout, car  $f$  est continue). Par suite, pour tout  $(k, l) \in \mathbf{N}^2$ ,

$$\forall y \in \mathbf{R}, y^k f^{(l)}(y) = \frac{1}{2\pi} (-1)^l y^k g^{(l)}(-y) = \frac{1}{2\pi} (-1)^{l+k} (-y)^k g^{(l)}(-y),$$

et puisque par hypothèses  $y \mapsto y^k g^{(l)}(y)$  est bornée, on en déduit que  $y \mapsto y^k f^{(l)}(y)$  est également bornée. Ceci montre que  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ .

On conclut à l'équivalence

$$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$

3. On a vu précédemment que  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  est stable par dérivation, et la formule de Leibniz permet de voir facilement qu'il est également stable par multiplication par une fonction polynomiale. Les fonctions  $y \mapsto -f''(y) + y^2 f(y)$  et  $y \mapsto e f(y)$  sont donc dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ , et les calculs précédents montrent que leurs transformées de Fourier respectives sont  $\xi \mapsto \xi^2 \widehat{f}(\xi) - (\widehat{f})''(\xi)$  et  $\xi \mapsto e \widehat{f}(\xi)$ .

Or la formule d'inversion de Fourier déjà rappelée montre que la transformation de Fourier est injective sur  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ . Ainsi,

$$(\forall y \in \mathbf{R}, -f''(y) + y^2 f(y) = e f(y)) \Leftrightarrow (\forall \xi \in \mathbf{R}, -(\widehat{f})''(\xi) + \xi^2 \widehat{f}(\xi) = e \widehat{f}(\xi)),$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Commençons par remarquer, par linéarité de la dérivation et comme toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée, que  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  est un sous- $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ . Notons  $S$  l'ensemble des solutions de (4.4) de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ .

- On déduit de IV.1 et IV.3 que l'ensemble des solutions de (4.4) est le plan vectoriel engendré par les deux fonctions

$$f : y \mapsto H^+(y) e^{-y^2/2} \quad \text{et} \quad g : y \mapsto H^-(y) e^{-y^2/2},$$

où  $H^+$  et  $H^-$  correspondent à  $\lambda := e - 1$ .

- On suppose que  $e \neq 2n + 1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

On déduit alors de IV.8 (prendre  $\alpha = 1$ ) que  $e^{y^2} e^{-y^2/2} = O(f(y))$  quand  $|y|$  tend vers  $+\infty$ , ce qui garantit que  $f$  n'est pas bornée, donc pas dans  $S(\mathbf{R})$ .

On trouve de même que  $ye^{y^2} e^{-y^2/2} = O(g(y))$  quand  $|y|$  tend vers  $+\infty$ , donc  $g$  n'appartient pas à  $S(\mathbf{R})$ .

Par suite, étant donné  $F$  une solution de (4.4), que l'on décompose comme  $F = \lambda.f + \mu.g$ , la même argumentation qu'en III.8.(d) sur les parties paire et impaire montre que si  $F$  était bornée, alors  $\lambda.f$  et  $\mu.g$  le seraient aussi et donc  $\lambda = \mu = 0$ . Réciproquement, la solution nulle est évidemment dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ .

On en déduit que la seule solution de (4.4) appartenant à  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  est la fonction nulle.

- On suppose maintenant que  $e = 2n + 1$  pour un  $n \in \mathbf{N}$ .

En procédant comme en IV.8 et au point précédent, on prouve alors que :

- si  $n$  est pair, alors  $g$  n'est pas bornée ;
- si  $n$  est impair, alors  $f$  n'est pas bornée.

En effet, le seul moment où l'on utilise  $\lambda \notin 2\mathbf{N}$  dans IV.8 est pour être assuré que  $a_{2n}^+$  (respectivement  $a_{2n+1}^-$ ) est non nul à partir d'un certain rang. Dans tous les cas,  $S \cap \mathcal{S}(\mathbf{R})$  est un sous-espace vectoriel strict de  $S$ , donc de dimension au plus 1. Or, d'après V.1, il contient la fonction non nulle  $\varphi_n$ , donc il est de dimension au moins 1. C'est donc une droite vectorielle, engendrée par  $\varphi_n$ . Ainsi, l'ensemble des solutions de (4.4) appartenant à  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  est  $\text{Vect}(\varphi_n)$ .

5. (a) On sait que  $\varphi_n$  est solution de (4.4) pour  $e = 2n + 1$ . De plus,  $\varphi_n$  appartient à  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  donc admet une transformée de Fourier dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ . D'après le résultat de la question 3, cette dernière est une solution de (4.4), et en appliquant le résultat de 4, on conclut que  $\widehat{\varphi}_n$  est colinéaire à  $\varphi_n$ .
- (b) À toute fonction  $f$  de  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ , associons la fonction  $Hf : y \mapsto -f'(y) + yf(y)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  (voir l'argumentation en 3.). Examinons maintenant la commutation de  $H$  avec la transformation de Fourier. D'après les résultats établis pour la question 2, on a pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ,

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \widehat{Hf}(\xi) = -i\xi \widehat{f}(\xi) + i(\widehat{f})'(\xi),$$

ce qui montre que

$$\widehat{Hf} = -iH\widehat{f}.$$

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . En itérant la formule précédente, on trouve pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\widehat{H^n f} = (-i)^n H^n \widehat{f}.$$

En particulier, par linéarité de la transformation de Fourier,

$$\widehat{\varphi}_n = C_n (-i)^n H^n \widehat{\varphi}_0.$$

Reste à calculer  $\widehat{\varphi}_0$ . Or on a vu à la question précédente qu'il existe un  $\lambda \in \mathbf{C}$  tel que  $\widehat{\varphi}_0 = \lambda \varphi_0$ , d'où, en appliquant cette formule en 0, :

$$\lambda = \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi  $\widehat{\varphi}_0 = \sqrt{2\pi} \varphi_0$ , donc  $\widehat{\varphi}_n = \sqrt{2\pi} C_n (-i)^n H^n \varphi_0$  et finalement

$$\widehat{\varphi}_n = \sqrt{2\pi} (-i)^n \varphi_n.$$

6. (a) La fonction  $g$  est le produit des deux fonctions  $y \mapsto f(y)e^{-y^2/4}$  et  $y \mapsto e^{-y^2/4}$ , toutes deux de carré intégrable sur  $\mathbf{R}$  (la première car  $f \in L^2(\mu)$ ). Ainsi,  $g$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ , donc sa transformée de Fourier est bien définie.

Plus généralement, étant donné  $z \in \mathbf{C}$ , on peut définir l'intégrale  $\widehat{g}(z) := \int_{\mathbf{R}} g(y) e^{-izy} dy$ . En effet, en notant  $a = \text{im}(z)$ , on a pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,

$$|g(y) e^{-izy}| = |f(y)| e^{-y^2/4} e^{ay - y^2/4}.$$

La fonction  $y \mapsto e^{ay - y^2/4}$  a pour carré  $y \mapsto e^{2ay - y^2/2}$  qui est intégrable sur  $\mathbf{R}$  : en effet, elle est continue, on a  $2ay - \frac{y^2}{2} \leq -\frac{y^2}{4}$  pour  $y$  voisin de  $+\infty$  et  $-\infty$ , et enfin  $y \mapsto e^{-y^2/4}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ .

De même qu'en début de réponse, on en déduit que  $y \mapsto g(y) e^{-izy}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ , ce qui prouve que  $\widehat{g}(z)$  est bien défini.

De plus, pour tout  $a \in \mathbf{R}_+^*$ , le résultat précédent permet de voir que  $y \mapsto g(y) e^{-izy}$  est dominée par la fonction intégrable  $y \mapsto |f(y)| e^{-y^2/4} e^{ay - y^2/4}$  quand  $-a < \text{im } z < a$ . D'autre part, à  $y$  réel fixé, la fonction  $z \mapsto g(y) e^{-izy}$  est holomorphe. Le théorème d'holomorphie sous l'intégrale garantit alors que  $\widehat{g}$  est holomorphe sur la bande ouverte  $\{z \in \mathbf{C} : -a < \text{im } z < a\}$ . Ceci vaut pour tout  $a \in \mathbf{R}_+^*$  donc  $\widehat{g}$  est holomorphe sur  $\mathbf{C}$ .

- (b) Commençons par remarquer que  $V$  est l'ensemble des fonctions polynomiales car  $\deg H_n = n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , si bien que  $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une base de  $\mathbf{R}[X]$ .

Soit maintenant  $f \in L^2(\mu)$  orthogonal à  $V$ . On définit la fonction  $g$  comme en (a).

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . En raisonnant comme en (a) et en remarquant que  $y \mapsto y^n e^{-y^2/4}$  est de carré intégrable sur  $\mathbf{R}$ , on trouve que la fonction  $y \mapsto y^n g(y)$  est encore intégrable sur  $\mathbf{R}$ . Comme en 2, ceci garantit que pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ ,

$$\widehat{g}^{(n)}(\xi) = (-i)^n \int_{\mathbf{R}} y^n g(y) e^{-i\xi y} dy.$$

En particulier

$$\widehat{g}^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{\mathbf{R}} y^n f(y) e^{-y^2/2} dy = (-i)^n \sqrt{2\pi} \langle X^n, f \rangle.$$

Comme  $f$  est orthogonal à  $X^n$ , on en déduit  $\widehat{g}^{(n)}(0) = 0$ . Ceci vaut pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , donc le principe des zéros isolés assure que  $\widehat{g} = 0$ .

En particulier,  $\widehat{g}$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ , si bien que la formule d'inversion de Fourier fournit  $f = 0$ .

On a donc établi que  $V^\perp = \{0\}$ . Puisque  $L^2(\mu)$  est un espace de Hilbert, ceci assure que  $\overline{V} = L^2(\mu)$ .

Par suite, la famille orthonormée  $\left(\frac{1}{\sqrt{n!}} H_n\right)_{n \in \mathbf{N}}$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mu)$ .

## VI. Systèmes hamiltoniens

1. Pour tout  $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(p, q) = \frac{p_j}{m_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(p, q) = \frac{\partial V}{\partial q_j}(q).$$

Le système hamiltonien (4.8) se réécrit donc

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_j}(q) \quad \text{et} \quad \frac{dq_j}{dt} = -\frac{p_j}{m_j}.$$

La seconde relation impose les inconnues  $p_1, \dots, p_d$  connaissant  $q_1, \dots, q_d$ .

Par rapport aux seules inconnues  $q_1, \dots, q_d$ , le système (4.8) se réécrit donc

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad -m_j \frac{d^2 q_j}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial q_j}(q),$$



les conditions initiales (4.9) s'écrivant alors

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, q_j(0) = q_j^0 \quad \text{et} \quad q_j'(0) = -\frac{p_j^0}{m_j}.$$

2. En prenant  $V : q \mapsto \frac{1}{2} k q^2$  et

$$\mathcal{H} : (p, q) \mapsto \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

on trouve  $V' : q \mapsto k q$  et on déduit donc de la question précédente que (4.1)-(4.2) peut s'écrire sous la forme du système hamiltonien (4.8) pour cette fonction  $\mathcal{H}$  avec  $d = 1$  et les conditions initiales

$$p_1(0) = -m y_0 \quad \text{et} \quad q_1(0) = x_0.$$

3. On remarque que

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix} = -J$$

et  $J J^T = I_{2d}$ . Ainsi,  $J$  est inversible et

$$J^{-1} = J^T = -J.$$

4. Comme  $\mathcal{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $y$  est dérivable, la fonction  $f : t \mapsto \mathcal{H}(y(t))$  est dérivable sur  $I$  de dérivée

$$t \mapsto \left( \frac{dy}{dt} \right)^T \nabla \mathcal{H}(y(t)) = \nabla \mathcal{H}(y(t))^T J^T \nabla \mathcal{H}(y(t)).$$

Or étant donné  $(p, q) \in \mathbf{R}^{2d}$ , on a par transposition

$$(\nabla \mathcal{H}(p, q)^T J^T \nabla \mathcal{H}(p, q))^T = \nabla \mathcal{H}(p, q)^T J \nabla \mathcal{H}(p, q) = -\nabla \mathcal{H}(p, q)^T J^T \nabla \mathcal{H}(p, q)$$

donc le réel  $\nabla \mathcal{H}(p, q)^T J \nabla \mathcal{H}(p, q)$  est nul. On en déduit que  $t \mapsto \mathcal{H}(y(t))$  est constante.

5. Comme  $\nabla \mathcal{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que (4.10) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0. D'après la question précédente, la fonction  $t \mapsto \mathcal{H}(y(t))$  est constante, de valeur  $\mathcal{H}(y(0))$ . Compte tenu de l'hypothèse effectuée, on en

déduit, en notant  $M := \sqrt{\frac{\mathcal{H}(y(0))}{C}}$ .

$$\forall t \in I, \|y(t)\| \leq M.$$

Notons  $B$  la boule fermée de  $\mathbf{R}^{2d}$  de centre 0 et de rayon  $M$  pour la norme  $\| \cdot \|$ . La fonction  $\nabla \mathcal{H}$  est continue sur le compact  $B$ , donc bornée. On déduit de (4.10) que  $y'$  est bornée, donc le théorème des accroissements finis garantit que  $y$  est uniformément continue.

- Supposons  $I$  majoré et considérons  $b := \sup I$ .

Alors  $y$  se prolonge en une fonction continue sur  $I \cup \{b\}$ , et par suite la condition (4.10) et le théorème de limite de la dérivée montrent que cette fonction est dérivable en  $b$  et même que c'est une solution de (4.10) sur  $I \cup \{b\}$ . Cela contredit la maximalité de  $I$ .

- On montre de même que  $I$  n'est pas minoré.

On déduit finalement de ce raisonnement par l'absurde que  $I = \mathbf{R}$ . Ainsi, le système (4.10) admet une unique solution définie sur  $\mathbf{R}$ , et par suite c'est aussi l'unique solution de (4.8) avec les conditions initiales (4.9).

6. (a) Puisque  $\mathcal{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , la fonction  $\nabla \mathcal{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . D'après le théorème au programme sur la dépendance des solutions envers la condition initiale, la fonction  $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2d}$ .

- (b) Puisque  $\mathcal{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^3$ , la fonction  $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . En lui appliquant le théorème des dérivées croisées de Schwarz, on trouve donc

$$\frac{d}{dt} \nabla \varphi_t = \nabla \frac{d\varphi_t}{dt}$$

soit

$$\frac{d}{dt} \Psi_t = \nabla (J(\nabla \mathcal{H}) \circ \varphi_t).$$

L'opérateur différentiel  $\nabla$  commute avec l'opérateur linéaire  $J$ , donc

$$\nabla (J \nabla \mathcal{H}(\varphi_t)) = J \nabla ((\nabla \mathcal{H}) \circ \varphi_t).$$

Enfin, pour toutes fonctions  $M : \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}^{2d}$  et  $y : \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}^{2d}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , les formules de dérivation d'une fonction composée se réécrivent :

$$\nabla (M \circ y) = (\nabla (M) \circ y) \nabla y.$$

En particulier,

$$\nabla ((\nabla \mathcal{H}) \circ \varphi_t) = (\nabla (\nabla \mathcal{H})) \circ \varphi_t \nabla \varphi_t = \nabla (\nabla \mathcal{H}) \circ \varphi_t \Psi_t.$$

Il est essentiellement immédiat que  $\nabla (\nabla \mathcal{H}) = \nabla^2 \mathcal{H}$  au sens décrit dans l'énoncé. On en déduit la relation

$$\forall y \in \mathbf{R}^{2d}, \frac{d}{dt} \Psi_t(y) = J \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y)) \Psi_t(y).$$

Enfin, vu la définition de  $\varphi_t$ , on remarque que  $\varphi_0 = \text{id}_{\mathbf{R}^{2d}}$  (i.e. la valeur à l'instant 0 de la solution prenant la valeur  $y$  en 0 est  $\dots y$ !). C'est une fonction linéaire qui est donc sa propre différentielle en tout point. Il vient donc  $\Psi_0(y) = I_{2d}$  pour tout  $y \in \mathbf{R}^{2d}$ .

- (c) Soit  $y \in \mathbf{R}^{2d}$ . La fonction  $t \mapsto \Psi_t(y)$  est dérivable, donc c'est également le cas de  $t \mapsto \Psi_t(y)^T J \Psi_t(y)$  et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Psi_t(y)^T J \Psi_t(y)) &= \frac{d}{dt} (\Psi_t(y)^T) J \Psi_t(y) + \Psi_t(y)^T J \frac{d}{dt} (\Psi_t(y)) \\ &= \left( J \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y)) \Psi_t(y) \right)^T J \Psi_t(y) + \Psi_t(y)^T J^2 \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y)) \Psi_t(y) \\ &= \Psi_t(y)^T \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y))^T J^T J \Psi_t(y) + \Psi_t(y)^T J^2 \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y)) \Psi_t(y) \\ &= \Psi_t(y)^T \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y))^T \Psi_t(y) - \Psi_t(y)^T \nabla^2 \mathcal{H}(\varphi_t(y)) \Psi_t(y). \end{aligned}$$

Finalement, puisque  $\mathcal{H}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , le théorème des dérivées croisées de Schwarz assure que  $\nabla^2 \mathcal{H}(p, q)$  est symétrique pour tout  $(p, q) \in \mathbf{R}^{2d}$ . On en déduit que la dérivée de  $t \mapsto \Psi_t(y)^T J \Psi_t(y)$  est nulle.

Par suite,  $y \in \mathbf{R}^{2d}$  étant toujours fixé, on a pour tout réel  $t$ ,

$$\Psi_t(y)^T J \Psi_t(y) = \Psi_0(y)^T J \Psi_0(y) = I_{2d}^T J I_{2d} = J.$$

Puisque  $\Psi_t(y) = \nabla(\varphi_t)(y)$  pour tout  $y \in \mathbf{R}^{2d}$ , ceci montre que la fonction  $\varphi_t$  est symplectique pour tout  $t$  réel.

- (d) Soit  $(t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2d}$ . L'identité obtenue précédemment, donne, en passant au déterminant :

$$\det(\Psi_t(y))^2 \det J = \det J,$$

soit, puisque  $\det J \neq 0$ ,

$$\det \Psi_t(y) = \pm 1.$$

Gardons  $y$  fixé et remarquons que  $t \mapsto \det \Psi_t(y)$  est continue sur  $\mathbf{R}$  (composée de deux fonctions continues) et à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , donc le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle est constante. Or sa valeur en 0 est  $\det \Psi_0(y) = \det I_{2d} = 1$ . On en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \det \Psi_t(y) = 1.$$

(e) On peut utiliser le théorème d'inversion locale mais il est plus rapide de raisonner directement.

Soit  $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ . Montrons que  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ .

Soit en effet  $y_0 \in \mathbf{R}^{2d}$ , et  $y$  la solution de (4.8) associée à cette condition initiale. Il est alors clair que  $u \mapsto y(u+s)$  est une solution de (4.8) sur  $\mathbf{R}$  (le système considéré est autonome) pour la condition initiale « valeur en 0 égale à  $y(s) = \varphi_s(y_0)$  ». La valeur en  $t$  de cette fonction est donc  $\varphi_t(\varphi_s(y_0))$ , ce qui aboutit à  $\varphi_{t+s}(y_0) = \varphi_t(\varphi_s(y_0))$ . On a donc établi

$$\forall (s, t) \in \mathbf{R}^2, \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}.$$

En particulier, étant donné  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \text{id}_{\mathbf{R}^{2d}},$$

ce qui montre que  $\varphi_t$  est une bijection de réciproque  $\varphi_{-t}$ . Comme ces deux fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  d'après la question 6.(a), on en déduit que  $\varphi_t$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbf{R}^{2d}$  sur  $\mathbf{R}^{2d}$ .

(f) Soit  $t$  un réel. Puisque  $\varphi_t$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbf{R}^{2d}$  sur  $\mathbf{R}^{2d}$  et que  $f$  est intégrable, le théorème de changement de variable montre que  $f \circ \varphi_t$  est intégrable et que

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^{2d}} f(\varphi_t(x)) |\det \nabla \varphi_t(x)| dx = \int_{\mathbf{R}^{2d}} f(\varphi_t(x)) |\det \Psi_t(x)| dx.$$

Compte tenu du résultat de la question (e), on en déduit :

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^{2d}} f(\varphi_t(x)) dx.$$

## Chapitre 5

# Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique.

### 5.1 Organisation des épreuves 2010

*Les modalités, mises en place depuis le concours 2001, ont cette année encore donné entière satisfaction. Elles sont décrites ci-après de manière détaillée, prenant en compte l'expérience acquise.*

Pour les candidats de l'option D, des changements de modalités sur les leçons de mathématiques sont intervenus lors du concours 2009. Ces candidats tirent un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre, d'analyse et de probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours.

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plait.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures, durant laquelle le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres ouvrages (avec un numéro ISBN et non annotés) mais n'a pas accès à Internet (ni bien-sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique!), le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 **au maximum** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve.

### 5.1.1 Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **8 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. La formalisation mathématique doit être soignée et l'utilisation des symboles mathématiques correcte. Le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale. **Le plan doit être maîtrisé**, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes, les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois il peut être utile d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin !

Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos.

Le plan est malheureusement rarement commenté. Le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Parfois, le candidat se met à parler extrêmement rapidement ce qui rend incompréhensible les mathématiques présentées. Si le candidat énonce un théorème particulièrement difficile, il faut qu'il soit *contextualisé* en montrant comment il répond à des problématiques naturelles de la leçon ou en donnant des applications internes ou externes de la théorie dont il est issu.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés, ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. **Le hors sujet est lourdement sanctionné.**

À la fin de cette présentation, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

### 5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développe-

ments proposés. Un candidat ne sera pas avantagé, s'il présente un développement non maîtrisé ou mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Le candidat doit préciser ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre. Le candidat dispose de 15mn (maximum) pour mener à bien ce développement. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat demandera aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou étapes de ce dernier. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explications convaincantes. Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

### 5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement son niveau. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point. Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiate. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury*; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants.

### 5.1.4 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports de ces dernières années. Les commentaires sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques concernant certaines leçons de la session 2010, reprenant pour partie les commentaires des années précédentes. Les candidats sont invités à étendre ces commentaires aux leçons non commentées.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A,B, C, en algèbre et analyse.

#### Leçons d'Algèbre et Géométrie

Les leçons de géométrie sont souvent délaissées. C'est bien anormal pour de futurs professeurs qui auront à enseigner la géométrie qui fournit de nombreux exemples et applications des notions algébriques, par exemple en théorie des groupes. Les leçons d'exemples devraient être construites à partir des connaissances théoriques du candidat et ne pas contenir uniquement de la théorie. Le jury a noté que les notions de quotients ou de propriétés universelles échappent souvent aux candidats.

Les leçons **107** et **149**, bien que présentes sur la liste des *leçons d'algèbre et de géométrie*, ne figuraient pas dans les tirages de la session 2010, mais pourront figurer dans ceux de la session 2011. Ces leçons couvrent des éléments nouveaux du programme de la session 2011 (B.O. spécial du MEN numéro 7 du 8 juillet 2010). Le jury souhaite maintenir ces leçons à un niveau très raisonnable. Toute théorie globale est exclue et serait contre-productive au niveau de l'Agrégation (induction, produit tensoriel, etc.) et nous encourageons les candidats à traiter des exemples en petite dimension pour illustrer les aspects élémentaires de la théorie.

Voici quelques points plus spécifiques.

- 101 - Groupe opérant sur un ensemble.** Des exemples de nature différente doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel, sur un ensemble de matrices, sur des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas. Par ailleurs, il ne faut pas confondre exemples et remarques générales. Les actions naturelles de  $PGL(2, \mathbf{F}_q)$  sur les droites du plan donnent des injections intéressantes pour  $q = 2, 3$ .
- 103 - Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.** Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral  $D_n$  par exemple).
- 104 - Groupes finis. Exemples et applications.** Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries  $A_4, S_4, A_5$  et relier sur ces exemples géométrie et algèbre. La structure des groupes abéliens finis doit être connue.
- 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini.** Le groupe symétrique n'est pas spécialement plus facile à comprendre que les autres groupes. Il faut relier rigoureusement les notions d'orbites et d'action de groupe et savoir décomposer une permutation en cycles disjoints. Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations. Par ailleurs un candidat qui se propose de démontrer que *tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à  $A_5$*  devrait aussi montrer que  $A_5$  est simple.  
L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.  
Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Les applications du groupe symétrique ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers.
- 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ .** Il faut savoir réaliser  $S_n$  dans  $GL(n, \mathbf{R})$  et faire le lien entre signature et déterminant.  
Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur  $GL(E)$ . Il faudrait que les candidats sachent faire correspondre, sous-groupes et noyaux ou stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). A quoi peuvent servir des générateurs du groupe  $GL(E)$ ? Qu'apporte la topologie dans cette leçon? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral.
- 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe.** Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes.
- 109 - Anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .** Cette leçon classique demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord  $n$  n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et les morphismes de groupes de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ .  
Bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Distinguer clairement propriétés de groupes additifs et d'anneaux. Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents. Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , telles l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.
- 110 - Nombres premiers.** Il faut savoir si 113 est un nombre premier! Attention aux choix des développements, ils doivent être pertinents (l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant!). La réduction modulo  $p$  n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'Agrégation.



- 111 - Anneaux principaux. Applications.** On peut aussi donner des exemples d'anneaux non principaux. Les plans sont trop théoriques. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{K}[X]$ , accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent.
- 112 - Corps finis. Applications.** Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers  $\mathbf{F}_q$  doivent être connues. Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement de cette leçon. En revanche, les applications des corps finis ne doivent pas être négligées. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.
- 113 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.** Les propriétés des polynômes cyclotomiques doivent être énoncées. Leur irréductibilité sur  $\mathbf{Z}$  doit être maîtrisée. Il est tout à fait possible de parler d'exponentielle complexe, de théorème du relèvement ou de séries de Fourier tout en veillant à rester dans le contexte de la leçon.
- 114 - Anneau des séries formelles. Applications.** C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, *etc.*
- 116 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.** Les applications ne concernent pas que les corps finis. Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que  $\mathbf{C}$ . Un polynôme réductible n'admet pas forcément de racines. Il est instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur  $\mathbf{F}_2$ .
- 117 - Algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées. Polynômes symétriques.** La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ni sur les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur  $\mathbf{Z}$ . L'algorithme peut être présenté sur un exemple. Les applications aux quadriques, aux relations racines coefficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe  $GL(n, \mathbf{R})$  sur les polynômes de degré inférieur à 2.
- 119 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.** Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle demande un certain recul.
- 120 - Dimension d'un espace vectoriel, rang.** C'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats. Il faut absolument la préparer avec méthode. Nombre d'entre eux n'ont pas été capable de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ?
- 121 - Matrices équivalentes. Matrices semblables.** Les opérations sur les lignes et colonnes doivent figurer dans le plan. On pourra utilement dissocier les opérations sur les lignes de celles sur les colonnes. Rappelons que  $A = PB$  est équivalent au fait que  $A$  et  $B$  ont même noyau ; la notion de matrices échelonnées interviendra utilement dans cette leçon. L'extension des opérations au cas des anneaux principaux est délicate, alors que le cas des anneaux euclidiens suffit largement au niveau de l'Agrégation. Les candidats sont encouragés à présenter des applications de la réduction des matrices plutôt que la théorie elle-même ; ils peuvent par exemple étudier quelques équations portant sur une matrice. Il est également suggéré de regarder, sur le corps des réels ou des complexes, les propriétés topologiques d'une classe d'équivalence ou de similitude de matrices. Le jury aimerait avoir quelques applications de la classification des matrices semblables.
- 123 - Déterminant.** Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  il est délicat de définir  $\det(A - XI_n)$  avec  $A$  une matrice carrée. L'interprétation du déterminant en terme de volume est essentielle. Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver

leur place dans cette leçon. D'une manière générale on attend pendant le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux.

**124 - Polynômes d'endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme. Applications.** Le titre officiel précise que la dimension est finie. Les polynômes d'un endomorphisme ne sont pas tous nuls ! Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre  $\mathbf{K}[u]$ , connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction et structure de cette algèbre  $\mathbf{K}[u]$ . Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le jury ne souhaite pas avoir un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut bien préciser que dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé.

**125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.** Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études de cas détaillées sont les bienvenues.

**126 - Endomorphismes diagonalisables.** Il faut pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice.

**127 - Exponentielle de matrices.** C'est une leçon difficile et ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est-elle dans l'image

$\exp(\text{Mat}(2, \mathbf{R}))$ . Qu'en est-il de la matrice blocs  $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$  ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de  $\exp(A)$  doit être connue. Les groupes à un paramètre peuvent trouver leur place dans cette leçon. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de  $GL(n, \mathbf{R})$ . L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.

Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique.

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'Agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité.

**128 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.** Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan à l'aide des noyaux itérés.

**130 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.** C'est une leçon transversale. La notion de signature doit figurer dans la leçon. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

**131 - Formes quadratiques. Orthogonalité, isotropie.** Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur  $\mathbf{R}$  et ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  et la signature de la forme quadratique  $ax^2 + bxy + cy^2$ ). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).

L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de  $\mathbf{R}^3$ . Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

- 132 - Formes linéaires et hyperplans.** Il est important de replacer la thématique de la dualité dans cette leçon. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au cœur de la leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse *etc.* Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.
- 135 - Isométries. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.** La classification des isométries en dimension 2 ou 3 est exigible ainsi que le théorème de décomposition commutative. En dimension 3 : déplacements (translation, rotations, vissage) ; antidéplacements (symétries planes, symétries glissées, et isométrie négative à point fixe unique).
- 136 - Coniques. Applications.** La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives.
- 137 - Barycentres ; convexité.** On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables).
- 139 - Applications des nombres complexes à la géométrie.** Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale. Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée.
- 140 - Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution.** Le jury n'attend pas *une version à l'ancienne* articulée autour du théorème de Rouché-Fontené qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée.  
La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Par exemple les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de  $GL(n, \mathbf{K})$  sur  $M_n(\mathbf{K})$  donnée par  $(P, A) \mapsto PA$ . Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes.  
Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué.
- 141 - Utilisation des groupes en géométrie.** C'est une leçon transversale et difficile qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. On ne peut prétendre avoir une bonne note si elle n'est pas préparée.
- 145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.** Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités !
- 146 - Résultants. Applications** Il faut soigner la présentation et ne pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente  $(U, V) \mapsto AU + BV$  qui lie le résultant et le PGCD de  $A$  et  $B$ .
- 148 - Formes quadratiques réelles.** La preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

## Leçons d'Analyse et Probabilités

Le jury rappelle que le chapitre des probabilités à vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant en mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques. Il y a cinq leçons de probabilités qui peuvent toutes se traiter à un niveau raisonnable. Le jury encourage les candidats à choisir ces leçons.

Généralement, le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon. Par exemple justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

Les leçons **254**, **255** et **256**, bien que présentes sur la liste des *leçons d'analyse et probabilités*, ne figuraient pas dans les tirages de la session 2010, mais pourront figurer dans ceux de la session 2011. Ces leçons couvrent des éléments nouveaux du programme de la session 2011 (B.O. spécial du MEN numéro 7 du 8 juillet 2010). **Le jury souhaite maintenir ces leçons à un niveau modeste.** La théorie des distributions fournit un cadre mathématique rigoureux. Cependant aucune virtuosité technique n'est attendue sur les espaces fonctionnels non normables et sur les subtilités topologiques qu'ils suscitent. Le cadre fonctionnel élargi aux distributions permet d'exprimer et de justifier certains calculs formels très utiles en analyse, en probabilités et en physique. Le jury souhaite que les candidats soient capables de pratiquer ces calculs et de montrer, sur des exemples simples et des applications, leur pertinence et leur utilité.

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons.

**203 - Utilisation de la notion de compacité.** Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*), sans proposer des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, *etc.*).

**204 - Connexité. Exemples et applications.** Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. Bien distinguer connexité et connexité par arcs.

**205 - Espaces complets. Exemples et applications.** Le théorème de Baire trouvera évidemment sa place, mais il faut l'illustrer par des applications.

**206 - Théorèmes de points fixes.** Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses.

**207 - Prolongement de fonctions.** Les questions liées au prolongement analytique font partie de la leçon.

**208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples** La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée.

**213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes.** Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert  $H$  est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules  $x = \sum_{n \geq 0} (x|e_n)e_n$  et  $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} (x|e_n)^2$  en précisant les hypothèses sur la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en justifiant la convergence.

**214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.** On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

**215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.** Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur  $d^k f(a)$  définissent des

applications  $k$ -linéaires (sur quel espace?). Il faut savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.

- 217 - Sous-variétés de  $\mathbf{R}^n$ . Exemples.** Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, *etc.*) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de  $\mathbf{R}^3$ , les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques. Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.
- 218 - Applications des formules de Taylor.** Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités  $\|f^{(k)}\| \leq 2^{k(n-k)/2} \|f\|^{1-k/n} \|f^{(n)}\|^{k/n}$  (lorsque  $f$  et sa dérivée  $n$ -ème sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.
- 219 - Problèmes d'extremums.** Bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence).
- 220 - Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'études qualitatives des solutions.** Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.
- 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires.** Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général on peut évoquer les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.
- 226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération  $u_{n+1} = f(u_n)$ .** Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ . L'étude des suites homographiques pose des problèmes si on se restreint à  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Il ne faut pas négliger la recherche préalable de sous-ensembles (intervalles) stables par  $f$ .
- 228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle.** Un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Enfin les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu), le théorème de Peano, *etc.* sont les bienvenues.
- 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes.** Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Le jury souhaiterait que les candidats illustrent leurs propos et raisonnements sur les fonctions convexes par des dessins clairs. Il n'est pas déraisonnable de parler de fonctions à variation bornée.
- 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles.** L'étude de la convergence d'une série élémentaire par une hiérarchisation des méthodes et par la vérification des hypothèses correspondantes est appréciée du jury. Il faut soigner la présentation du plan et ne pas oublier les valeurs absolues lorsqu'on veut énoncer un théorème de convergence absolue (même remarque pour l'intégration). Le jury demande que les candidats ne confondent pas équivalents et développements asymptotiques. Les meilleurs pourront invoquer les méthodes classiques de renormalisation des séries divergentes.
- 232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation  $F(X) = 0$ . Exemples.** Le jury attire l'attention sur le fait que  $X$  peut désigner un vecteur.

- 234 - Espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .** Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie  $L^2 \subset L^1$  (ou même  $L^p \subset L^q$  si  $p \geq q$ ). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple  $L^1 \star L^1$ ).
- 240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.** Cette leçon ne peut se résumer à une collection de relations algébriques (analyse algébrique de la transformée de Fourier). Elle nécessite, pour s'inscrire dans le contexte de l'analyse, une étude minutieuse et une réflexion sur les hypothèses et les définitions des objets manipulés.  
L'extension de la transformée de Fourier aux distributions tempérées trouvera sa place ici.
- 243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme.** Il est dommage de ne parler que de dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce (ou utilise) ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes.
- 245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ .** Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation  $\int_{\gamma} f(z) dz$  a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !
- 246 - Série de Fourier. Exemples et applications** Les différents modes de convergence ( $L^2$ , Fejer, Dirichlet *etc...*) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier.

## 5.2 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse!** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le nouveau programme précise en effet :

*Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette nouvelle organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

## 5.3 Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique - Option D

Cette épreuve a évolué cette année : la liste des leçons a été refondue. Essentiellement, les leçons de *programmation* (langages typés, sémantique, typage, compilation) ont été retirées de la liste ainsi que certaines leçons élémentaires d'*algorithmique*. Par contre, la liste de leçons a été raffinée en ce qui concerne la *logique*, en particulier son application aux preuves de programme. Nous espérons que ces modifications

contribueront à faciliter la tâche des préparateurs en recentrant les sujets sur 4 domaines bien identifiés : algorithmique, calculabilité et complexité, langages et automates, logique et preuves.

De manière générale, le jury a plutôt été heureusement surpris par la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans la bonne focalisation des présentations. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants mais le niveau est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes.

**Organisation de la leçon-** Une tentation bien compréhensible pour les candidats est de *mathématiser* les sujets de leçons en oubliant l'aspect informatique. Ainsi, sur le sujet *Langages algébriques*, il était tentant de faire une leçon contrée sur un aspect théorique unique comme le Lemme d'itération d'Ogden, en oubliant complètement les aspects plus concrets de ce domaine et ses multiples applications, par exemple à l'analyse syntaxique et aux compilateurs.

Les candidats de niveau moyen ont en effet souvent montré des connaissances assez solides pour les résultats théoriques, mais par contre un manque de réflexion manifeste en ce qui concerne leurs applications et exemples concrets de mise en oeuvre.

Le jury tient donc à rappeler qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes.

- À quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
- La complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

**Interaction avec le jury-** Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, cette interaction ne prend habituellement pas la forme d'un exercice d'application. Il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances ! À lui de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

## Chapitre 6

# Épreuve orale de modélisation

### 6.1 Organisation de l'épreuve de modélisation

Depuis la session 2006 incluse, deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

*Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Le jury apprécie en effet que le candidat reste honnête quant à sa compréhension du texte, plutôt que de se lancer dans une présentation des parties du texte qu'il ne comprend absolument pas. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Le jury aura le texte sous les yeux, mais vous devez considérer qu'il ne l'a pas lu.*

Plus précisément, le jury s'attend à ce que le candidat dégage une problématique, en s'inspirant du texte, pour mettre en valeur sa maturité mathématique et ses connaissances. L'interrogation dure une heure, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter (le jury dispose d'écrans de contrôle reproduisant celui du candidat). Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Il appartient au candidat de discuter la mathématisation du problème, en particulier d'expliquer les hypothèses faites lors de la modélisation ou du traitement du modèle, de critiquer ou d'améliorer le modèle, du point de vue de l'adéquation à la réalité, de la généralité, de la rigueur, de la simplicité du traitement mathématique subséquent...

Le jury n'ayant *a priori* pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le



modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse <http://www.agreg.org>.

Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants. . .) soient présentées, mais *il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation*. Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire et le jury appréciera un regard critique du candidat sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut en revanche devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve.

Les suggestions sont facultatives et ne sont là que pour guider la réflexion du candidat sur des points significatifs du texte, ou des exemples utilisables. Certaines d'entre elles sont conçues pour permettre au candidat de comprendre le problème, de « rentrer » dans le modèle.

S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du texte sont très appréciées. Lorsqu'une démonstration est ébauchée dans le texte, le candidat peut choisir de la compléter. Il est alors particulièrement apprécié que le candidat précise les points mathématiques nécessaires pour une démonstration rigoureuse. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels. Cependant le candidat ne doit pas oublier qu'il s'agit d'une épreuve de l'agrégation externe de mathématiques, et qu'un exposé ne comportant aucun argument mathématique précis est vivement déconseillé.

Un travers à éviter à tout prix : la paraphrase linéaire du texte sans aucun apport personnel du candidat, ni mise en perspective, agrémentée de la recopie de toutes les formules rencontrées.

## Recommandations du jury

Le jury attache un intérêt particulier à l'effort de modélisation (qu'on peut définir comme le passage du « concret » aux mathématiques), à la mise en perspective des applications présentées, ainsi qu'aux illustrations permises par les moyens informatiques mis à disposition des candidats.

Le principal travers observé chez les candidats est la répétition linéaire du texte, y compris des passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, dans cette épreuve comme dans les autres, est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'*aucun développement n'est attendu*. Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés, mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner seulement les grandes lignes.

Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle.

### Sur le plan

Il est conseillé aux candidats de présenter un plan *succinct* de leur exposé, précisant les moments où ils comptent présenter leurs simulations informatiques. Ceci permet au jury de guider les candidats dans leur gestion du temps.

### Sur la présentation

Nous rappelons ici que l'agrégation est un concours visant à recruter des *enseignants*. Ainsi seront appréciés une bonne gestion du tableau, un exposé clair et pédagogique, et une bonne capacité à effectuer des calculs analytiques clairs, corrects et lisibles.

## 6.2 Utilisation de l'outil informatique

Le jury observe avec plaisir une utilisation plus pertinente de l'outil informatique, due certainement à une meilleure préparation des candidats.

Il est attendu du candidat un commentaire sur les résultats de sa simulation (résultats numériques ou graphiques), mais aussi du code mis en œuvre. Le jury regrette toutefois l'utilisation parfois abusive de « boîtes noires » de simulation au sein de leur programme, qui peuvent être source d'incompréhension sur les sorties.

Rappelons que le candidat ne doit pas avoir peur de présenter un programme non abouti. Le jury est sensible à la démarche employée.

D'un point de vue purement pratique, il est dommage de voir des candidats gênés durant l'épreuve de modélisation tout simplement parce qu'ils ne savent pas sauvegarder leur travail sur fichier, certains -rares heureusement- fermant directement l'application en ignorant les messages d'avertissement du logiciel utilisé et perdant ainsi tout ce qu'ils ont fait. Rappelons à ce sujet que le site du jury de l'agrégation décrit dans ses pages les logiciels utilisés et propose des outils pour qu'un candidat puisse se familiariser avec l'environnement proposé (voir <http://agreg.org/Agreg/installation.html>).

## 6.3 Option A : probabilités et statistiques

L'exposé doit être un dosage dynamique entre preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponse aux questions et mise en lumière de connaissances.

### Connaissance du programme

Lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur *la totalité du programme*. En particulier, il est possible que le jury pose des questions de nature statistique pour des textes à coloration probabiliste et inversement. Un nombre croissant de textes mêlent d'ailleurs les deux aspects. Le jury encourage donc les candidats et les préparateurs à tenir compte de l'ensemble du programme. Encore trop de candidats ont du mal à formaliser précisément des notions qui font partie du programme de l'option.

### Probabilités

- La loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale sont des points fondamentaux en probabilités comme en statistiques. Il convient d'en connaître les hypothèses précises, et de ne pas confondre les différents types de convergence.
- Les propriétés fondamentales des chaînes de Markov sont souvent mal connues : classification des états, conditions de convergence vers la loi stationnaire (apériodicité), etc. Les candidats gagneraient à utiliser plus souvent une représentation graphique des chaînes de Markov manipulées.
- Il est souvent très utile d'interpréter la notion d'espérance conditionnelle en termes de projecteur orthogonal.
- Les théorèmes du programme sur la convergence des surmartingales positives ne sont pratiquement jamais employés, alors qu'ils permettent des démonstrations convaincantes et simples dans de nombreux modèles.

### Statistiques.

- Les notions élémentaires de statistique paramétrique ne sont pas toujours clairement définies. Les candidats doivent connaître les problématiques d'estimation (notion de biais et de consistance) et de test d'hypothèses.

- Le jury a observé ces dernières années une amélioration sur la connaissance des principes de construction d'un intervalle de confiance.
- Les candidats sont souvent rebutés par le modèle linéaire gaussien. Celui-ci est pourtant couramment utilisé dans différents modèles.
- Dans le cadre des tests d'adéquation, les candidats ont du mal à motiver le choix du test qu'ils proposent (chi-2, Kolmogorov-Smirnoff, ...).

### Illustrations informatiques

- Le jury attend des candidats qu'ils accompagnent leurs illustrations informatiques d'explications d'au moins deux ordres : d'une part sur la nature de ce qui est montré (que sont ces nombres? Qu'y a-t-il en abscisse et en ordonnée dans ce graphique? Quelles données ont permis de réaliser cet histogramme?) et d'autre part sur les aspects mathématiques qu'elles illustrent (par exemple une convergence presque sûre, une convergence en loi, l'adéquation d'une loi empirique à un résultat théorique).
- Les illustrations informatiques sont souvent une occasion propice à l'utilisation de tests ou d'intervalles de confiance, pour vérifier que les résultats expérimentaux sont conformes aux résultats théoriques. Sans attendre un développement systématique à ce sujet, le jury apprécie que le candidat mette en valeur sa connaissance de ces outils et précise par exemple si l'écart entre des valeurs empiriques et des valeurs théoriques lui paraît acceptable ou non.
- Les candidats dont les programmes informatiques ne sont pas aboutis ou ne produisent pas les résultats escomptés sont néanmoins invités à expliquer leur démarche et ce qu'ils envisageaient de mettre en oeuvre pour illustrer le texte. Le jury signale que Matlab, Scilab ou Octave sont particulièrement adaptés à cette épreuve.

### Modélisation

Il est rappelé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Soulignons enfin que le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte.

## 6.4 Option B : Calcul scientifique

L'épreuve de modélisation est relativement peu formatée. Les candidats sont donc invités à faire preuve d'initiative pour organiser leur discussion, mener la présentation et choisir les thèmes du texte qu'ils souhaitent mettre en valeur. Bien sûr la pertinence de ces choix et la bonne exploitation de cette liberté sont des éléments discriminants. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. Le texte est une base qui va guider toute l'épreuve. Le candidat doit être à même d'expliquer et éventuellement critiquer les étapes principales de la mise en équations du problème proposé par le texte, sans toutefois recopier ou paraphraser le document. C'est aussi l'occasion pour les candidats de mettre en valeur leurs connaissances en illustrant la façon dont certains énoncés du programme permettent d'exhiber des propriétés du modèle proposé. Il faut cependant rappeler qu'utiliser le texte pour présenter une simple leçon est considéré comme hors sujet et constitue une stratégie fortement pénalisée.

Une difficulté de l'épreuve de modélisation consiste justement à savoir mobiliser ses connaissances et les exploiter "en situation", dans un contexte applicatif concret. Le jury s'étonne que, même pour des can-

didats connaissant des énoncés sophistiqués, cette difficulté constitue aussi souvent un obstacle infranchissable. Par exemple, sur les équations différentielles ordinaires des candidats évoquent le théorème de Peano, mais s'avèrent incapables d'étudier des équations  $y'(t) = f(t, y(t))$  sur des cas parmi les plus simples issus de la mécanique, et se retrouvent parfois bloqués dès l'analyse de la régularité de la fonction  $f$ . Certains candidats s'aventurent sur le territoire de la théorie des distributions et des espaces de Sobolev sans être capables d'intégrer "à la main" des équations aussi simples que  $-u'' = f$  avec conditions de Dirichlet ou  $(\partial_t + c\partial_x)u = 0$ , avec  $c$  constant. Un autre exemple frappant, souvent rencontré lors de cette édition du concours, est donné par les problèmes d'optimisation : des candidats citant le théorème des extrema liés n'ont pas été en mesure d'expliquer comment appliquer cet énoncé pour minimiser une fonctionnelle quadratique sous contrainte linéaire. Ces remarques s'étendent aussi aux schémas numériques : des candidats exposent les formules des schémas de Runge-Kutta sans être à même d'expliquer les principes et limites du schéma d'Euler explicite. Le jury recommande donc fermement de considérer comme prioritaire dans la préparation au concours la maîtrise d'outils de base et d'exemples pratiques, relativement simples, avant d'envisager d'accumuler des énoncés certes optimaux mais manifestement mal compris et mal dominés.

Confirmant une tendance déjà relevée lors des derniers concours, la grande majorité des candidats intègrent l'exploitation de l'outil informatique pour illustrer leur propos et proposent des simulations pertinentes et convaincantes. Si l'absence de tout effort en la matière est lourdement sanctionnée, il convient de souligner qu'une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis, Matlab, Scilab ou Octave étant tout particulièrement adaptés à cette épreuve. La présentation des illustrations informatiques ouvre fréquemment la discussion soit sur des commentaires critiques des résultats obtenus et du modèle, soit sur les principes et les propriétés des méthodes numériques du programme (résolution de systèmes linéaires ou non, recherche de valeurs propres, résolution d'EDO, intégration numérique,...).

De manière plus précise le jury souhaite pointer des éléments du programme qu'il serait heureux de voir mieux maîtrisés :

### **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel :**

Le tryptique "discussion du caractère bien posé, au moins localement en temps/ passage du local au global grâce à des estimations sur la solution (conservation, dissipation)/propriétés qualitatives (par exemple analyse de stabilité linéaire)" devrait être un réflexe à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Beaucoup trop de candidats ne maîtrisent pas les bases du programme sur ce point. La dérivation de fonctions de  $\mathbf{R}^m$  dans  $\mathbf{R}^p$  manque trop souvent de dextérité.

### **Schémas numériques pour les équations différentielles :**

Le jury considère la description du schéma d'Euler comme un élément central du programme. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ce schéma, ses propriétés de stabilité, consistance et convergence, les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Beaucoup trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique. La confusion récurrente entre l'approximation  $X_n$  et l'évaluation  $X(t_n)$  de la solution au temps  $t_n$ , l'incapacité à relier le paramètre  $n$  et le pas  $\Delta t$  témoignent souvent d'une compréhension déficiente du sujet. Afin de limiter des confusions coupables, le jury recommande de prohiber toute utilisation de symboles comme  $\simeq$ , ou bien pire  $\sim$ , pour relier l'évaluation de la solution aux points de discrétisation et les éléments de la suite numérique définie par le schéma.

**Intégration numérique :**

Le jury s'étonne que nombre de candidats définissent l'ordre d'une méthode d'intégration numérique comme étant le degré des polynômes pour lesquels la formule d'approximation est exacte mais se révèlent totalement incapables de relier cette information à la qualité de l'approximation de la méthode correspondante.

**Algèbre linéaire :**

Le jury déplore un manque d'aisance généralisé concernant le calcul matriciel et trop de développements reposant sur des arguments élémentaires d'algèbre linéaire sont excessivement laborieux.

**Optimisation :**

Beaucoup de candidats ont les plus grandes difficultés à reconnaître au détour de certains textes l'application de résultats de base sur la minimisation de fonctionnelles convexes. L'optimisation sous contrainte semble faire l'objet d'une impasse à peu près totale et le théorème des extrema liés, partie intégrante du programme général du concours, est méconnu.

**6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel****Remarques générales.**

**Exposé.** Rappelons ce qui est attendu : le candidat doit utiliser le texte comme point de départ pour construire son propre discours sur un problème qui lui est soumis, et développer un traitement mathématique dudit problème en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, fournis par le texte. Savoir aller plus loin que le texte (en particulier en saisissant les perches fournies dans la rubrique Suggestions pour le développement) est un plus très net. Savoir, à l'issue du traitement mathématique, revenir sur le problème de départ et indiquer dans quel mesure (totale ou partielle, satisfaisante ou pas) il est résolu devrait être un réflexe pour les candidats, dans la mesure où il s'agit de la conclusion naturelle d'un tel exposé.

En matière d'exposition, il est utile de rappeler que le fait que l'épreuve ne porte pas le nom de leçon n'est pas une invitation à oublier les règles élémentaires d'exposition. Tout d'abord, le contexte du concours implique qu'il s'agit de se placer dans une situation pédagogique. Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. L'exposé doit donc être soigneusement préparé, à la manière d'un cours sur le sujet du texte.

Quelques travers à proscrire (liste non limitative) :

- les formulations du genre "l'auteur dit que", "le texte dit que", sauf de façon très exceptionnelle pour pointer une affirmation que l'on souhaite discuter ;
- la lecture du texte sans rien écrire au tableau, ou en n'écrivant que les formules ; comme un discours, un tableau se construit et bien des candidats devraient, dans leur préparation, se confronter en fin d'oral à leur propre tableau ;
- l'improvisation d'un plan à la demande du jury, qui en général se limite à suivre celui du texte et ne se retrouve pas dans la structure de l'exposé.
- faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration quand ce n'est pas le cas.
- le hors-sujet se rattachant à un ou deux mots-clés du texte, prétexte à présenter une partie de plan ou un développement préparé pour une leçon de mathématiques générales ou analyse-probabilités.

Enfin, rappelons encore une fois que la lecture (au sens premier du mot) du texte, ce dernier tenu en main, et en changeant un mot toutes les trois phrases, produit généralement les pires planches qui soient.

Les démonstrations fournies dans le texte sont souvent des esquisses qui doivent être développées. La présentation à l'identique de la démonstration du texte au jury va nécessairement révéler deux choses : d'une part, le fait que le candidat ne l'a probablement pas réellement comprise, d'autre part le fait qu'il n'est pas capable d'en repérer les manques. Un regard critique ("il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire") permet déjà d'éviter le second écueil, qui est presque le plus grave.

**Illustration informatique.** La maîtrise technique de l'exercice de l'illustration informatique est en progrès. En revanche, il semble que le nombre de candidats refusant de jouer le jeu et arrivant sans illustration est en légère recrudescence. Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, qui n'est pas un exercice de programmation, mais un exercice de réflexion sur comment utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Cela peut se faire de façon très variée.

Il appartient au candidat d'expliquer au jury en quoi ce qu'il présente illustre bien le contenu du texte, et est pertinent dans ce contexte. Un tel discours est rare, mais pourtant bien plus intéressant que le discours souvent entendu (commentaire linéaire du code façon 'ici j'ai fait une boucle for' ou équivalent).

Le jury ne saurait trop insister sur le fait qu'il n'est pas réaliste de découvrir le système de calcul de son choix le jour de l'épreuve. Même pour les candidats n'étant pas inscrits à une préparation, dans chacune des options, des logiciels gratuits sont proposés qui permettent de pratiquer pendant l'année, et de se poser, au minimum, la question de la manipulation des objets de base rencontrés dans l'option. Devoir le faire le jour de l'épreuve, en situation de stress, en temps limité avec un texte à découvrir en même temps est tout bonnement irréaliste, et l'argument "je n'ai jamais fait d'informatique" ne peut en aucun cas être considéré comme une excuse valable.

**Questions.** La séance de questions est l'occasion pour le jury d'affiner sa perception du candidat. Elle va lui permettre d'une part de vérifier si certaines erreurs commises en cours d'exposé sont de simples lapsus ou relèvent d'une compréhension erronée ; elle va aussi permettre de tester davantage le candidat sur les points sur lesquels le jury n'a pas pu se faire une opinion sur le seul fondement de l'exposé. Les questions ne contiennent pas de piège, ce qui ne veut pas dire qu'elles doivent être considérés comme faciles, vues les circonstances de l'épreuve (4h de préparation, 40 minutes d'exposé, plus le stress impliqué par les circonstances) : une question d'apparence élémentaire est, à de très rares exceptions près, élémentaire et il est inutile de chercher des choses fort compliquées en réponse.

Il y a peu de règles à rappeler sur ce point, hormis deux points de bon sens :

- réfléchir, là encore, à l'utilisation du tableau ; bien des candidats cherchent à répondre uniquement de tête, sans rien écrire au tableau, même quand un calcul est clairement requis ;
- ne pas chercher à répondre du tac au tac. Le jury ne l'attend pas particulièrement ; et observer, éventuellement, quelques secondes de réflexion et de prise de recul pour gérer fatigue et stress est un bien meilleur réflexe que de répondre la première chose qui passe par la tête.

### Remarques spécifiques sur l'option C.

**Contenu mathématique.** Le jury regrette que l'algèbre linéaire, qui constitue le coeur du programme de l'agrégation, ne soit pas davantage maîtrisée, à la fois dans ses aspects théoriques et dans ses aspects calculatoires. Peu de candidats savent que la méthode du pivot de Gauss permet de résoudre l'essentiel des problèmes calculatoires de l'algèbre linéaire (rang, résolution de systèmes linéaires, inversion, déterminant). A l'inverse, beaucoup pensent que réduire (diagonaliser ou trigonaliser une matrice) permet de calculer le déterminant ; d'un point de vue théorique, c'est le cas, mais d'un point de vue calculatoire c'est en général très maladroit. En outre, sur le plan conceptuel, il s'agit de deux problèmes de nature fondamentalement différente. Le jury a pu noter dans l'esprit de nombreux candidats une confusion entre trigonaliser une matrice (la réduire sous la forme  $P^{-1}TP$ ) et l'écrire sous forme d'un produit  $LU$  de matrices triangulaires. Là encore, la différence conceptuelle est nette, et cette confusion ne devrait pas être faite. Les suites récurrentes linéaires sont toujours aussi mal connues, et plusieurs fois confondues avec les équations différentielles linéaires, avec pour résultat que les candidats écrivent des formules dépourvues de sens.

Le résultant est le parent pauvre de l'option, et sa simple existence est parfois totalement ignorée, souvent méconnue, et le lien avec l'élimination apparaît bien limité dans l'esprit des candidats. La classique présentation univariée de l'objet résultant n'est sans doute pas totalement étrangère à cet état de fait. Idéalement, les candidats devraient connaître les deux difficultés classiques (points ou composantes "à l'infini", correspondant à l'annulation conjointe des termes de tête, et points ou composantes définies sur la clôture algébrique). L'interprétation géométrique du résultant dans un problème d'élimination comme permettant de calculer la projection d'une intersection est un support précieux à l'intuition, et permet d'illustrer les deux pathologies ci-dessus. Elle gagnerait à être mieux connue des candidats. Faute de mieux, le jury est déjà heureux de voir des candidats avoir une relative maîtrise opérationnelle du résultant comme outil permettant de calculer des (sur-ensembles d') intersections de courbes ou de surfaces, et de mener ce processus à bien. Les candidats montrant leur maîtrise du sujet ont pu obtenir de très bonnes notes.

Plus largement, les anneaux de polynômes en plusieurs variables et leurs propriétés arithmétiques posent de gros problèmes aux candidats, sur des questions élémentaires comme : peut-on factoriser un polynôme en  $n$  variables ? Le pgcd existe-t-il ? Peut-on faire une division euclidienne dans cet anneau ? Par ce polynôme, etc.

Les connaissances en arithmétique sont dans l'ensemble satisfaisantes, avec un point noir : la vision "naïve" de l'algorithme d'Euclide étendu comme "remonter les identités déduites de l'algorithme d'Euclide" trouve très vite ses limites. Comme écrit l'an passé, la vision matricielle consistant à écrire une étape de l'algorithme d'Euclide

$$\begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix}$$

fournit immédiatement, pour tout  $i$ ,  $r_i$  comme combinaison linéaire des entiers de départ. L'exponentiation rapide, longtemps bien maîtrisée, semble disparaître quelque peu de la culture des candidats, au grand regret du jury. Enfin, beaucoup de candidats ne sont pas à l'aise avec la manipulation des congruences, et se réfugient dans des égalités qui, fréquemment, alourdissent considérablement les calculs et les arguments.

La complexité des opérations élémentaires ne fait pas non plus partie du tout de la culture des candidats. Il s'agit pourtant d'un sujet où il est important d'avoir des repères pour comprendre la pertinence de certains choix faits dans les textes. Il devrait être à la portée des candidats de retenir que l'addition est linéaire en la taille de l'entrée, le reste de l'arithmétique (multiplication, division, pgcd, Euclide étendu) quadratique dans le cas des nombres et des polynômes, et que les algorithmes standard (multiplication, pivot de Gauss, inversion, résolution de système linéaire) sur les matrices ont un coût cubique (cette fois en la dimension de la matrice).

Informatique. Outre les remarques générales, le jury incite vivement les candidats à se poser, avant l'oral, la question spécifique de la représentation et de la manipulation, souvent un peu délicate, des éléments des corps finis non premiers dans le logiciel de leur choix. Sur ce point également, le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les logiciels orientés vers le calcul réel, en précision fixée, peuvent s'avérer peu adaptés pour la manipulation de grands entiers, d'entiers modulo  $n$ , ou de réels en grande précision, fréquente dans le cadre de l'option C.

## 6.6 Option D : modélisation et analyse de systèmes informatiques

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

**Exposé des motivations** Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

**Exercice de programmation informatique** Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

**Cette présentation au jury doit être faite que le programme *fonctionne* — ce que l'on espère! — ou pas.** C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

### 6.6.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

**Installation technique** Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury dispose d'écrans de contrôle pour suivre la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

**Présentation du programme** D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage utilisé et de l'environnement de programmation utilisé. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code, que le jury peut lire lui-même sur les écrans de contrôle. Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

**Choix des données d'exécution** Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.



Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

**Choix du langage** Le candidat choisit son langage. Cette année, nous n'avons pratiquement pas vu de programmes en Java. Les candidats se partagent équitablement entre Caml et C (en fait, ils utilisent dans le langage C les extensions C++ admises par le compilateur `gcc`). Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés (C, Caml ou Java) : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Matlab, etc.)

**Style de programmation** La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

**Entrées-sorties** Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *interactives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

**Assertions de correction** Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

**Cas de la programmation C** Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doit retourner la valeur `()` du type `unit`.

**Organisation de la préparation** Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'épreuve au sein des 4 heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

**Respect de la spécification** Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Matlab par exemple.

## **Chapitre 7**

### **Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2010**

## Leçons d'algèbre et géométrie



*Les leçons 107 et 149 n'ont pas été posées en 2010 mais pourront l'être en 2011.*

- 
- 101** Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 
- 103** Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
- 
- 104** Groupes finis. Exemples et applications.
- 
- 105** Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 
- 106** Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
- 
- 107** Représentations et caractères d'un groupe fini sur un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.
- 
- 108** Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 
- 109** Anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
- 
- 110** Nombres premiers. Applications.
- 
- 111** Anneaux principaux. Applications.
- 
- 112** Corps finis. Applications.
- 
- 113** Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 
- 114** Anneau des séries formelles. Applications.
- 
- 116** Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 
- 117** Algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées ( $n \geq 2$ ). Polynômes symétriques. Applications.
- 
- 118** Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.
- 
- 119** Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 
- 120** Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
-

---

**123** Déterminant. Exemples et applications.

---

**124** Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

**125** Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

---

**126** Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

---

**127** Exponentielle de matrices. Applications.

---

**128** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

**130** Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

**131** Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

**132** Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

**133** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

**135** Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

---

**136** Coniques. Applications.

---

**137** Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

---

**139** Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

**140** Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

---

**141** Utilisation des groupes en géométrie.

---

**144** Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

---

**145** Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

**146** Résultant. Applications.

---

**148** Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

---

**149** Représentations de groupes finis de petit cardinal.

---

## Leçons d'analyse et probabilités



*Les leçons 253, 254, 255, 256 n'ont pas été posées en 2010, mais pourront l'être en 2011.*

**201** Espaces de fonctions : exemples et applications.

---

**202** Exemples de parties denses et applications.

---

**203** Utilisation de la notion de compacité.

---

**204** Connexité. Exemples et applications.

---

**205** Espaces complets. Exemples et applications.

---

**206** Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

**207** Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

**208** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

**213** Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

**214** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

**215** Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Exemples et applications.

---

**216** Étude métrique des courbes. Exemples.

---

**217** Sous-variétés de  $\mathbf{R}^n$ . Exemples.

---

**218** Applications des formules de TAYLOR.

---

**219** Problèmes d'extremums.

---

**220** Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

**221** Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

- 
- 223** Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
- 
- 224** Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
- 
- 226** Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples.
- 
- 228** Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
- 
- 229** Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- 
- 230** Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
- 
- 232** Méthodes d'approximation des solutions d'une équation  $F(X) = 0$ . Exemples.
- 
- 234** Espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .
- 
- 235** Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
- 
- 236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.
- 
- 238** Méthodes de calcul approché d'intégrales et d'une solution d'une équation différentielle.
- 
- 239** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 
- 240** Transformation de FOURIER, produit de convolution. Applications.
- 
- 241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 
- 242** Utilisation en probabilités de la transformation de FOURIER ou de LAPLACE et du produit de convolution.
- 
- 243** Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 
- 245** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.
- 
- 246** Séries de FOURIER. Exemples et applications.
- 
- 247** Exemples de problèmes d'interversion de limites.
-



**249** Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

---

**250** Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.

---

**251** Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

**252** Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

---

**253** Utilisation de la notion de convexité en analyse.

---

**254** Espaces de Schwartz et distributions tempérées.

---

**255** Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications.

---

**256** Transformation de Fourier dans  $S(\mathbf{R}^d)$  et  $S'(\mathbf{R}^d)$ .

---

## Chapitre 8

# Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique

### Leçons de mathématiques pour l'informatique



*La leçon 119 n'a pas été posée en 2010 mais pourra l'être en 2011.*

**104** Groupes finis. Exemples et applications.

---

**105** Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

**106** Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.

---

**108** Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

**109** Anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.

---

**110** Nombres premiers. Applications.

---

**112** Corps finis. Applications.

---

**116** Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

**119** Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

**120** Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

**123** Déterminant. Exemples et applications.

---

---

**124** Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

**128** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

**131** Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

**132** Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

**133** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

**137** Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

---

**139** Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

**140** Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

---

**141** Utilisation des groupes en géométrie.

---

**145** Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

**203** Utilisation de la notion de compacité.

---

**206** Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

**208** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

**214** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

**215** Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Exemples et applications.

---

**218** Applications des formules de TAYLOR.

---

**219** Problèmes d'extremums.

---

**220** Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

**221** Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

---

**224** Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

**226** Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples.

---

**229** Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

**230** Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

**232** Méthodes d'approximation des solutions d'une équation  $F(X) = 0$ . Exemples.

---

**236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

**239** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

**240** Transformation de FOURIER, produit de convolution. Applications.

---

**243** Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

**246** Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

**252** Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

---

## Leçons d'informatique



- 
- 901** Structures de données : exemples et applications.
- 
- 902** Diviser pour régner : exemples et applications.
- 
- 903** Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.
- 
- 904** Problèmes NP-complets : exemples.
- 
- 906** Programmation dynamique : exemples et applications.
- 
- 907** Algorithmique du texte : exemples et applications.
- 
- 908** Automates finis. Exemples et applications.
- 
- 909** Langages rationnels. Exemples et applications.
- 
- 910** Langages algébriques. Exemples et applications.
- 
- 911** Automates à pile. Exemples et applications.
- 
- 912** Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.
- 
- 913** Machines de Turing. Applications.
- 
- 914** Décidabilité et indécidabilité. Exemples.
- 
- 915** Classes de complexité : exemples.
- 
- 916** Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.
- 
- 917** Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.
- 
- 918** Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.
- 
- 919** Unification : algorithmes et applications.
- 
- 920** Réécriture et formes normales. Exemples.
-

**921** Algorithmes de recherche et structures de données associées.

---

**922** Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

---

**923** Analyses lexicale et syntaxique : applications.

---

**924** Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

---

**925** Graphes : représentations et algorithmes.

---

**926** Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

---

**927** Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

---

## Chapitre 9

# Annexe 3 : Le programme 2011

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les paragraphes 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés  $\mathbf{K}$  en général) sont supposés commutatifs.

### 9.1 Algèbre linéaire

#### 9.1.1 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ , groupe linéaire  $GL(E)$ .

Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

#### 9.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec  $\mathbf{K}^n$ . Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire  $SL(E)$ . Orientation d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.  
Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de GAUSS. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.  
Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de DUNFORD. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

## 9.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes  $n$ -ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.  
Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.  
Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

## 9.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau  $\mathbf{Z}$  des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.  
Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels. Le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. Le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes. Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.
5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.



Factorialité de  $A[X]$  quand  $A$  est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de BÉZOUT. Anneaux euclidiens. Algorithme d'EUCLIDE. Cas de l'anneau  $\mathbf{Z}$  et de l'algèbre  $\mathbf{K}[X]$  des polynômes sur le corps  $\mathbf{K}$ . Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans  $\mathbf{Q}[X]$ , critère d'EISENSTEIN.

6. Congruences dans  $\mathbf{Z}$ . Nombres premiers. Étude de l'anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de GAUSS, systèmes linéaires. . .
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de NEWTON. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

## 9.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de SYLVESTER. Classification dans le cas de  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans  $GL(n, \mathbf{R})$ . Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans  $GL(n, \mathbf{C})$ .

## 9.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.  
Projection sur un convexe fermé.
2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.

3. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements et antidéplacements. Décomposition commutative en une translation et une isométrie à point fixe (forme dite réduite). Exemple de générateurs du groupe des isométries : décomposition en produit de réflexions.
4. Espace affine euclidien de dimension 2.  
Classification des isométries.  
Similitudes directes et indirectes.  
Groupe des isométries laissant stable une partie du plan. Polygones réguliers.  
Relations métriques dans le triangle.  
Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Espace affine euclidien de dimension 3.  
Rotations. Vissages. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.
6. Coniques et quadriques. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.  
Classification des coniques.  
Intersection de quadriques et résultant.  
Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

## 9.6 Analyse à une variable réelle

### 1. Nombres réels

Le corps  $\mathbf{R}$  des nombres réels. Topologie de  $\mathbf{R}$ . Sous-groupes additifs de  $\mathbf{R}$ . Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de  $\mathbf{R}$ . Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de  $\mathbf{R}$ . Parties connexes de  $\mathbf{R}$ .

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

### 2. Fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles

#### (a) Continuité

Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.

Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

#### (b) Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.

Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.

Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG.

Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives  
Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, positivité. Sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.
4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.
5. Suites et séries de fonctions  
Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.  
Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.
6. Fonctions usuelles  
Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.
7. Convexité  
Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.
8. Suites définies par une relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.
9. Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.
10. Méthodes d'approximation  
Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.
11. Méthodes de résolution approchée des équations  $f(x) = 0$  : dichotomie, méthode de PICARD, méthode de NEWTON. Estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.
12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

## 9.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières  
Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.  
Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.  
Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.  
Développement en série entière des fonctions usuelles.
2. Fonctions d'une variable complexe  
Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.  
Indice d'un chemin fermé  $\mathcal{C}^1$  par morceaux par rapport à un point.  
Formules de CAUCHY. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.  
Singularités isolées. Séries de LAURENT. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.  
Suites et séries de fonctions holomorphes.

## 9.8 Calcul différentiel

### 1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.  
Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de  $\mathbf{R}^n$ .

### 2. Fonctions différentiables

Applications différentiables sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Matrice jacobienne. Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Dérivées partielles d'ordre  $k$ . Interspersion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG.

Étude locale des applications à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Développements limités. Recherche des extremums locaux.

Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

### 3. Équations différentielles

Équations différentielles sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , de la forme  $X' = f(t, X)$ . Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

Portrait de phase, comportement qualitatif.

Systèmes différentiels linéaires.

Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

## 9.9 Calcul intégral et probabilités

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.

### 2. Intégration

Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces  $L^p$ , où  $1 \leq p \leq \infty$  : inégalités de MINKOWSKI, HÖLDER et JENSEN. Théorème de FUBINI.

Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

### 3. Analyse de FOURIER

Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de DIRICHLET et de FEJER. Théorie  $L^2$  : convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

### 4. Probabilités.

Définition d'un espace de probabilité. Variables aléatoires, lois de probabilité d'une variable aléatoire, fonction de répartition. Indépendance d'une famille d'événements, de tribus ou de variables aléatoires.

Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles.

Exemples de lois : loi de BERNOULLI, loi binomiale, loi de POISSON, loi uniforme, loi normale, loi exponentielle.

Fonction caractéristique et transformée de LAPLACE, applications à la somme de variables aléatoires indépendantes, lien avec la convolution.

Probabilités conditionnelles : définition, théorème de BAYES.

Convergence de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans  $L^p$ , presque partout, en loi.

Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAIMÉ-TCHEBYSCHEV. Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

## 9.10 Analyse fonctionnelle

### 1. Topologie et espaces métriques

Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

Produit fini d'espaces métriques.

Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

### 2. Espaces vectoriels normés sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ .

Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

Applications linéaires continues, norme.

Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace BANACH.

Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ ; théorème d'ASCOLI.

Complétude des espaces  $L^p$ , où  $1 \leq p \leq \infty$ .

### 3. Espaces de HILBERT

Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

Dual d'un espace de HILBERT.

Cas des espaces  $L^2$ .

Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de HILBERT.

### 4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$ .

Normes  $N_p(f)$  (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à  $p$  de  $f$  par les monômes de degré inférieur à  $p$ ).

Espace  $S'(\mathbf{R}^d)$  des distributions tempérées.

Dérivation des distributions tempérées ; formule des sauts en dimension 1 ; formule de Stokes pour un demi-espace en dimension  $d$ .

Cas particulier des distributions à support compact dans  $\mathbf{R}^d$ .

Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.

Transformation de Fourier dans  $S$  et dans  $S'$ .

Transformation de Fourier sur les espaces  $L^1(\mathbf{R}^d)$  et  $L^2(\mathbf{R}^d)$ .

## 9.11 Géométrie différentielle

Sous-variétés de  $\mathbf{R}^n$ . Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans  $\mathbf{R}^3$  : position par rapport au plan tangent.

Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multiplicateurs de Lagrange.

### ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

#### A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 11 ci-dessus.

#### B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 11 ci-dessus.

### ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :

**Option A : probabilité et statistiques**

**Option B : calcul scientifique**

**Option C : algèbre et calcul formel**

**Option D : informatique**

### Épreuves orales des options A, B, C

1<sup>re</sup> Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2<sup>e</sup> Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 11 ci-dessus.

3<sup>e</sup> Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

### Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

Le corpus des logiciels disponibles est constitué de Maple, Mathematica, MuPAD, Matlab, Scilab, Octave, R, Maxima, Axiome, Giac/Xcas, Pari/GP, Gap.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

- mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
- distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
- estimer le coût et les limitations d’algorithmes simples : complexité, précision
- analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique

Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d’intégrales, résolution d’équations algébriques et différentielles.

2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.

3. Validation et précision des résultats

Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.

Précision du schéma numérique d’EULER explicite à pas constant.

Moyenne et variance empiriques.

Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d’intégrales multiples (exemple : calculs de volumes).

4. Moindres carrés linéaires (sans contrainte).

## Programme spécifique de l’option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 9. 4 , loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d’attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages ...

2. Convergence presque sûre. Lemme de BOREL-CANTELLI. Loi forte des grands nombres.

3. Chaînes de MARKOV homogènes à espace d’états fini. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème de la limite centrale admis).

Chaînes de MARKOV homogènes à espace d’états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.

Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d’arrêt. Exemples d’utilisation, des théorèmes de convergence presque sûre et  $L^2$ , des martingales à temps discret.

4. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de COCHRAN. Théorème de la limite centrale dans  $\mathbf{R}^n$ , Utilisation du lemme de SLUTSKY. Définition et calcul d’intervalles de confiance.

Lois Gamma. Définition de l’estimation du maximum de vraisemblance.

5. Tests sur un paramètre. Tests du  $\chi^2$ . Fonction de répartition empirique et tests de KOLMOGOROV-SMIRNOV (population de taille finie et comportement asymptotique). Exemples d’utilisation.

Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression simple ou multiple, exemples d’utilisation.

Simulation de variables aléatoires.

Fonctions génératrices. Processus de vie et de mort.

## Programme spécifique de l’option B.

1. Résolution de systèmes d’équations linéaires ; définition du conditionnement. Factorisation LU.

Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.

- Recherche des valeurs propres : méthode de la puissance.  
Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de NEWTON : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
2. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.
  3. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de CAUCHY. Méthodes d'EULER explicite et implicite : consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de RUNGE-KUTTA 4.
  4. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.  
Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.  
Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.  
Équations elliptiques.  
Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.
  5. Optimisation et approximation  
Interpolation de LAGRANGE.  
Extremums des fonctions réelles de  $n$  variables réelles : multiplicateurs de LAGRANGE. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.  
Méthode des moindres carrés et applications.

### Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.  
Exponentiation ( $n \mapsto a^n$ , pour  $n \in \mathbf{N}$ ), algorithme d'EUCLIDE étendu.  
Test de primalité de FERMAT.
3. Matrices à coefficients dans un corps.  
Méthode du pivot de GAUSS, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.  
Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de HAMMING binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.  
Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur  $\mathbf{Z}$  et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.  
Évaluation (schéma de HORNER), interpolation (LAGRANGE, différences finies).  
Localisation des racines dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  : majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.  
Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.



## Épreuves de l'option D : informatique

### 1<sup>re</sup> Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 11 ci-dessus. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

### 2<sup>e</sup> Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 4 ci-après.

### 3<sup>e</sup> Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 4 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

## Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

## 9.12 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implémentation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de DIJKSTRA, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison  $O$ ,  $\Theta$  et  $\Omega$ . Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de HOARE, induction structurelle.

5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de DIJKSTRA. Arbres couvrants : algorithmes de PRIM et de KRUSKAL. Fermeture transitive.

### 9.13 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de KLEENE.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'OGDEN. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

### 9.14 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'ACKERMAN.
2. Définitions des machines de TURING. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de RICE. Réduction de TURING. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de TURING non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de COOK.

### 9.15 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de NEWMAN, algorithme de complétion de KNUTH-BENDIX.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

## Chapitre 10

# Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

**ABELSON H.** Structure and interpretation of computer programs MIT PRESS  
**SUSSMAN G. J.**  
**SUSSMAN J.**

---

**AHUÉS M.** Exercices de valeurs propres de matrices MASSON  
**CHATELIN F.**

---

**ALBERT L.** Cours et exercices d'informatique VUIBERT  
**Collectif**

---

**ALESSANDRI M.** Thèmes de géométrie DUNOD

---

**ALLOUCHE J. P.** Automatic sequences theory, applications, CAMBRIDGE  
**SHALLIT J.** generalizations

---

**AMAR E.** Analyse complexe CASSINI  
**MATHERON É.**

---

**ANDLER M.** Exercices corrigés de Mathématiques ELLIPSES  
**BLOCH J. D.**

- Tome 1A - Topologie
- Tome 1B - Fonctions numériques
- Tome 2 - Suites et séries numériques
- Tome 3 - Analyse fonctionnelle
- Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
- Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
- Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie

**MAILLARD B.**

---

**ANDREWS G.** Number Theory DOVER

---

**APPLE A.W.** Modern compiler implementation CAMBRIDGE  

- in C
- in Java
- in ML

---

<b>ARIBAUD F. VAUTHIER J.</b>	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
<b>ARNAUDIES J-M. BERTIN J.</b>	Groupes, Algèbres et Géométrie <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome I</li> <li>• Tome II</li> </ul>	ELLIPSES
<b>ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H.</b>	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
<b>ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H.</b>	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
<b>ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H.</b>	Cours de Mathématiques <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1. Algèbre</li> <li>• 2. Analyse</li> <li>• 3. Compléments d'analyse</li> <li>• 4. Algèbre bilinéaire et géométrie</li> </ul>	DUNOD
<b>ARNOLD V.</b>	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
<b>ARNOLD V.</b>	Équations différentielles ordinaires	MIR
<b>ARNOLD A. GUESSARIAN I.</b>	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCES
<b>ARTIN E.</b>	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
<b>ARTIN E.</b>	Algèbre géométrique	GABAY
<b>ARTIN M.</b>	Algebra	PRENTICE HALL
<b>AUBIN J.P.</b>	Analyse fonctionnelle appliquée <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1</li> <li>• Tome 2</li> </ul>	PUF
<b>AUTEBERT J. M.</b>	Calculabilité et décidabilité	MASSON
<b>AUTEBERT J. M.</b>	Théorie des langages et des automates	MASSON

<b>AUDIN M.</b>	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
<b>AVANISSIAN V.</b>	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
<b>AVEZ A.</b>	Calcul différentiel	MASSON
<b>BAASE S. VAN GELDER A.</b>	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
<b>BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A., PETIT A. SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.</b>	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
<b>BAJARD J.C.</b>	Exercices d'Algorithmique	ITP
<b>BAKHVALOV N.</b>	Méthodes numériques	MIR
<b>BARANGER J.</b>	Analyse numérique	HERMANN
<b>BARBE Ph. LEDOUX M.</b>	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
<b>BARRET M. BENIDIR M.</b>	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
<b>BASILI B. PESKINE C.</b>	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
<b>BASS J.</b>	Cours de Mathématiques • Tome 1 • Tome 2	MASSON
<b>BHATIA R.</b>	Matrix Analysis	SPRINGER
<b>BAUER F. L.</b>	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
<b>BENDER C. ORSZAG S.</b>	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL

<b>BERGER M. GOSTIAUX B.</b>	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
<b>BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X.</b>	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
<b>BERGER M.</b>	Géométrie <ul style="list-style-type: none"> <li>• Index</li> <li>• 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs</li> <li>• 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères</li> <li>• 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes</li> <li>• 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques</li> <li>• 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères</li> </ul>	CÉDIC/NATHAN
<b>BERGER M.</b>	Géométrie tome 2	NATHAN
<b>BICKEL P.J. DOKSUM K.A.</b>	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
<b>BIDEGARAY B. MOISAN L.</b>	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
<b>BIGGS NORMAN L.</b>	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
<b>BLANCHARD A.</b>	Les corps non commutatifs	PUF
<b>BOAS R.</b>	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
<b>BON J.L.</b>	Fiabilité des systèmes	MASSON
<b>BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C.</b>	Optimisation numérique	SPRINGER

<b>BOURBAKI N.</b>	Éléments de Mathématique <ul style="list-style-type: none"> <li>• Topologie générale, chapitres V à X</li> <li>• Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII</li> <li>• Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III</li> <li>• Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV</li> </ul>	HERMANN
<b>BOURGADE P.</b>	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
<b>BOUVIER A. RICHARD D.</b>	Groupes	HERMANN
<b>BREMAUD P.</b>	Introduction aux probabilités	SPRINGER
<b>BREZIS H.</b>	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
<b>BRIANE M. PAGES G.</b>	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
<b>BROUSSE P.</b>	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
<b>BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J.</b>	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
<b>CABANE R. LEBOEUF C.</b>	Algèbre linéaire <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1. Espaces vectoriels , Polynômes</li> <li>• 2. Matrices et réduction</li> </ul>	ELLIPSES
<b>CABANNES H.</b>	Cours de Mécanique générale	DUNOD
<b>CALAIS J.</b>	Éléments de théorie des anneaux	PUF
<b>CALAIS J.</b>	Éléments de théorie des groupes	PUF
<b>CARREGA J.C.</b>	Théorie des corps	HERMANN
<b>CARTAN H.</b>	Calcul différentiel (1971)	HERMANN

<b>CARTAN H.</b>	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
<b>CARTAN H.</b>	Formes différentielles	HERMANN
<b>CARTAN H.</b>	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
<b>CARTIER P. KAHANE J.P. ARNOLD V. et al.</b>	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI
<b>CASTLEMAN K.R.</b>	Digital image processing	PRENTICE HALL
<b>CASTI J.L.</b>	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	WILEY INTERSCIENCE
<b>CASTI J.L.</b>	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	WILEY INTERSCIENCE
<b>CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V.</b>	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
<b>CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S.</b>	Exercices de mathématiques pour l'agrégation <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse 2</li> <li>• Analyse 3</li> </ul>	MASSON
<b>CHATELIN E</b>	Valeurs propres de matrices	MASSON
<b>CHILDS L.</b>	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
<b>CHOQUET G.</b>	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
<b>CHOQUET G.</b>	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
<b>CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algèbre 1</li> <li>• Algèbre 2</li> </ul>	ELLIPSES
<b>CIARLET P.G.</b>	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON



<b>COGIS O. ROBERT C.</b>	Au-delà des ponts de Königsberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
<b>COHN P.M.</b>	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
<b>COLLET P.</b>	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
<b>COMBROUZE A.</b>	Probabilités et statistiques	PUF
<b>CORI R. LASCAR D.</b>	Logique mathématique <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats</li> <li>• 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles</li> </ul>	DUNOD
<b>CORMEN T. H. LEISERSON C. E. RIVEST R. L. STEIN C.</b>	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
<b>COTRELL M. GENON-CATALOT V. DUHAMEL C. MEYRE T.</b>	Exercices de probabilités	CASSINI
<b>COURANT R. HILBERT D.</b>	Methods of Mathematical Physics <ul style="list-style-type: none"> <li>• Volume 1</li> <li>• Volume 2</li> </ul>	JOHN WILEY
<b>COUSINEAU G. MAUNY M.</b>	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
<b>COXETER H.S.M.</b>	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
<b>COX D.A.</b>	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
<b>CVITANOVIC P.</b>	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
<b>DACUNHA-CASTELLE D. DUFLO M.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Probabilités et Statistiques <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Problèmes à temps fixe</li> </ul> </li> <li>• Exercices de Probabilités et Statistiques <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Problèmes à temps fixe</li> </ul> </li> </ul>	MASSON

<b>DACUNHA-CASTELLE D. REVUZ D. SCHREIBER M.</b>	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
<b>DAMPHOUSSE P.</b>	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
<b>DANTZER J.F.</b>	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
<b>DAVID R. NOUR K. RAFFALI C.</b>	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
<b>DEHEUVELS P.</b>	L'intégrale	PUF
<b>DEHEUVELS P.</b>	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
<b>DEHEUVELS R.</b>	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
<b>DEHORNOY P.</b>	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
<b>DEHORNOY P.</b>	Complexité et décidabilité	SPRINGER
<b>DELTHEIL R. CAIRE D.</b>	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
<b>DEMAILLY J.P.</b>	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
<b>DEMAZURE M.</b>	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
<b>DEMAZURE M.</b>	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
<b>DEMBO A. ZEITOUNI O.</b>	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
<b>DESCOMBES R.</b>	Éléments de théorie des nombres	PUF

<b>DESCHAMPS WARUSFEL MOULIN, RUAUD MIQUEL, SIFRE</b>	Mathématiques, cours et exercices corrigés <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1ère année MPSI, PCSI, PTSI</li> <li>• 2ème année MP, PC, PSI</li> </ul>	DUNOD
<b>DEVANZ C. ELHODAIBI M.</b>	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
<b>DIEUDONNÉ J.</b>	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
<b>DIEUDONNÉ J.</b>	Calcul infinitésimal	HERMANN
<b>DIEUDONNÉ J.</b>	Sur les groupes classiques	HERMANN
<b>DIEUDONNÉ J.</b>	Éléments d'Analyse. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Fondements de l'analyse moderne</li> <li>• Éléments d'Analyse Tome 2.</li> </ul>	GAUTHIER-VILLARS
<b>DIXMIER J.</b>	Cours de Mathématiques du premier cycle <ul style="list-style-type: none"> <li>• Première année</li> <li>• Deuxième année</li> </ul>	GAUTHIER-VILLARS
<b>DRAPPER N. SCHMITH H.</b>	Applied regression analysis	WILEY
<b>DUBUC S.</b>	Géométrie plane	PUF
<b>DUGAC P.</b>	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
<b>DYM H. Mac KEAN H.P.</b>	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
<b>EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE, MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT</b>	Les Nombres	VUIBERT
<b>EIDEN J.D.</b>	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET
<b>EL HAJ LAAMRI</b>	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD

<b>EL KACIMI ALAOUI A. QUEFFÉLEC H. SACRÉ C. VASSALLO V.</b>	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
<b>EPISTEMON L. (OVAERT J.L. VERLEY J.L.)</b>	Exercices et problèmes <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse. Volume 1</li> <li>• Algèbre.</li> </ul>	CÉDIC/NATHAN
<b>EXBRAYAT J.M. MAZET P.</b>	Notions modernes de mathématiques <ul style="list-style-type: none"> <li>• Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles</li> <li>• Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse</li> <li>• Analyse 2 : Éléments de topologie générale</li> </ul>	HATIER
<b>FADDEEV D. SOMINSKI I.</b>	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
<b>FAIRBANK X. BEEF C.</b>	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
<b>FARAUT J.</b>	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET
<b>FARAUT J. KHALILI E.</b>	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
<b>FELLER W.</b>	An introduction to probability theory and its applications <ul style="list-style-type: none"> <li>• Volume 1</li> <li>• Volume 2</li> </ul>	JOHN WILEY
<b>FERRIER J.P.</b>	Mathématiques pour la licence	MASSON
<b>FLORY G.</b>	Exercices de topologie et analyse avec solutions <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1 - Topologie</li> <li>• Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle</li> <li>• Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples</li> <li>• Tome 4 - Séries, équations différentielles</li> </ul>	VUIBERT
<b>FONTANEZ F. RANDÉ B.</b>	Les clefs pour les Mines	CALVAGE ET MOUNET

<b>FRANCHINI J. JACQUENS J-C.</b>	Mathématiques Spéciales <ul style="list-style-type: none"> <li>• Algèbre</li> <li>• Analyse 1</li> <li>• Analyse 2</li> </ul>	ELLIPSES
<b>FRANCINOUS. GIANELLA H. NICOLAS S.</b>	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
<b>FRANCINOUS. GIANELLA H.</b>	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
<b>FRENKEL J.</b>	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
<b>FRESNEL J.</b>	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
<b>FRESNEL J.</b>	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
<b>FRESNEL J.</b>	Groupes	HERMANN
<b>FRESNEL J.</b>	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
<b>FUHRMANN P.</b>	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
<b>FULTON W.</b>	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
<b>GABRIEL P.</b>	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
<b>GARLING D.J.H.</b>	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
<b>GATHEN (von zur) J. GERHARD J</b>	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
<b>GANTMACHER E.R.</b>	Théorie des matrices <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1</li> <li>• Tome 2</li> </ul>	DUNOD
<b>GAREY M. JOHNSON D.</b>	Computers and intractability	FREEMAN

<b>GENET J.</b>	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
<b>GHIDAGLIA J.M.</b>	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
<b>GRANGON Y.</b>	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	DUNOD
<b>GRENIER J.P.</b>	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
<b>GOBLOT R.</b>	Algèbre commutative	MASSON
<b>GOBLOT R.</b>	Thèmes de géométrie	MASSON
<b>GODEMENT R.</b>	Analyse <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1</li> <li>• Tome 2</li> <li>• Tome 3</li> </ul>	SPRINGER
<b>GODEMENT R.</b>	Cours d'Algèbre	HERMANN
<b>GOLUB G.H.</b> <b>VAN LOAN C.F.</b>	Matrix computations	WILEY
<b>GONNORD S.</b> <b>TOSEL N.</b>	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation <ul style="list-style-type: none"> <li>• Topologie et Analyse fonctionnelle</li> <li>• Calcul différentiel</li> </ul>	ELLIPSES
<b>GOSTIAUX B.</b>	Cours de mathématiques spéciales <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1 - Algèbre</li> <li>• Tome 2 - Topologie et analyse réelle</li> <li>• Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel</li> <li>• Tome 4 - Géométrie affine et métrique</li> <li>• Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes</li> </ul>	PUF
<b>GOURDON X.</b>	Les maths en tête, mathématiques pour M' <ul style="list-style-type: none"> <li>• Algèbre</li> <li>• Analyse</li> </ul>	ELLIPSES
<b>GRAHAM R.</b> <b>KNUTH D.</b> <b>PATASHNIK O.</b>	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY

<b>GRAMAIN A.</b>	Géométrie élémentaire	HERMANN
<b>GRAMAIN A.</b>	Intégration	HERMANN
<b>GRIMMET G. WELSH D.</b>	Probability (an introduction)	OXFORD
<b>GUJARATI D. N.</b>	Basic Econometrics	WILEY
<b>GUSFIELD D.</b>	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
<b>HABSIEGER L. MARTEL V.</b>	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
<b>HALMOS P.</b>	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
<b>HAMMAD P.</b>	Cours de probabilités	CUJAS
<b>HAMMAD P. TARANCO A.</b>	Exercices de probabilités	CUJAS
<b>HAMMER R. HOCKS M. KULISH U. RATZ D.</b>	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
<b>HARDY G.H. WRIGH E.M.</b>	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
<b>HAREL D.</b>	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
<b>HAREL D. FELDMAN Y.</b>	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
<b>HENNEQUIN P.L. TORTRAT A.</b>	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
<b>HENRICI P.</b>	Applied and Computational Complex Analysis • Volume 1 • Volume 2 • Volume 3	WILEY- INTERSCIENCE

<b>HERVE M.</b>	Les fonctions analytiques	PUF
<b>HIRSCH F. LACOMBE G.</b>	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
<b>HOCHART SCIUTO</b>	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
<b>HOPCROFT J.E. MOTWANI R. ULLMAN J. D.</b>	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY
<b>HOUZEL C.</b>	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
<b>IRELAND K. ROSEN M.</b>	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG
<b>ISAAC R.</b>	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT- SPRINGER
<b>ITARD J.</b>	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
<b>JACOBSON N.</b>	Basic Algebra • Tome I • Tome II	FREEMAN AND CO
<b>KAHANE J.P. GILLES P.</b>	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
<b>KERBRAT Y. BRAEMER J-M.</b>	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
<b>KERNIGHAN B. RITCHIE D.</b>	Le langage C	DUNOD
<b>KNUTH D.E.</b>	The art of computer programming • Volume 1 : Fundamental algorithms • Volume 2 : Seminumerical algorithms • Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON- WESLEY
<b>KOBLITZ N.</b>	A course in number theory and cryptography quantite1	
<b>KOLMOGOROV A. FOMINE S.</b>	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES



<b>de KONNINCK J.M. MERCIER A.</b>	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
<b>KÖRNER T.W.</b>	Fourier analysis	CAMBRIDGE
<b>KÖRNER T.W.</b>	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
<b>KUNG J.P.S. ROTA G-C. YAN C.H.</b>	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE
<b>KREE P.</b>	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
<b>KRIVINE H.</b>	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSINI
<b>KRIVINE J.L.</b>	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
<b>KRIVINE J.L.</b>	Théorie des ensembles	CASSINI
<b>LACOMME P. PRINS C. SEVAUX M.</b>	Algorithmes de graphes	EYROLLES
<b>LAFONTAINE J.</b>	Introduction aux variétés différentielles	PUF
<b>LALEMENT R.</b>	Logique, réduction, résolution	MASSON
<b>LANG S.</b>	Algèbre linéaire • Tome 1 • Tome 2	INTEREDITIONS
<b>LANG S.</b>	Algebra	ADDISON- WESLEY
<b>LANG S.</b>	Linear Algebra	ADDISON- WESLEY
<b>LAVILLE G.</b>	Courbes et surfaces	ELLIPSES

<b>LAVILLE G.</b>	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
<b>LAX P. D.</b>	Linear Algebra	WILEY
<b>LE BRIS G.</b>	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
<b>LEBOEUF C. GUEGAND J. ROQUE J.L. LANDRY P.</b>	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
<b>LEBORGNE D.</b>	Calcul différentiel et géométrie	PUF
<b>LEBOSSÉ C. HÉMERY C.</b>	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
<b>LEHMANN D. SACRÉ C.</b>	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
<b>LEHNING H. JAKUBOWICZ D.</b>	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
<b>LEHNING H.</b>	Mathématiques supérieures et spéciales <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1 : Topologie</li> <li>• Tome 3 : Intégration et sommation</li> <li>• Tome 4 : Analyse en dimension finie</li> <li>• Tome 5 : Analyse fonctionnelle</li> </ul>	MASSON
<b>LEICHTNAM E. SCHAUER X.</b>	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome I - Algèbre 1</li> <li>• Tome 2 - Algèbre et géométrie</li> <li>• Tome 3 - Analyse 1</li> <li>• Tome 4 - Analyse 2</li> </ul>	ELLIPSES
<b>LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.</b>	Cours de Mathématiques <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1 pour M-M' : Algèbre</li> <li>• Tome 1 pour A-A' : Algèbre</li> <li>• Tome 2 : Analyse</li> <li>• Tome 3 : Géométrie et cinématique</li> <li>• Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples</li> </ul>	DUNOD
<b>LELONG-FERRAND J.</b>	Géométrie différentielle	MASSON

<b>LELONG-FERRAND J.</b>	Les fondements de la géométrie	PUF
<b>LESIEUR L. MEYER Y. JOULAIN C. LEFEBVRE J.</b>	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
<b>LION G.</b>	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
<b>LION G.</b>	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
<b>LOTHAIRE M.</b>	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
<b>MAC LANE S. BIRKHOFF G.</b>	Algèbre • 1 : Structures fondamentales • 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER- VILLARS
<b>MACKI J. STRAUSS A.</b>	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
<b>MALLIAVIN M. P. WARUSFEL A.</b>	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
<b>MALLIAVIN M. P.</b>	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
<b>MALLIAVIN P.</b>	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
<b>Manuels Matlab</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Using Matlab version 5</li> <li>• Using Matlab version 6</li> <li>• Statistics Toolbox</li> <li>• Using Matlab Graphics</li> </ul>	
<b>MANSUY R. RANDÉ B.</b>	Les clefs pour l' X	CALVAGE ET MOUNET
<b>MARCE S. DEVAL-GUILLY E.</b>	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES

<b>MASCART H. STOKA M.</b>	Fonctions d'une variable réelle <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 2 : Exercices et corrigés</li> <li>• Tome 3 : Exercices et corrigés</li> <li>• Tome 4 : Exercices et corrigés</li> </ul>	PUF
<b>MAWHIN J.</b>	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ
<b>MAZET P.</b>	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
<b>MENEZES A.J. van OORSCHOT P.C. VANSTONA S.A.</b>	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS
<b>MERKIN D.</b>	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
<b>MÉTIVIER M.</b>	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD
<b>MÉTIVIER M.</b>	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES
<b>MEUNIER P.</b>	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 2</li> </ul>	PUF
<b>MEUNIER P.</b>	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES
<b>MIGNOTTE M.</b>	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
<b>MIGNOTTE M.</b>	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
<b>MITCHELL J. C.</b>	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
<b>MNEIMNÉ R.</b>	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
<b>MNEIMNÉ R.</b>	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET

<b>MNEIMNÉ R. TESTARD F.</b>	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
<b>MOISAN J. VERNOTTE A. TOSEL N.</b>	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
<b>MOISAN J. VERNOTTE A.</b>	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
<b>MONIER J.M.</b>	Cours de mathématiques <ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI</li> <li>• Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI</li> <li>• Analyse 3 MP, PSI, PC, PT</li> <li>• Analyse 4 MP, PSI, PC, PT</li> <li>• Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI</li> <li>• Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT</li> <li>• Exercices d'analyse MPSI</li> <li>• Exercices d'analyse MP</li> <li>• Exercice d'algèbre et géométrie MP</li> </ul>	DUNOD
<b>MUTAFIAN C.</b>	Le défi algébrique <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1</li> <li>• Tome 2</li> </ul>	VUIBERT
<b>NAGEL E. NEWMAN J. R. GÖDEL K. GIRARD J. Y.</b>	Le théorème de Gödel	SEUIL
<b>NAUDIN P. QUITTE C.</b>	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
<b>NEVEU J.</b>	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
<b>NIVEN I.</b>	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
<b>NORRIS J.R.</b>	Markov chains	CAMBRIDGE
<b>O'ROURKE J.</b>	Computational géométrie in C (second édition)	CAMBRIDGE
<b>OPREA J.</b>	Differential geometry	PRENTICE HALL

<b>OUVRARD J.Y.</b>	• Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
<b>PAPADIMITRIOU C.H.</b>	Computational complexity	PEARSON EDUCATION
<b>PAGES G. BOUZITAT C.</b>	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
<b>PAPINI O. WOLFMANN J.</b>	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
<b>PEDOE D.</b>	Geometry- A comprehensive course	DOVER
<b>PERKO L.</b>	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
<b>PERRIN D.</b>	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
<b>PERRIN D.</b>	Cours d'Algèbre	ENSJF
<b>PERRIN D.</b>	Mathématiques d'école	CASSINI
<b>PERRIN-RIOU B.</b>	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
<b>PETAZZONI B.</b>	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
<b>PETROVŠEK WILF ZEILBERGER</b>	A=B	A.K. PETERS
<b>PEVZNER P.</b>	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
<b>PÓLYA G. SZEGÖ G.</b>	Problems and Theorems in Analysis • Volume I • Volume II	SPRINGER VERLAG
<b>POMMELLET A.</b>	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES

<b>PRASOLOV V.</b>	Polynomials	SPRINGER
<b>PRASOLOV V.</b>	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
<b>PREPARATA F.P. SHAMOS M.I.</b>	Computational géométrie - an introduction	SPRINGER
<b>QUEFFELEC H. ZUILY C.</b>	Éléments d'analyse	DUNOD
<b>RALSTON A. RABINOWITCH P</b>	A first course in numerical analysis	INTERNATIONAL STUDENT EDITION
<b>RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.</b>	Cours de Mathématiques spéciales <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1- Algèbre</li> <li>• 2- Algèbre et applications à la géométrie</li> <li>• 3- Topologie et éléments d'analyse</li> <li>• 4- Séries et équations différentielles</li> <li>• 5- Applications de l'analyse à la géométrie</li> </ul>	MASSON
<b>RAMIS E. DESCHAMPS C. ODOUX J.</b>	Exercices avec solutions <ul style="list-style-type: none"> <li>• Algèbre</li> <li>• Analyse 1</li> <li>• Analyse 2</li> </ul>	MASSON
<b>RAMIS J.P. WARUSFEL A.</b>	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
<b>RAO C.R.</b>	Linear statistical inference and its application	WILEY
<b>RANDÉ B.</b>	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
<b>RANDÉ B. TAIEB F.</b>	Les clefs pour l'X	CALVAGE MOUNET
<b>RANDÉ B. MANSUY R.</b>	Les clefs pour l'X (2)	CALVAGE MOUNET
<b>REINHARDT F. SOEDER H.</b>	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
<b>REMMERT R.</b>	Classical topics in complex function theory	SPRINGER

<b>RIDEAU F.</b>	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
<b>RIESZ F. NAGY SZ. B.</b>	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER- VILLARS
<b>RIO E.</b>	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
<b>ROBERT C.</b>	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
<b>ROLLAND R.</b>	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
<b>ROMBALDI J.E.</b>	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
<b>ROMBALDI J.E.</b>	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
<b>ROMBALDI J.E.</b>	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
<b>ROUVIÈRE F.</b>	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
<b>ROUX C.</b>	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES
<b>RUAUD J.F. WARUSFEL A.</b>	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
<b>RUDIN W.</b>	Analyse réelle et complexe	MASSON
<b>RUDIN W.</b>	Functional analysis	MC GRAW HILL
<b>RUDIN W.</b>	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
<b>SAKAROVITCH J.</b>	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
<b>SAKS S. ZYGMUND A.</b>	Fonctions analytiques	MASSON



<b>SAMUEL P.</b>	Géométrie projective	PUF
<b>SAMUEL P.</b>	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
<b>SARMANT M.C. MERLIER T. PILIBOSSIAN Ph. YAMMINE S.</b>	Analyse 1	ELLIPSES
<b>SAUVAGEOT F.</b>	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
<b>SAUX PICARD P.</b>	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
<b>SAVIOZ J.C.</b>	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT
<b>SCHNEIER B.</b>	Applied cryptography	WILEY
<b>SCHWARTZ L.</b>	Analyse <ul style="list-style-type: none"> <li>• I Topologie générale et analyse fonctionnelle</li> <li>• II Calcul différentiel et équations différentielles</li> </ul>	HERMANN
<b>SCHWARTZ L.</b>	Cours d'Analyse <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tome 1</li> <li>• Tome 2</li> </ul>	HERMANN
<b>SCHWARTZ L.</b>	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
<b>SEDGEWICK R.</b>	Algorithms	ADDISON WESLEY
<b>SEDGEWICK R.</b>	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION
<b>SEDGEWICK R.</b>	Algorithmes en langage C	DUNOD
<b>SELBERHERR S. STIPPEL H. STRASSER E.</b>	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER

<b>SERRE J.P.</b>	Cours d'arithmétique	PUF
<b>SERVIEN Cl.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Analyse 3</li> <li>• Analyse 4</li> </ul>	ELLIPSES
<b>SHAPIRO H.N.</b>	Introduction to the theory of numbers	DOVER
<b>SIDLER J.C.</b>	Géométrie Projective	DUNOD
<b>SIPSER M.</b>	Introduction to the theory of computation	THOMSON C. T.
<b>SKANDALIS G.</b>	Topologie et analyse	DUNOD
<b>STANLEY R.P.</b>	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
<b>STEWART I.</b>	Galois theory	CHAPMAN AND HALL
<b>STROUSTRUP B</b>	Le langage C++	PEARSON EDUCATION
<b>SZPIRGLAS A.</b>	Exercices d'algèbre	CASSINI
<b>TAUVEL P.</b>	Cours de Géométrie	DUNOD
<b>TAUVEL P.</b>	Cours d'algèbre	DUNOD
<b>TAUVEL P.</b>	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
<b>TAUVEL P.</b>	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
<b>TENENBAUM G. WU J.</b>	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
<b>TENENBAUM G.</b>	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.

<b>TENENBAUM G.</b>	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
<b>TENENBAUM G. MENDÈS-FRANCE M.</b>	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
<b>TISSERON C.</b>	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
<b>TISSIER A.</b>	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
<b>TITCHMARSH E.C.</b>	The theory of functions	OXFORD
<b>TORTRAT A.</b>	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
<b>TRIGNAN J.</b>	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT
<b>TRUFFAULT B.</b>	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
<b>TURING A GIRARD J. Y.</b>	La Machine de Turing	SEUIL
<b>VALIRON G.</b>	Cours d'analyse mathématique <ul style="list-style-type: none"> <li>• I Théorie des fonctions</li> <li>• II Équations fonctionnelles - Applications</li> </ul>	MASSON
<b>VAUTHIER J. PRAT J-J.</b>	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
<b>VAZIRANI V.V.</b>	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
<b>VINBERG E. B.</b>	A course in algebra	AMS
<b>WAGSCHAL C.</b>	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	HERMANN
<b>WARIN B.</b>	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES
<b>WARUSFEL A.</b>	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE

---

<b>WARUSFEL, ATTALI COLLET, GAUTIER NICOLAS</b>	Mathématiques • Analyse • Arithmétique • Géométrie • Probabilités	VUIBERT
<b>WATERMAN M.S.</b>	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
<b>WEST D. B.</b>	Introduction to graph theory	PRENTICE HALL
<b>WHITTAKER E.T. WATSON G.N.</b>	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
<b>WILF H.</b>	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
<b>WILF H.</b>	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
<b>WILLEM M.</b>	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
<b>WINSKEL G.</b>	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS
<b>YALE P.B.</b>	Geometry and Symmetry	DOVER
<b>YOUNG D.M. GREGORY R.T.</b>	A survey of numerical mathematics	DOVER
<b>ZÉMOR G.</b>	Cours de cryptographie	CASSINI
<b>ZUILY Cl. QUEFFELEC H.</b>	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON

---