MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION GÉNÉRALE DES RESSOURCES HUMAINES

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES
CONCOURS EXTERNE

Session 2011

LES RAPPORTS DES JURYS DE CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

Table des matières

Chapitre 1

Composition du jury

Directoire

Foulon Patrick, Président	Professeur des Universités
Bougé Luc, Vice-président	Professeur des Universités
Burban Anne, Vice-présidente	Inspectrice générale
Godefroy Gilles, Vice-président	Directeur de recherche
Torossian Charles, Vice-président	Inspecteur général
Boisson François, Directoire	Professeur de chaire supérieure
Cori René, Directoire	Maître de conférences
Goudon Thierry, Directoire	Directeur de recherche
Mestre Jean François, Directoire	Professeur des Universités
Petazzoni Bruno, Directoire	Professeur de chaire supérieure
Ruprecht David, Directoire	Professeur agrégé

Abergel Luc	Professeur de chaire supérieure
Bachmann Florence	Professeure agrégée
Barani Jean-Pierre	Professeur de chaire supérieure
Barbolosi Dominique	Maître de conférences
Bardet Jean-Marc	Professeur des Universités
Barou Geneviève	Maître de conférences
Baumann Pierre	Chargé de recherche
Bayle Lionel	Maître de conférences
Bayle Vincent	Professeur agrégé
Bechata Abdellah	Professeur agrégé
Bennequin Daniel	Professeur des Universités
Bernis Laurent	Professeur de chaire supérieure
Bertrand Pierre	Directeur de recherche
Biolley Anne-Laure	Professeure agrégée
Blanloeil Vincent	Maître de conférences
Bonnaillie-Noël Virginie	Chargée de recherche
Borel Agnès	Professeure de chaire supérieure
Borel Laëtitia	Professeure agrégée
Boulmezaoud Tahar-Zamène	Maître de conférences
Boyer Franck	Professeur des Universités
Brémont Julien	Maître de conférences

Brinon Olivier	Maître de conférences
Buse Laurent	Chargé de recherche
Cadoret Anna	Maître de conférences
Calado Bruno	Professeur agrégé
Caldero Philippe	Maître de conférences
Chabanol Marie-Line	Maître de conférences
Chafaï Djalil	Professeur des Universités
Chardin Marc	Chargé de recherche
Chillés Alain	Professeur de chaire supérieure
Correia Hubert	Professeur de chaire supérieure
Czarnecki Marc-Olivier	Professeur des Universités
D'Angelo Yves	Professeur des Universités
De Seguins Pazzis Clément	Professeur agrégé
Dozias Sandrine	Professeure de chaire supérieure
Drouhin Catherine	Professeure de chaire supérieure
Dutrieux Yves	Maître de conférences
Fakhi-Souchu Saâdia	Professeure agrégée
Favennec Denis	Professeur de chaire supérieure
Feauveau Jean-Christophe	Professeur de chaire supérieure
Fontaine Philippe	Professeur de chaire supérieure
Fontanez Françoise	Professeure de chaire supérieure
Fort Jean-Claude	Professeur des Universités
Francinou Serge	Professeur de chaire supérieure
Gallois Mirentchu	Professeure de chaire supérieure
Garay Mauricio	Professeur agrégé
Gaudron Isabelle	Maître de conférences
Gaussier Hervé	Professeur des Universités
Germain Cyril	Professeur agrégé
Gonnord Stéphane	Professeur de chaire supérieure
Goudon Thierry	Directeur de recherche
Haas Bénédicte	Maître de conférences
Hanrot Guillaume	Professeur des Universités
Herau Frédéric	Professeur des Universités
Hubert Evelyne	Chargée de recherche
Isaïa Jérôme	Professeur de chaire supérieure
Istas Jacques	Professeur des Universités
Julg Pierre	Professeur des Universités
Klein Thierry	Maître de conférences
Kostyra Marie-Laure	Professeure agrégée
Lafitte Christophe	Professeur agrégé
Lafitte Pauline	Maître de conférences
Le Merdy Sylvie	Professeure agrégée
Lefèvre Pascal	Professeur des Universités
Lescot Paul	Professeur des Universités
Lévy Véhel Jacques	Directeur de recherche
Loiseau Bernard	Professeur de chaire supérieure
Mansuy Roger	Professeur de chaire supérieure
Mestre Jean-François	Professeur des Universités
Méthou Edith	Professeure agrégée
Meunier Nicolas	Maître de conférences
Mézard Ariane	Maître de conférences

Michel Julien	Maître de conférences
Mneimné Rached	Maître de conférences
Monat Pascale	Professeure de chaire supérieure
Monier Marie	Professeure agrégée
Monniaux Sylvie	Maître de conférences
Moreau Anne	Maître de conférences
Noble Pascal	Maître de conférences
Nodet Maëlle	Maître de conférences
Orgogozo Fabrice	Chargé de recherche
Pennequin Denis	Maître de conférences
Peyre Emmanuel	Professeur des Universités
Philibert Bertrand	Professeur agrégé
Prieur Christophe	Chargé de recherche
Recher François	Maître de conférences
Régnier Mireille	Directrice de recherche
Riche Simon	Chargé de recherche
Risler Jean-Jacques	Professeur des Universités
Ritzenthaler Christophe	Chargé de recherche
Rousseau Antoine	Chargé de recherche
Seuret Stéphane	Maître de conférences
Simon Thomas	Professeur des Universités
Starynkevitch Jean	Professeur agrégé
Stoltz Gilles	Chargé de recherches
Taïeb Franck	Professeur de chaire supérieure
Teillaud Monique	Chargée de recherche
Théry Laurent	Chargé de recherche
Thomé Emmanuel	Chargé de recherche
Tosel Emmanuelle	Professeure agrégée
Tosel Nicolas	Professeur de chaire supérieure
Vincent Christiane	Professeure de chaire supérieure
Wattiez Johann	Professeur agrégé
Weil Jacques-Arthur	Maître de conférences
Weill Mathilde	Professeure agrégée
Zinsmeister Michel	Professeur des Universités
Zwald Laurent	Maître de conférences

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : mardi 12 avril 2011
- Épreuve d'analyse et probabilités : mercredi 13 avril 2011

La liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 10 juin 2011.

L'oral s'est déroulé du 20 juin au 11 juillet à la Halle aux farines, Université Paris Diderot. La liste d'admission a été publiée le lundi 11 juillet 2011.

Depuis 2006 le concours propose quatre options. Les trois premières ne diffèrent que par les épreuves de modélisation alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques. En 2011 comme en 2010, on peut constater que dans les trois premières options, les nombres d'inscrits sont similaires ; ils sont toujours – et c'est bien compréhensible – nettement inférieurs dans l'option D. Dans les quatre options, les pourcentages d'admis sont similaires. Nous continuons, tant que ces options ne sont pas stabilisées, à ne pas donner de statistiques détaillées par option.

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement que, par le concours d'agrégation, le ministère recrute des professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, Grandes Écoles, classes préparatoires aux Grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs).

Les candidats qui ont été admis à un concours de recrutement sont nommés professeurs agrégés stagiaires à la rentrée scolaire de l'année au titre de laquelle est organisé le recrutement et classés, dès leur nomination, selon les dispositions du décret du 5 décembre 1951 susvisé. Ils sont affectés dans une académie par le ministre chargé de l'éducation dans des conditions fixées par arrêté de ce dernier. Le stage a une durée d'un an. Au cours de leur stage, les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée, dans le cadre des orientations définies par l'Etat, sous la forme d'actions organisées à l'université, d'un tutorat, ainsi que, le cas échéant, d'autres types d'actions d'accompagnement. Les modalités du stage et les conditions de son évaluation sont arrêtées par le ministre chargé de l'éducation

"Pour la cession 2011, il nous a été confirmé par le bureau des affectations et des mutations des personnels du second degré (DGRH B2-2) que devraient être reconduites les dispositions de la note de service 2010-047 du 2 avril 2010 relative à l'affectation des lauréats des concours du second degré en qualité de professeur stagiaire, notamment en ce qui concerne les reports de stages accordés aux agrégés qui souhaitent poursuivre des études doctorales. Cependant, lorsqu'un lauréat de l'agrégation est, suite à sa demande, nommé stagiaire et affecté en académie, l'annulation de sa nomination ne peut se faire sans l'accord du recteur concerné. Notons toutefois que le lauréat peut demander à effectuer son stage en tant qu'ATER ou doctorant contractuel selon les modalités de la note de service."

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse

`http//www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm`

ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse

`http//www.agreg.org`

où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

Epreuve "Agir en fonctionnaire de l'état de manière éthique et responsable".
Une nouvelle épreuve apparaît pour la session 2011. Suivant l'option choisie, elle est cumulée soit à l'épreuve "Algèbre et Géométrie" soit à l'épreuve "Mathématiques pour l'Informatique". Les contenus pour cette nouvelle épreuve sont précisés dans le texte suivant.

Les candidats se verront remettre un extrait court d'un texte officiel en relation avec les connaissances décrites dans le point 1 de l'arrêté du 12 mai 2010 fixant le contenu de la compétence « Agir en fonctionnaire de l'Etat et de façon éthique et responsable» et une liste de suggestions utilisables par le candidat pour préparer son exposé. Des données supplémentaires utiles à la préparation pourront être fournies aux candidats.

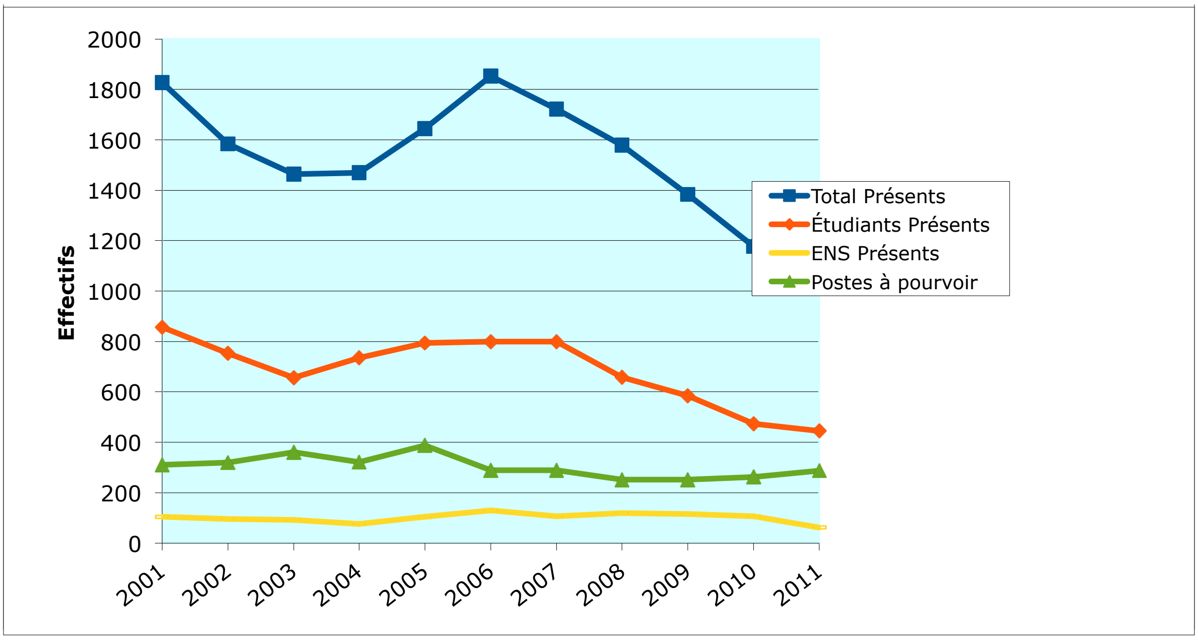
2.2 Statistiques et commentaires généraux sur la session 2011

Après la diminution sensible du nombre de postes au concours 2006 (de 388 postes en 2005 à 290 postes en 2006 et 2007 soit une diminution de plus de 25 %), le nombre de postes proposés au concours a subi une nouvelle baisse pour se stabiliser à 252 en 2008 et 2009. Depuis ce nombre à été légèrement revu à la hausse, d'abord en 2010, avec un total de 263 postes. En 2011 il y avait 288 postes ouverts au concours.

Le nombre d'inscrits a atteint un plafond en 2006-07. Depuis on constate une baisse sensible. Le phénomène est particulièrement marqué en ce qui concerne le nombre de candidats effectivement présents aux deux épreuves écrites. Cette baisse est sûrement en relation forte avec les variations du nombre de postes mis au concours. Elle reflète aussi sans doute la baisse du nombre des étudiants suivant une préparation qui est exigeante. Enfin beaucoup de candidats s'inscrivent mais se sentent insuffisamment préparés. Ce fait semble confirmé par une analyse un peu plus fine qui montre que cette diminution est particulièrement visible dans les catégories des étudiants hors ENS. [1]

Année	Total Inscrits	Total Présents	Étudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



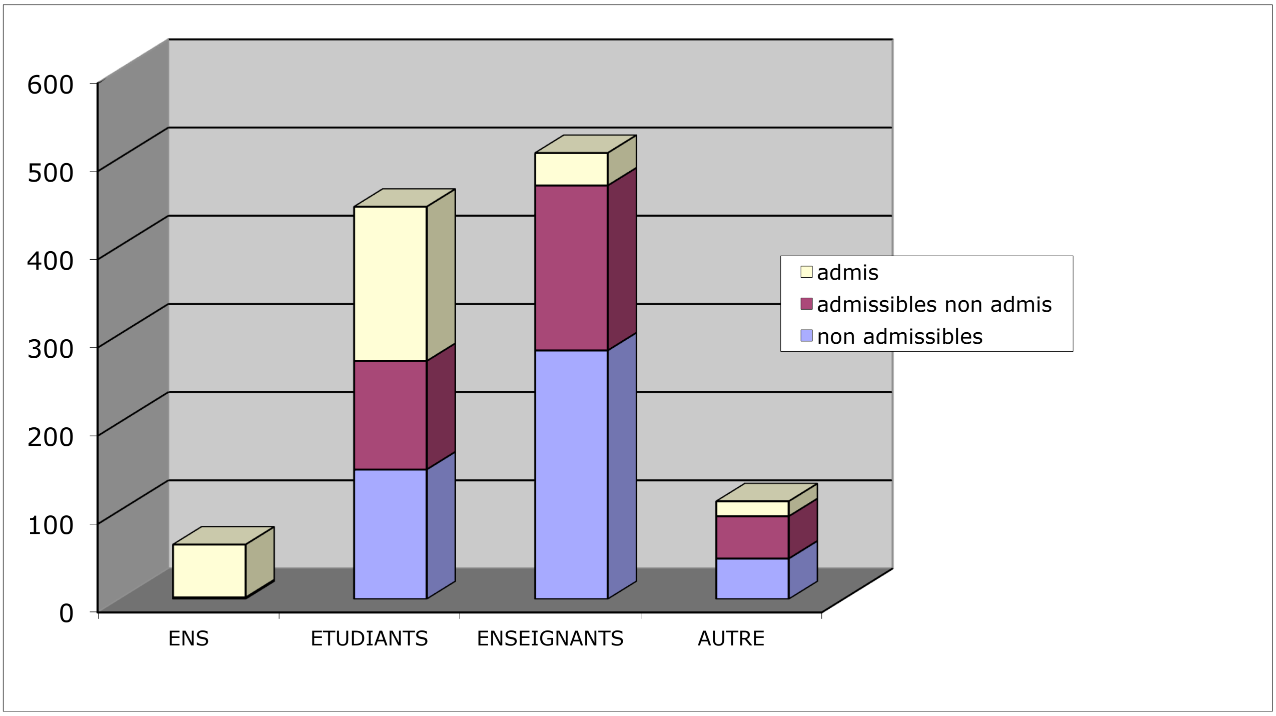
1. Dans cette population, sont regroupées les catégories « étudiant » et « élève de 1re année d'IUFM ».

À l'issue de la délibération d'écrit, 648 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 19,5/20 et le dernier une moyenne de 6,75/20. Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 288 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 18,33/20, le dernier admis une moyenne de 9,33/20.

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle, âge). Dans ces tableaux, **tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents.** [2]

CATÉGORIES	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS	% admissibles	% admis
ÉLÈVE IUFM 1re ANNÉE	82	42	16	8	38,1	19,0
ÉLÈVE D'UNE ENS	110	62	61	60	98,4	96,8
ÉTUDIANT	710	403	282	167	70,0	41,4
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	117	36	25	8	69,4	22,2
SANS EMPLOI	145	48	25	6	52,1	12,5
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	41	14	9	4	64,3	28,6
AGRÉGÉ	14	4	1	0	25,0	0,0
CERTIFIÉ	914	394	179	26	45,4	6,6
PLP	39	12	3	0	25,0	0,0
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	224	80	32	7	40,0	8,8
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	8	2	0	0	0,0	0,0
AUTRE FONCTIONNAIRE	19	9	6	2	66,7	22,2
SURVEILLANT	16	5	1	0	20,0	0,0
AUTRE	61	13	8	1	61,5	7,7
TOTAL	**2500**	**1124**	**648**	**289**	**57,7**	**25,7**

Résultat du concours par catégories professionnelles [3]



Résultat du concours par grandes catégories

Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, un concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée

2. Un candidat étranger a été admis hors classement

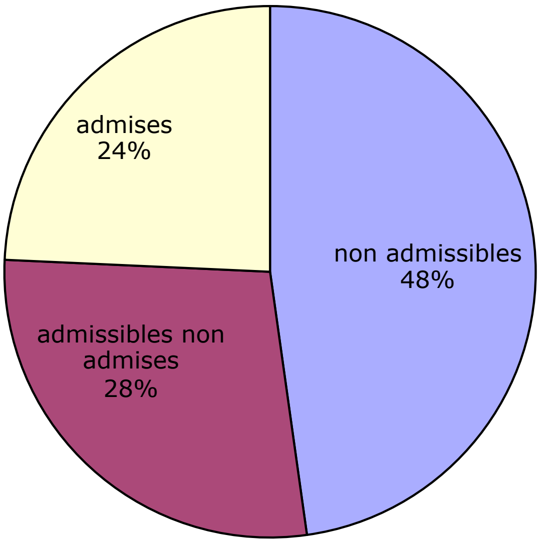
3. Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet, 79% de l'effectif des admis. On note cependant une différence significative avec les années 2010, 2008 et 2009, ce pourcentage était alors de 92 %.

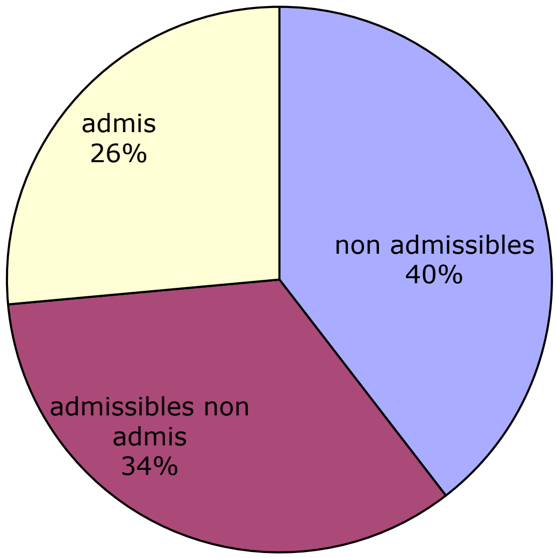
Répartition selon le genre

GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMMES	826	383	200	93	52,22	24,28
HOMMES	1677	741	448	196	60,46	26,45
TOTAL	2503	1124	648	289	57,65	25,71

Résultat du concours par genres



FEMMES



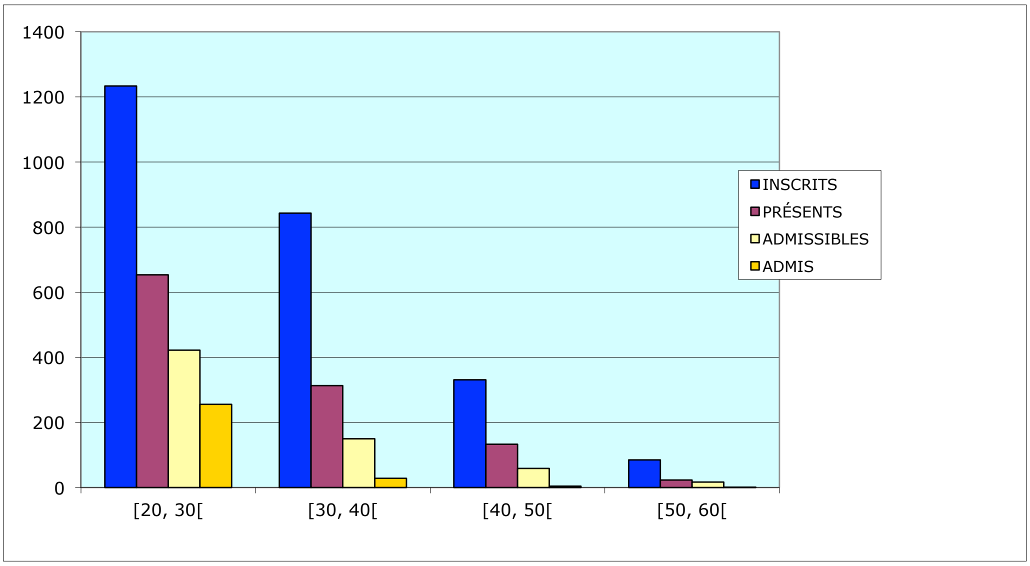
HOMMES

Le rééquilibrage de la parité pour le succès au concours observé en 2010 (23, 37 % d'admis pour 20, 52 % d'admises) se confirme cette année. Le résultat est très différent des pourcentages constatés en 2009 (22, 01 % d'admis pour 10, 50 % d'admises). Ces pourcentages sont à apprécier en tenant compte du fait que les femmes ne représentent qu'un faible pourcentage parmi les candidats issus d'une ENS, 15% en 2011.

Répartition selon l'âge

TRANCHE D'ÂGE	INSCRITS	PRÉSENTS	ADMISSIBLES	ADMIS
[20, 30[	1233	653	422	256
[30, 40[	843	313	150	28
[40, 50[	331	133	59	4
[50, 60[	85	23	17	1

Répartition par tranches d'âge



Cette répartition par tranches d'âge confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes constituent en effet l'essentiel des présents mais surtout des admis au concours, 89 % des reçus ont moins de 30 ans. Cependant des candidats plus avancés en âge se sont présentés avec succès.

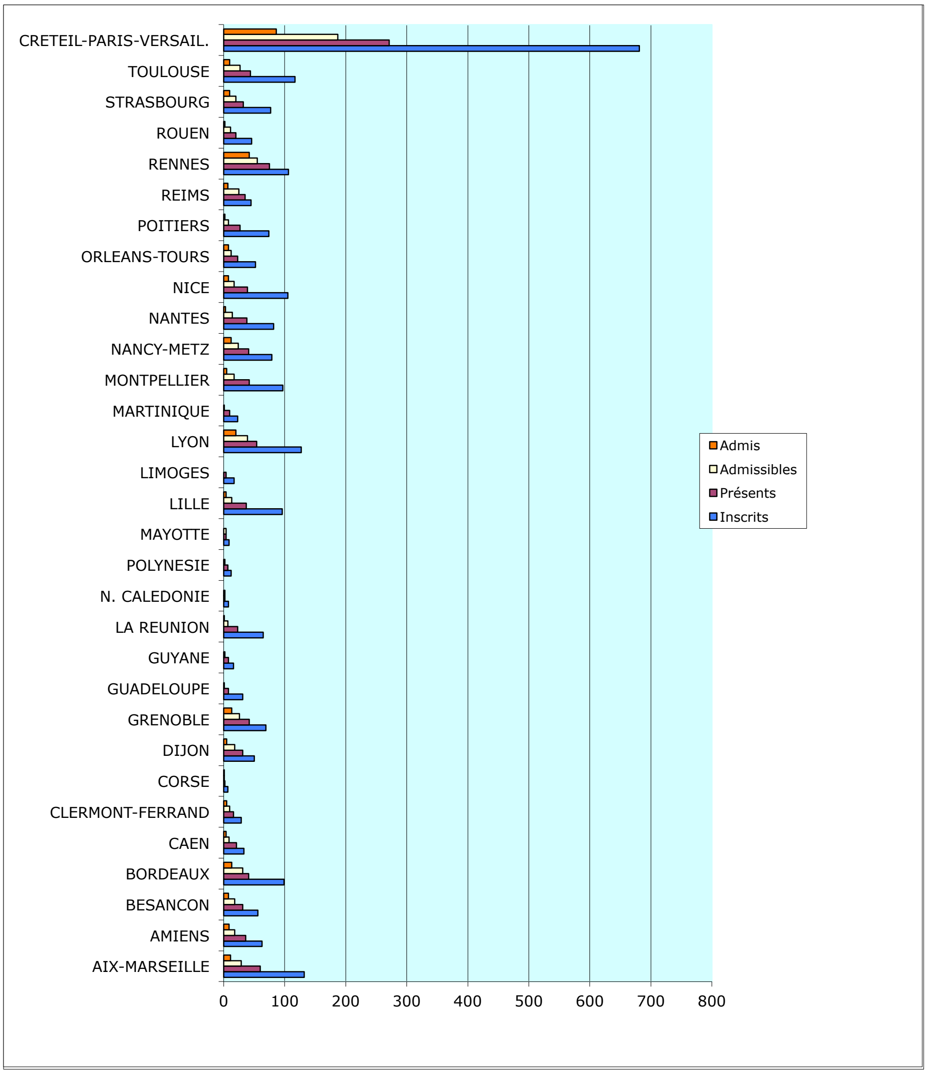
Répartition selon l'académie

Académie	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	132	60	29	11
AMIENS	63	36	18	9
BESANCON	56	31	18	8
BORDEAUX	99	41	31	13
CAEN	33	21	9	4
CLERMONT-FERRAND	29	16	10	5
CORSE	7	2	1	1
DIJON	50	31	18	5
GRENOBLE	69	42	26	13
GUADELOUPE	31	8	1	0
GUYANE	16	8	2	0
LA REUNION	65	23	7	1
N. CALEDONIE	8	2	2	0
POLYNESIE	12	7	2	0
MAYOTTE	9	4	4	0
LILLE	96	37	13	4
LIMOGES	17	4	0	0
LYON	127	54	39	20
MARTINIQUE	23	10	1	0
MONTPELLIER	97	42	17	5
NANCY-METZ	79	41	24	12
NANTES	82	38	14	3
NICE	105	39	17	8
ORLEANS-TOURS	52	23	12	8
POITIERS	74	27	8	2
REIMS	45	35	25	7
RENNES	106	75	55	42
ROUEN	46	20	11	2
STRASBOURG	77	32	20	10
TOULOUSE	117	44	27	10
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	681	271	187	86
TOTAL	2503	1124	648	289

Hors ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	642	247	163	63
RENNES	76	47	28	15
LYON	94	44	29	10

ENS seulement	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAILLES	39	24	24	23
RENNES	30	28	27	27
LYON	33	10	10	10

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)



Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

3.1 Énoncé

Notations et définitions

Selon l'usage, les corps sont supposés commutatifs. Dans tout le problème, n est un élément de $\mathbf{N}^*$, K un corps.

Si A est un sous-anneau d'un corps, si p et q sont deux éléments de $\mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(A)$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans A. On abrège $\mathcal{M}_{p,p}(A)$ en $\mathcal{M}_p(A)$; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(A)$ est notée I_p. Le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_p(A)$ est noté $\mathrm{GL}_p(A)$. Pour m dans $\mathbf{N}$, on note $U_m(A)$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré m de $A[X]$.

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(A)$ sont dites *semblables sur* A si et seulement s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(A)$ telle que :

$$N = PMP^{-1}.$$

La relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(A)$ est une relation d'équivalence. Les classes de cette relation sont appelées *classes de similitude sur* A ; pour $A = \mathbf{Z}$, on les appellera également *classes de similitude entière*.

Pour M dans $\mathcal{M}_n(K)$, soit χ_M le polynôme caractéristique (unitaire) de M :

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M).$$

Pour P dans $U_n(K)$, soit $\mathcal{E}_K(P)$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(K)$ telles que $\chi_M = P$. Puisque deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(K)$ ont même polynôme caractéristique, $\mathcal{E}_K(P)$ est une réunion de classes de similitude sur K.

Il est clair que si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, χ_M est dans $U_n(\mathbf{Z})$. Si P est dans $U_n(\mathbf{Z})$, on note $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ telles que $\chi_M = P$; cet ensemble est une réunion de classes de similitude entière. On note $\mathcal{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ diagonalisables sur $\mathbf{C}$.

Si P est le polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$ de $K[X]$, on note $C(P)$ la matrice compagnon de P, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{si } n \geqslant 2 \quad \text{et : } (a_0) \quad \text{si } n = 1.$$

Objectifs du problème, dépendance des parties

Le thème du problème est l'étude de la relation de similitude entière. La partie **I** rassemble quelques résultats relatifs à la similitude sur un corps et aux polynômes. La partie **II** débute l'étude de la similitude entière. La partie **III** établit le résultat principal du texte : si P est dans $U_n(\mathbf{Z})$, l'ensemble $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière.

Les sous-parties **I.A**, **I.B** et **I.C** sont largement indépendantes. Les sous-parties **II.A** et **II.B** sont indépendantes de la partie **I**. Les sous-parties **III.A**, **III.B**, **III.C** sont largement indépendantes des parties **I** et **II**.

I. Préliminaires

A. Matrices à coefficients dans K

1. (a) Pour quels (a,b,c) de K^3 la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur K ?

   (b) Trouver deux matrices de $\mathscr{M}_2(K)$ non semblables sur K et ayant même polynôme caractéristique.

   (c) Soient M et M' deux éléments de $\mathscr{M}_n(K)$ diagonalisables sur K et telles que $\chi_M = \chi_{M'}$. Montrer que M et M' sont semblables sur K.

2. Soit P dans $U_n(K)$.

   (a) Montrer que : $\chi_{C(P)} = P$.

   (b) Si λ est dans K, montrer que le rang de $C(P) - \lambda I_n$ est supérieur ou égal à $n-1$.

   (c) Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

   (i) le polynôme P est scindé sur K à racines simples,

   (ii) toutes les matrices de $\mathscr{E}_K(P)$ sont diagonalisables sur K,

   (iii) $C(P)$ est diagonalisable sur K.

3. Soient r et s dans $\mathbf{N}^*$, A dans $\mathscr{M}_r(K)$, A' dans $\mathscr{M}_s(K)$, $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$.

   Montrer que M est diagonalisable sur K si et seulement si A et A' sont diagonalisables sur K.

4. Montrer que pour tout P de $U_n(K)$ l'ensemble $\mathscr{E}_K(P)$ est une réunion finie de classes de similitude sur K. On pourra admettre et utiliser le résultat suivant.

   "Si M est dans $\mathscr{M}_n(K)$, il existe r dans $\mathbf{N}^*$ et r polynômes unitaires non constants $P_1, \dots, P_r$ de $K[X]$ tels que M soit semblable sur K à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $C(P_1), \dots, C(P_r)$."

B. Polynômes

1. Soient P dans $K[X]$, a dans K une racine de P. Montrer que a est racine simple de P si et seulement si $P'(a) \neq 0$.
2. Soit P un élément irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines de P dans $\mathbf{C}$ sont simples.
3. Soient P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$, unitaires, tels que P appartienne à $\mathbf{Z}[X]$ et que Q divise P dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que Q appartient à $\mathbf{Z}[X]$. On pourra admettre et utiliser le lemme de Gauss suivant.

   "Si U est dans $\mathbf{Z}[X] \setminus \{0\}$, soit $c(U)$ le p.g.c.d des coefficients de U. Alors, pour tout couple (U,V) d'éléments de $\mathbf{Z}[X] \setminus \{0\}$: $c(UV) = c(U)\,c(V)$."
4. Soit P dans $U_n(\mathbf{Z})$. Montrer que $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ n'est pas vide.

C. Similitude sur K de matrices blocs

Pour U et V dans $\mathscr{M}_n(K)$, on note $\Phi_{U,V}$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(K)$ défini par :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(K), \qquad \Phi_{U,V}(X) = UX - XV.$$

1. Soient U dans $\mathscr{M}_n(K)$, Q dans $\mathrm{GL}_n(K)$ et $V = QUQ^{-1}$. Déterminer un automorphisme du K-espace $\mathscr{M}_n(K)$ envoyant le noyau de $\Phi_{U,V}$ sur celui de $\Phi_{U,U}$.

   Dans la suite, m est un entier tel que $0 < m < n$, A un élément de $\mathscr{M}_m(K)$, A' un élément de $\mathscr{M}_{n-m}(K)$, B un élément de $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$. On note :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A' \end{array}\right), \quad N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right).$$

2. Soient Y dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ et $P = \left(\begin{array}{c|c} I_m & Y \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array}\right)$.

   Vérifier que P appartient à $\mathrm{GL}_n(K)$; déterminer P^{-1} et $P^{-1}NP$. En déduire que s'il existe Y dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ telle que $B = AY - YA'$, alors M et N sont semblables.

3. Le but de cette question est de démontrer que si M et N sont semblables sur K, alors il existe B dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ telle que $B = AY - YA'$.

   Si X est dans $\mathscr{M}_n(K)$, on pose :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{1,1} & X_{1,2} \\ \hline X_{2,1} & X_{2,2} \end{array}\right)$$

   avec $X_{1,1} \in \mathscr{M}_m(K)$, $X_{1,2} \in \mathscr{M}_{m,n-m}(K)$, $X_{2,1} \in \mathscr{M}_{n-m,m}(K)$ et $X_{2,2} \in \mathscr{M}_{n-m}(K)$. On note alors :

$$\tau(X) = (X_{2,1}, X_{2,2}).$$

   Il est clair que τ est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(K)$ dans $\mathscr{M}_{n-m,n}(K)$.

   (a) Montrer les relations :
$$\begin{cases} \text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \Phi_{N,N} = \text{Ker } \tau \cap \text{Ker } \Phi_{M,N} \\ \tau\left(\text{Ker } \Phi_{M,N}\right) \subset \tau\left(\text{Ker } \Phi_{N,N}\right) \end{cases}$$

   (b) On suppose M et N semblables sur K. Montrer :
$$\tau(\text{Ker } \Phi_{M,N}) = \tau(\text{Ker } \Phi_{N,N}).$$

   (c) On suppose M et N semblables sur K. Montrer qu'il existe Y dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ tel que : $B = AY - YA'$.

4. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

   (i) M est diagonalisable sur K,

   (ii) A et A' sont diagonalisables sur K et B est de la forme $AY - YA'$ avec Y dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$.

II. Similitude entière

A. Généralités, premier exemple

1. Soit A un sous-anneau d'un corps. Montrer que $\mathrm{GL}_n(A)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(A)$ dont le déterminant est un élément inversible de A. Expliciter ce résultat pour $A = \mathbf{Z}$.
2. Soient p un nombre premier, $\mathbb{F}_p$ le corps fini $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, on note $\overline{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$ obtenue en réduisant M modulo p. Montrer que si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ semblables sur $\mathbf{Z}$, les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont semblables sur $\mathbb{F}_p$.
3. Pour a dans $\mathbf{Z}$, soient :
$$S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que S_0 et S_1 sont semblables sur $\mathbb{Q}$ mais ne sont pas semblables sur $\mathbf{Z}$.

   Soit M dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ telle que $\chi_M = X^2 - 1$.

   (b) Montrer qu'il existe x_1 et x_2 dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux tels que le vecteur colonne $x = {}^t(x_1, x_2)$ vérifie $Mx = x$.

   (c) Montrer que M est semblable sur $\mathbf{Z}$ à une matrice S_a avec a dans $\mathbf{Z}$.

   (d) Pour a et x dans $\mathbf{Z}$, déterminer $T_x S_a T_x^{-1}$; conclure que M est semblable sur $\mathbf{Z}$ à l'une des deux matrices S_0, S_1.

B. Les ensembles $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(X^2-\delta)$

Dans cette partie, on fixe un élément δ de $\mathbf{Z}^*$ qui n'est pas le carré d'un entier et on considère $P = X^2 - \delta$.

1. (a) Vérifier que $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est l'ensemble des matrices de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$$
   où a, b, c sont dans $\mathbf{Z}$ et vérifient : $a^2 + bc = \delta$. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que b divise $\delta - a^2$, vérifier que l'ensemble $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ contient une unique matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}.$$
   Cette matrice sera notée $M_{(a,b)}$ dans la suite.

   (b) Soient a, b dans $\mathbf{Z}$ tels que b divise $\delta - a^2$, λ dans $\mathbf{Z}$. Montrer que les matrices $M_{(a,b)}$, $M_{(a,-b)}$, $M_{(a+\lambda b,b)}$, $M_{(-a,(\delta-a^2)/b)}$ sont semblables sur $\mathbf{Z}$.
2. Soit M dans $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$. Puisque $M_{(a,-b)}$ et $M_{(a,b)}$ sont semblables sur $\mathbf{Z}$, l'ensemble $\mathscr{B}$ des b de $\mathbf{N}^*$ tels qu'il existe une matrice $M_{(a,b)}$ semblable sur $\mathbf{Z}$ à M n'est pas vide ; on note $\beta(M)$ le plus petit élément de $\mathscr{B}$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier a tel que $|a| \leqslant \dfrac{\beta(M)}{2}$ et tel que M soit semblable sur $\mathbf{Z}$ à $M_{(a,\beta(M))}$.

   (b) Comparer $|\delta - a^2|$ et $\beta(M)^2$. En déduire que $\beta(M)$ est majoré par $\sqrt{\delta}$ si $\delta > 0$, par $\sqrt{4|\delta|/3}$ si $\delta < 0$.

   (c) Montrer que $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion d'un nombre fini de classes de similitude entière.

C. Diagonalisabilité et réduction modulo p

Soient p un nombre premier, $\overline{\mathbb{F}_p}$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p$ défini en **II.A**.2, l dans $\mathbf{N}^*$. Pour P dans $\mathbf{Z}[X]$, on note $\overline{P}$ l'élément de $\mathbb{F}_p[X]$ obtenu en réduisant P modulo p. Si M est dans $\mathcal{M}_l(\mathbf{Z})$, on note $\overline{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_l(\mathbb{F}_p)$ obtenue en réduisant M modulo p.

1. Soit P dans $\mathbf{Z}[X]$ non constant dont les racines dans $\mathbf{C}$ sont simples.

   (a) Montrer qu'il existe d dans $\mathbf{N}^*$, S et T dans $\mathbf{Z}[X]$ tels que :
   $$SP + TP' = d.$$

   (b) Si p ne divise pas d, montrer que les racines de $\overline{P}$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont simples.

2. Soit M dans $\mathscr{M}_l(\mathbf{Z})$ diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

   (a) Montrer qu'il existe un élément P de $\mathbf{Z}[X]$ unitaire, dont les racines complexes sont toutes simples et tel que $P(M) = 0$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier d_M tel que si p ne divise pas d_M alors $\overline{M}$ est diagonalisable sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

D. Un résultat de non finitude

Soit P un élément de $U_n(\mathbf{Z})$ dont les racines dans $\mathbf{C}$ ne sont pas toutes simples.

1. Montrer qu'il existe l dans $\mathbf{N}^*$, m dans $\mathbf{N}$, Q dans $U_l(\mathbf{Z})$, R dans $U_m(\mathbf{Z})$ tels que : $P = Q^2R$.

   Grâce à **I.B**.4, on dispose de A dans $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(Q)$ et, si $m > 0$, de B dans $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(R)$. Si p est un nombre premier, soit E_p la matrice :
   $$\left(\begin{array}{c|c|c} A & pI_l & O \\ \hline O & A & O \\ \hline O & O & B \end{array}\right) \text{si } m > 0, \quad \left(\begin{array}{c|c} A & pI_l \\ \hline O & A \end{array}\right) \text{si } m = 0.$$

2. Les entiers d_A et d_B (si $m > 0$) sont ceux définis en **II.C**. Soient p et q deux nombres premiers distincts tels que p ne divise ni d_A, ni l, ni d_B si $m > 0$. Montrer que E_p et E_q ne sont pas semblables sur $\mathbf{Z}$.

3. Conclure que $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ n'est pas réunion finie de classes de similitude entière.

III. Un théorème de finitude

Si $(\Gamma, +)$ est un groupe abélien et r un élément de $\mathbf{N}^*$, on dit que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ d'éléments de Γ est une $\mathbf{Z}$-base de Γ si et seulement si tout élément de Γ s'écrit de façon unique $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ dans $\mathbf{Z}^r$.

Si Γ admet une $\mathbf{Z}$-base finie, on dit que Γ est un groupe abélien libre de type fini ou, en abrégé, un g.a.l.t.f. On sait qu'alors toutes les $\mathbf{Z}$-bases de Γ ont même cardinal; ce cardinal commun est appelé *rang* de Γ. Par exemple, $(\mathbf{Z}^r, +)$ est un g.a.l.t.f de rang r (et tout g.a.l.t.f de rang r est isomorphe à $\mathbf{Z}^r$).

On pourra admettre et utiliser le résultat suivant.

"Soient $(\Gamma, +)$ un g.a.l.t.f de rang r, Γ' un sous-groupe non nul de Γ. Alors il existe une $\mathbf{Z}$-base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de Γ, un entier naturel non nul $s \leqslant r$ et des éléments $d_1, \ldots, d_s$ de $\mathbf{N}^*$ tels que $(d_i e_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ soit une $\mathbf{Z}$-base de Γ'. En particulier, Γ' est un g.a.l.t.f de rang $\leqslant r$."

A. Groupes abéliens libres de type fini

1. Soient Γ un g.a.l.t.f de rang n, $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une $\mathbf{Z}$-base de Γ, $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille d'éléments de Γ. Si $1\leqslant j\leqslant n$, on écrit :
$$f_j=\sum_{i=1}^{n}p_{i,j}e_i$$
où la matrice : $P=(p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$. Montrer que $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une $\mathbf{Z}$-base de Γ si et seulement si P appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.
2. Soient Γ un g.a.l.t.f, Γ' un sous-groupe de Γ. Montrer que le groupe quotient Γ/Γ' est fini si et seulement si Γ et Γ' ont même rang.
3. Soient R un anneau commutatif intègre dont le groupe additif est un g.a.l.t.f, I un idéal non nul de R.
   (a) Montrer que l'anneau quotient R/I est fini.
   (b) Montrer que l'ensemble des idéaux de R contenant I est fini.
4. Soient m et n dans $\mathbf{N}^*$ avec $m\leqslant n$, V un sous-espace de dimension m de $\mathbb{Q}^n$. Montrer qu'il existe une $\mathbf{Z}$-base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbf{Z}^n$ telle que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ soit une $\mathbb{Q}$-base de V.

Dans les parties **III.B** et **III.C**, P est un élément de $U_n(\mathbf{Z})$ irréductible sur $\mathbb{Q}$, α une racine de P dans $\mathbf{C}$, $\mathbb{Q}[\alpha]$ la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathbf{C}$ engendrée par α, c'est-à-dire le sous-espace du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ dont $(\alpha^i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est une base. On rappelle que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$. Si l'élément x de $\mathbb{Q}[\alpha]$ s'écrit $x_0+x_1\alpha+\cdots+x_{n-1}\alpha^{n-1}$ où $(x_0,\dots,x_{n-1})$ est dans $\mathbb{Q}^n$, on pose :
$$\mathscr{N}(x)=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}|x_i|.$$
On note $\mathbf{Z}[\alpha]$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}[\alpha]$:
$$\mathbf{Z}[\alpha]=\left\{\sum_{i=0}^{n-1}x_i\alpha^i,\ (x_0,\dots,x_{n-1})\in\mathbf{Z}^n\right\}.$$
On vérifie que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est le corps des fractions de $\mathbf{Z}[\alpha]$; la justification n'est pas demandée. Si P est une partie non vide de $\mathbb{Q}[\alpha]$ et a un élément de $\mathbb{Q}[\alpha]$, on note aP l'ensemble :
$$\{ax,\ x\in P\}.$$
On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des idéaux non nuls de $\mathbf{Z}[\alpha]$.

B. Classes d'idéaux

1. Montrer qu'il existe $C>0$ tel que :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{Q}[\alpha]^2,\qquad \mathscr{N}(xy)\leqslant C\,\mathscr{N}(x)\,\mathscr{N}(y).$$
2. Si y est dans $\mathbb{Q}[\alpha]$ et M dans $\mathbf{N}^*$, montrer qu'il existe m dans $\{1,\dots,M^n\}$ et a dans $\mathbf{Z}[\alpha]$ tels que :
$$\mathscr{N}(my-a)\leqslant\frac{1}{M}.$$
Indication. Posant $y=y_0+y_1\alpha+\cdots+y_{n-1}\alpha^{n-1}$ avec $(y_0,\dots,y_{n-1})$ dans $\mathbb{Q}^n$, on pourra considérer, pour $0\leqslant j\leqslant M^n$:
$$u_j=\sum_{i=0}^{n-1}\left(jy_i-[jy_i]\right)\alpha^i,$$
où $[x]$ désigne, pour x dans $\mathbf{R}$, la partie entière de x.

3. On définit la relation $\sim$ sur $\mathscr{I}$ en convenant que $I_1 \sim I_2$ si et seulement s'il existe a et b dans $\mathbf{Z}[\alpha] \setminus \{0\}$ tels que $aI_1 = bI_2$, c'est-à-dire s'il existe x dans $\mathbb{Q}[\alpha] \setminus \{0\}$ telle que $I_2 = xI_1$. Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{I}$. On se propose de montrer que le nombre de classes de cette relation est fini.

   On fixe I dans $\mathscr{I}$, z dans $I \setminus \{0\}$ tel que $\mathscr{N}(z)$ soit minimal (ce qui est possible car l'image d'un élément non nul de $\mathbf{Z}[\alpha]$ par $\mathscr{N}$ appartient à $\mathbf{N}^*$).

   Soient également M un entier strictement supérieur à C et ℓ le ppcm des éléments de $\mathbf{N}^*$ inférieurs ou égaux à M^n.

   (a) Soit x dans I. En appliquant la question 2 à $y = \dfrac{x}{z}$ montrer que :
   $$\ell I \subset z\mathbf{Z}[\alpha].$$

   (b) Vérifier que $J = \dfrac{\ell}{z} I$ est un idéal de $\mathbf{Z}[\alpha]$ contenant $l\mathbf{Z}[\alpha]$ et conclure.

C. Classes de similitude et classes d'idéaux

1. Soient M dans $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$, X_M l'ensemble des éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$ non nuls de $\mathbf{Z}[\alpha]^n$ tels que le vecteur colonne ${}^t x$ soit vecteur propre de M associé à α.

   (a) Montrer que X_M n'est pas vide, que si x et y sont dans X_M il existe a et b dans $\mathbf{Z}[\alpha] \setminus \{0\}$ tels que $ax = by$.

   (b) Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est dans X_M, soit (x) le sous-groupe de $(\mathbf{Z}[\alpha], +)$ engendré par $x_1, \dots, x_n$. Montrer que (x) est un idéal de $\mathbf{Z}[\alpha]$, que $(x_1, \dots, x_n)$ en est une $\mathbf{Z}$-base, que si y est dans X_M, alors $(x) \sim (y)$.

   On notera j l'application de $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ dans l'ensemble quotient $\mathscr{I} / \sim$ qui à M associe la classe de (x) pour $\sim$.

2. (a) Montrer que l'application j est surjective.

   (b) Soient M et M' dans $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$. Montrer que M et M' sont semblables sur $\mathbf{Z}$ si et seulement si $j(M) = j(M')$.

   De **III.B** et **III.C** il découle que si l'élément P de $U_n(\mathbf{Z})$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, alors $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière.

D. Finitude de l'ensemble $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$

On se propose d'établir que pour tout polynôme unitaire non constant P de $\mathbf{Z}[X]$, l'ensemble $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière. On raisonne par récurrence sur le degré de P. Le cas où ce degré est 1 étant évident, on suppose $n \geqslant 2$ et le résultat prouvé pour tout P de degré majoré par $n-1$.

On fixe désormais P dans $U_n(\mathbf{Z})$. Si P est irréductible sur $\mathbb{Q}$, on a vu à la fin de **III.C** que $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière. On suppose donc P réductible sur $\mathbb{Q}$, et on se donne un diviseur irréductible Q de P dans $\mathbb{Q}[X]$ unitaire non constant, dont on note m le degré. D'après la question **I.B**.3, Q et P/Q sont respectivement dans $U_m(\mathbf{Z})$ et $U_{n-m}(\mathbf{Z})$. On dispose donc (récurrence) de r et s dans $\mathbf{N}^*$, de r éléments $A_1, \dots, A_r$ de $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(Q)$ (resp. de s éléments $A'_1, \dots, A'_s$ de $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P/Q)$) tels que tout élément de $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(Q)$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P/Q)$) soit semblable sur $\mathbf{Z}$ à un et un seul A_i (resp. A'_j).

Soit M dans $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$.

1. Montrer que M est semblable sur $\mathbf{Z}$ à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_i & B \\ \hline O & A'_j \end{array}\right)$$

avec $1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s,\ B \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z})$.

2. Montrer que :

$$\Gamma = \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z}) \cap \{A_i X - X A'_j\ ;\ X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbb{Q})\}$$

$$\text{et} : \Gamma' = \{A_i X - X A'_j\ ;\ X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z}))\}$$

sont deux g.a.l.t.f de même rang.

3. Conclure que $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière.

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Rapport sur la composition de Mathématiques Générales

Le problème couvrait une part très significative du programme d'algèbre du concours. Les parties **I** et **II**, largement abordées par les candidats, utilisaient l'algèbre linéaire de base, la réduction des endomorphismes, les polynômes (à coefficients dans un corps ou dans l'anneau **Z**), l'arithmétique des entiers et les corps finis. La partie **III** permettait en outre une petite incursion en algèbre commutative.

Cette diversité des thèmes a permis aux candidats de mettre en valeur leurs qualités et a conduit à un étalonnage tout à fait satisfaisant des notes. Beaucoup de candidats ont abordé de larges pans des parties **I** et **II**. Les meilleurs traitent l'essentiel des questions jusqu'à la fin de **III.B**. Beaucoup de copies témoignent d'une maîtrise convenable de l'algèbre linéaire, réduction comprise, mais le bilan est nettement plus mitigé pour les autres points énumérés ci-dessus.

L'abondance -voulue- des questions très proches du cours a favorisé les candidats dominant solidement les bases du programme et capables de mettre efficacement en pratique leurs connaissances dans des situations simples. Par ailleurs, le barême a valorisé la rédaction : une suite de calculs ne constitue pas une démonstration satisfaisante, les objets non introduits par l'énoncé doivent être systématiquement déclarés. Répétons enfin que l'on attend de futurs enseignants une orthographe correcte, une écriture lisible et une présentation soignée, mettant clairement en évidence les résultats obtenus.

Partie I

I.A. Cette sous-partie, consacrée à l'étude de la similitude des matrices carrées à coefficients dans un corps, était constituée de questions très simples. La plupart des candidats en ont traité une part substantielle.

Les questions 1.a et 1.b étaient immédiates et ont été résolues dans la plupart des copies.

On peut regretter des lourdeurs et des imprécisions dans la rédaction de 1.c : tout revenait, en fin de compte, à montrer que deux matrices diagonales ayant même polynôme caractéristique sont semblables, ce qui peut se justifier par l'interprétation des multiplicités comme dimensions des espaces propres.

Certains candidats ont proposé en 2.a un calcul faux, dans lequel des erreurs de signes se compensaient miraculeusement. Dans de nombreuses copies, les opérations élémentaires utilisées pour calculer le déterminant ne sont pas nettement expliquées.

En 2.b, beaucoup de candidats ont utilisé des méthodes maladroites (systèmes linéaires) au lieu de remarquer que $C(P)-\lambda I_n$ admet une sous-matrice inversible de taille $n-1$ évidente. Par ailleurs, le rôle de 2.b dans la preuve de la dernière implication de 2.c n'a été compris que par une moitié des candidats.

En 3, très peu de candidats ont su montrer que la diagonalisabilité de M donnait celles de A et A', ce qui résulte très simplement de la caractérisation de la diagonalisabilité en termes d'annulateurs.

La question 4, facile mais plus conceptuelle, a été sélective.

I.B. La question 1 a été bien réussie ; quelques candidats invoquent une formule de Taylor, ce qui est incorrect en caractéristique p première et inférieure au degré de P (division par les factorielles).

La question 2 n'a été bien traitée que dans peu de copies ; on relève, dans des copies en nombre surprenant, une confusion entre irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ et sur **R**.

Dans la question 3, le lemme de Gauss a souvent été utilisé de manière approximative.

La question 4 nécessitait de relier quelques-unes des questions précédentes. Elle a connu un succès honorable.

I.C. Les questions 1 et 2 étaient simples et ont été en général bien traitées. Quelques candidats semblent cependant ignorer le calcul par blocs.

La question 3 comportait une coquille vénielle. Il fallait lire “il existe Y" et non pas “il existe B". Les candidats ont spontanément rectifié l’énoncé et beaucoup ont établi les relations demandées en a. Les questions b et c demandaient plus d’inititaive et ont eu un succès limité.

La question 4 a souvent été partiellement traitée. Mais peu de candidats ont réussi à faire la synthèse conduisant à l’équivalence demandée.

Partie II

II.A. On entrait ici dans le coeur du sujet : l’étude de la similitude entière.

La question 1, très classique, a souvent été incomplètement traitée. Dans de nombreuses copies, la formule relative à la comatrice a incorrectement servi de justification aux deux implications.

La question 2 ne posait pas de problème quant au fond mais la rédaction a souvent été imprécise.

Beaucoup de candidats ont abordé la question 3 par de lourds calculs explicites qui leur ont fait perdre du temps. Les 3.a et 3.b ont ainsi souvent été résolues via une recherche explicite de vecteurs propres. La question 3.c n’a été résolue que par une poignée de candidats ayant su prendre un peu de recul. La question 3.d, en revanche, a connu un succès raisonnable.

II.B. Le but de cette sous-partie était d’obtenir, par des calculs élémentaires, un cas particulier du théorème de finitude établi dans la partie **III**. Les correcteurs ont été surpris par le manque de succès de la question 1.b, dans laquelle, il est vrai, l’usage des matrices de transvection entière n’était pas suggéré. Beaucoup de candidats ont abandonné **II.B** à ce stade, ce qui est dommage : une fois obtenus les résultats de 1.c, la question 2 ne présentait pas de grandes difficultés.

II.C, II.D. On changeait ici de thème et d’outils. Ces deux sous-parties avaient pour objectif d’établir, par des arguments de réduction modulo p, un résultat de non finitude. La question **II.C**.1.b a été bien traitée, le reste a été peu ou mal abordé.

Partie III

III.A. Les questions 1 et 2 ont été abordées dans un certain nombre de copies. La rédaction de la question 2 a souvent été pénible : le quotient Γ/Γ' est rarement clairement identifié. Le manque de recul face à la notion de quotient s’affirme encore davantage dans la question 3, tandis que la question 4 n’est traitée que dans une poignée de très bonnes copies.

III.B. Seuls quelques très bons candidats ont réellement avancé dans cette sous-partie.

3.3 Corrigé

Présentation du sujet

Comme dans l'énoncé, n est un élément de $\mathbf{N}^*$, K un corps. Si P est un polynôme unitaire de degré n de $K[X]$ (resp. $\mathbf{Z}[X]$), $\mathscr{E}_K(P)$ (resp. $\mathscr{E}_\mathbf{Z}(P)$) désigne l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ (resp. $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$) dont le polynôme caractéristique est P.

Il est immédiat de vérifier que $\mathscr{E}_K(P)$ (resp. $\mathscr{E}_\mathbf{Z}(P)$) est réunion de classes de similitude (resp. de classes de similitude entière). En utilisant la théorie des invariants de similitude (ou la réduction de Jordan et l'inertie de la similitude par extension de corps), on voit facilement que $\mathscr{E}_K(P)$ est une réunion finie de classes de similitude. Le but du problème est d'étudier la question correspondante en remplaçant le corps K par l'anneau $\mathbf{Z}$.

La première partie est consacrée à divers préliminaires relatifs à la similitude sur un corps et aux polynômes. On y établit notamment le résultat suivant.

Theorème 1. Soient m un entier tel que $0 < m < n$, A dans $\mathscr{M}_m(K)$, A' dans $\mathscr{M}_{n-m}(K)$, B dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$, M et N les matrices :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A' \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right).$$

(i) Les matrices M et N sont semblables sur K si et seulement s'il existe $X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ telle que $B = AX - XA'$.

(ii) La matrice M est diagonalisable sur K si et seulement si A et A' sont diagonalisables sur K et s'il existe $X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ telle que : $B = AX - XA'$.

L'assertion (ii), seule utilisée dans le problème, est vue ici comme conséquence immédiate de (i) ; on peut en donner une preuve directe très simple en traitant d'abord le cas où les matrices A et A' sont diagonales.

L'énoncé (i) est dû à W. Roth ([6]). La preuve originale est moins élémentaire mais plus instructive que celle proposée dans le sujet, laquelle est extraite de [4].

Dans toute la suite, on fixe P dans $\mathbf{Z}[X]$ unitaire de degré n.

L'étude de la similitude entière est plus subtile que celle de la similitude sur un corps. Posons en effet, pour d dans $\mathbf{N}$:

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors d est le p.g.c.d des coefficients de J_d, et le p.g.c.d des coefficients est invariant par $\mathbf{Z}$-équivalence, ce qui entraîne que si $d \neq d'$, J_d et $J_{d'}$ ne sont équivalentes sur $\mathbf{Z}$, donc a fortiori pas semblables sur $\mathbf{Z}$. Il s'ensuit que l'ensemble $\mathscr{E}_\mathbf{Z}(X^2)$ n'est pas réunion finie de classes de similitude entière.

La partie **II.D** du problème généralise cette observation de la façon suivante.

Théorème 2. Si les racine de P dans $\mathbf{C}$ ne sont pas toutes simples, alors $\mathscr{E}_\mathbf{Z}(P)$ n'est pas réunion finie de classes de similitude entière.

La preuve, très simple, repose sur le théorème 1 et la réduction modulo un nombre premier.

On dispose cependant de résultats positifs. Si $P = X^2 - 1$, on montre en **II.A** que toute matrice de $\mathscr{E}_\mathbf{Z}(P)$ est semblable à une et une seule des deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \{0,1\}.$$

Si δ est un élément de $\mathbf{Z}$ qui n'est pas un carré parfait et $P = X^2 - \delta$, on montre en **II.B** par des opérations élémentaires que $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière. Ce dernier résultat est en fait à peu de choses près une reformulation d'un théorème de finitude dû à Lagrange : l'ensemble des classes de formes quadratiques binaires entières de discriminant $d \in \mathbf{Z}^*$ fixé est fini.

Plus généralement, la restriction aux classes de similitude semi-simples permet de formuler un résultat de finitude. Notons comme dans l'énoncé $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ semi-simples, i.e diagonalisables sur $\mathbf{C}$ (ou sur $\overline{\mathbb{Q}}$). L'ensemble $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ n'est pas vide et on a le :

Théorème 3. (i) L'ensemble $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entières.

(ii) Si les racines de P dans $\mathbf{C}$ sont simples, $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entières.

Ce théorème, établi dans la partie **III** du texte, est le résultat essentiel du sujet. Il est implicite dans l'article [5] de Latimer et Mac-Duffee. Le second point est conséquence immédiate du premier ; sous l'hypothèse de (ii), on a en effet :

$$\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P) = \mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P).$$

La sous-partie **III.A** rassemble quelques généralités relatives aux groupes abéliens libres de type fini. La suite du sujet est consacrée à la preuve du premier énoncé du théorème 3. Elle se décompose en deux étapes.

On commence par supposer P irréductible. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est, comme l'a observé Olga Taussky, en bijection avec l'ensemble des “classes d'idéaux" de l'anneau $\mathbf{Z}[X]/P$; la démonstration de ce fait, suivant [7], est proposée dans la partie **III.C**. Or, si R est un ordre d'un corps de nombres, l'ensemble des classes d'idéaux de R est fini, d'où le résultat puisque $\mathbf{Z}[X]/P$ est un ordre du corps de nombres $\mathbb{Q}[X]/P$. Ce résultat classique de théorie algébrique des nombres est établi, pour l'ordre $\mathbf{Z}[X]/P$, dans la partie **III.B**.

Le cas général est traité dans **III.D**. On part des deux remarques suivantes.

(i) Si $P = QR$ avec Q et R dans $\mathbf{Z}[X]$ unitaires non constants et Q irréductible, toute matrice de $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ est semblable sur $\mathbf{Z}$ à une matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

avec A dans $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(Q)$, A' dans $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(R)$. Ce fait résulte d'une observation simple : si V est un sous-espace de $\mathbb{Q}^n$, il existe un sous-groupe Γ de $V \cap \mathbf{Z}^n$ engendrant le $\mathbb{Q}$-espace V et facteur direct dans $\mathbf{Z}^n$.

(ii) Si A est dans $\mathscr{M}_m(\mathbf{Z})$ et A' dans $\mathscr{M}_{n-m}(\mathbf{Z})$ l'ensemble :

$$\Gamma_{A,A'} = \{AX - XA' \; ; \; X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z})\}$$

est un sous-groupe d'indice fini du groupe $\Gamma'_{A,A'}$ des matrices de $\mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z})$ de la forme : $AX - XA'$ pour X dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbb{Q})$. En effet, $\Gamma'_{A,A'}$ est un g.a.l.f et $\Gamma_{A,A'}$ en est un sous-groupe de rang maximal.

Raisonnons alors par récurrence et notons $A_1, \dots, A_r$ (resp. $A'_1, \dots, A'_s$) un système fini de représentants de $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(Q)$ (resp. $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(R)$) pour la similitude entière. Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant s$, $B_1, \dots, B_{t_{i,j}}$ un système fini de représentants de Γ'_{A_i,A'_j} modulo Γ_{A_i,A'_j}. En utilisant le théorème 1, on montre alors que toute matrice de $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est semblable sur $\mathbf{Z}$ à une des :

$$\begin{pmatrix} A_i & B_k \\ 0 & A'_j \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est réunion finie de classes de similitude entière.

La première assertion du théorème 3 est en fait un cas particulier d'un énoncé de Zassenhauss concernant les représentations entières d'algèbres semi-simples que l'on trouvera dans [1] ou [3]. On peut également déduire cette assertion d'un résultat de Borel et et Harish-Chandra : cf [2], paragraphes 6.4 et 9.11.

Terminons en suggérant au lecteur les deux exercices suivants.

1. Si $0 \leqslant k \leqslant n$ et $P = X^k(X-1)^{n-k}$, montrer que $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ est une classe de similitude entière.

2. Si $0 \leqslant k \leqslant n$ et $P = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$, dénombrer les classes de similitude entière contenues dans $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$.

Bibliographie

[1] J.M. ARNAUDIES, J. BERTIN, *Groupes, Algèbres et Géométrie, tome 2*, Ellipses, 1995

[2] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, 1969

[3] C.W. CURTIS, I.REINER, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley, 1962

[4] R.A. HORN, C.R. JOHNSON, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, 1991

[5] C.G. LATIMER, C.C. MACDUFFEE, *A correspondence between classes of ideals and classes of matrices*, Annals of Maths, vol 34, 1933

[6] W. ROTH, *The Equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in Matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 3, 1952

[7] O. TAUSSKY, *On a theorem of Latimer and MacDuffee*, Canad. J. Math, vol 1, 1949

Corrigé du problème

Partie I

I.A.1. a) Si $a \neq c$, M admet deux valeurs propres distinctes a et b et est donc diagonalisable (un endomorphisme d'un espace de dimension m possédant m valeurs propres distinctes est diagonalisable).

Si $a = c$, la seule valeur propre de M est a. Donc M est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_2, i.e égale à aI_2 i.e si et seulement si $b = 0$.

b) Il suffit de considérer J_0 et J_1 où :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices J_a ont bien X^2 pour polynôme caractéristique et la classe de similitude de J_0 est réduite à J_0 donc ne contient pas J_1. On peut également utiliser a) en remarquant que J_1 n'est pas diagonalisable.

c) Puisque A et B sont diagonalisables, donc en particulier trigonalisables, sur K, le polynôme caractéristique commun de A et B est scindé sur K. Notons le :

$$\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

où les λ_i sont des éléments de K deux à deux distincts et les n_i des éléments de $\mathbf{N}^*$. Puisque A (resp. B) est diagonalisable, l'espace propre de A (resp. B) associé à λ_i est, pour tout i, de dimension égale à n_i. Les matrices A et B sont donc semblables à une même matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\lambda_1, \dots \lambda_r$, chaque λ_i étant répété n_i fois ; le résultat suit.

I.A.2. a) C'est le calcul classique du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Il peut se mener en raisonnant par récurrence en développant par rapport à la première colonne. On peut aussi procéder de la façon suivante. Notant f l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à $C(P)$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n, on a :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad e_{i+1} = f^{(i)}(e_1),$$

de sorte que $(f^{(i)}(e_1))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est libre et que le polynôme minimal ponctuel de f relatif à e_1 est de degré supérieur ou égal à n. La lecture de la dernière colonne de $C(P)$ nous dit d'autre part que $P(f)(e_1) = 0$. Le polynôme minimal ponctuel de f relativement à e_1 est donc P. Or, ce polynôme divise le polynôme minimal de f, donc (théorème de Cayley-Hamilton) le polynôme caractéristique de f, c'est-à-dire $\chi_{C(P)}$. Par égalité des degrés on obtient l'égalité désirée.

b) La matrice extraite de $M - \lambda I_n$ en ôtant à cette dernière la première ligne et la dernière colonne est trivialement inversible (triangulaire supérieure à termes diagonaux égaux à 1), d'où le résultat.

c) Si P est simplement scindé sur K, toutes les matrices de $\mathscr{E}_K(P)$ ont leur polynôme caractéristique simplement scindé sur K et sont donc diagonalisables sur K, les espaces propres étant de dimension 1, d'où $(i) \Rightarrow (ii)$.

L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est immédiate car $C(P)$ appartient à $\mathscr{E}_K(P)$.

Enfin, la question b) montre que les éventuels espaces propres de $C(P)$ sont de dimension 1. La diagonalisabilité de $C(P)$ sur K implique donc que cette matrice a n valeurs propres distinctes dans K, c'est-à-dire que $P = \chi_{C(P)}$ est simplement scindé sur K. C'est dire que $(iii) \Rightarrow (i)$.

I.A.3. Pour P dans $K[X]$, on a :

$$P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline 0 & P(A') \end{array}\right).$$

Le polynôme minimal de M est donc égal au ppcm des polynômes minimaux de A et A'. Il est donc simplement scindé sur K si et seulement si ces derniers le sont également. Comme une matrice de $\mathscr{M}_n(K)$ est diagonalisable sur K si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé sur K, on en déduit le résultat.

Variante. Raisonnant géométriquement, un sens est immédiat : si les restrictions d'un endomorphisme f de E à deux sous-espaces stables et supplémentaires sont diagonalisables, f l'est aussi (on obtient une base propre de f en concaténant des bases propres des restrictions). L'autre sens se déduit de la diagonalisabilité de la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable.

I.A.4. Si M est semblable à une matrice diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant $C(P_1),\dots,C(P_r)$, le polynôme caractéristique de M est, grâce au calcul du déterminant d'une matrice diagonale par blocs et à la question 1.a), égal à : $\prod_{i=1}^r P_i$. On a en particulier $r \leqslant n$. Il résulte alors du résultat rappelé ("invariants de similitude") que l'on dipose d'une surjection de l'ensemble des listes $(P_1,\dots,P_r)$ de longueur $\leqslant n$ de polynômes unitaires non constants tels que $\prod_{i=1}^r P_i = P$ dans celui des classes de similitude de $\mathscr{E}_K(P)$. La factorialité de $K[X]$ montre que P n'admet qu'un nombre fini de diviseurs unitaires dans $K[X]$; le premier ensemble est donc fini.

I.B.1. Ecrivons $P = (X-a)Q$ avec Q dans $K[X]$. Alors :

$$P' = (X-a)Q' + Q, \quad P'(a) = Q(a).$$

Or a est racine simple de P si et seulement si $X-a$ ne divise pas Q, i.e si $Q(a) \neq 0$, i.e si $P'(a) \neq 0$.

En caractéristique nulle, on dispose d'un résultat plus précis : la multiplicité de la racine a de P est le plus petit j tel que $P^{(j)}(a) \neq 0$. Ce résultat ne subsiste évidemment pas en caractéristique p (les éléments de $K[X^p]$ ont alors une dérivée nulle).

I.B.2. Comme P n'est pas constant et $\mathbb{Q}$ est de caractéristique nulle, P' n'est pas nul. Puisque P est irréductible et P' est non nul et de degré strictement inférieur au degré de P, P et P' sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$. Or le p.g.c.d de deux polynômes ne dépend pas du corps de base (conséquence, par exemple, de l'algorithme d'Euclide) ; on en déduit que les racines complexes de P sont simples.

On peut aussi, après les deux premières phrases, écrire une relation de Bezout dans $\mathbb{Q}[X]$ et conclure.

I.B.3. Posons : $P = QR$ où Q et R sont dans $\mathbb{Q}[X]$ et unitaires. Choisissons a et b dans $\mathbf{N}^*$ tels que aQ et bR appartiennent à $\mathbf{Z}[X]$. On a ainsi, compte-tenu du lemme de Gauss rappelé dans l'énoncé :

$$abP = (aQ)(bR) \; ; \quad ab = c(aQ)c(bR).$$

Par suite :

$$P = \frac{aQ}{c(aQ)}\frac{bR}{c(bR)}.$$

Les deux polynômes du membre de droite sont dans $\mathbf{Z}[X]$, de coefficients dominants > 0. Leur produit P est unitaire et chacun d'eux est donc unitaire. En particulier, $\dfrac{aQ}{c(aQ)}$ est un élément unitaire de $\mathbf{Z}[X]$. Mais ce polynôme est produit du polynôme unitaire Q par le rationnel $\dfrac{a}{c(aQ)}$, ce qui impose $a = c(aQ)$, d'où l'appartenance de $Q = \dfrac{aQ}{c(aQ)}$ à $\mathbf{Z}[X]$.

I.B.4. Si P est irréductible sur $\mathbb{Q}$, la matrice $C(P)$ appartient à $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$ grâce à **I.A.2.**c) et **I.B.2**.

Dans le cas général, décomposons P en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{Q}[X]$:

$$P = \prod_{i=1}^r P_i.$$

Grâce à **I.B.3**, les P_i sont dans $\mathbf{Z}[X]$. La matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $C(P_1),\dots,C(P_r)$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ (grâce à **I.A.3**) et appartient donc à $\mathscr{D}_{\mathbf{Z}}(P)$.

I.C.1. La matrice X est dans Ker $\Phi_{U,V}$ si et seulement si : $UX = XQUQ^{-1}$, i.e si et seulement si XQ est dans Ker $\Phi_{U,U}$. Or, Q étant inversible,

$$X \mapsto XQ$$

est un automorphisme du K-espace $\mathscr{M}_n(K)$, d'où le résultat.

I.C.2. D'abord, P est inversible d'inverse :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_m & -Y \\ \hline O & I_{n-m} \end{array}\right).$$

Un calcul par blocs montre que $P^{-1}NP$ n'est autre que la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & AY-YA' \\ \hline O & A' \end{array}\right).$$

La seconde partie de la question est alors évidente.

I.C.3.a) Adoptons les notations de l'énoncé. La matrice $\Phi_{M,N}(X)$ n'est autre que :

$$\left(\begin{array}{c|c} AX_{1,1}-X_{1,1}A+BX_{2,1} & AX_{1,2}-X_{1,2}A'+BX_{2,2} \\ \hline A'X_{2,1}-X_{2,1}A & A'X_{2,2}-X_{2,2}A' \end{array}\right).$$

La matrice $\Phi_{N,N}(X)$ s'en déduit en substituant 0 à B.

On voit ainsi que si $X_{2,1}$ et $X_{2,2}$ sont nulles, on a :

$$X \in \text{Ker}\,\Phi_{M,N} \Leftrightarrow X \in \text{Ker}\,\Phi_{N,N},$$

ce qui donne la première des deux relations.

D'autre part, l'élément $(X_{2,1}, X_{2,2})$ de $\mathscr{M}_{n-m,m}(K)\times\mathscr{M}_{n-m}(K)$ est dans $\tau(\text{Ker}\,\Phi_{M,N})$ si et seulement si :

$$A'X_{2,1} = X_{2,1}A, \quad A'X_{2,2} = X_{2,2}A'$$

et s'il existe $X_{1,1}$ dans $\mathscr{M}_m(K)$ et $X_{1,2}$ dans $\mathscr{M}_{m,n-m}(K)$ telles que :

$$AX_{1,1}-X_{1,1}A = -BX_{2,1}, \quad AX_{1,2}-X_{1,2}A' = -BX_{2,2}.$$

Dans le cas $M = N$, i.e $B = 0$, le second groupe de conditions est vide comme on le voit en prenant $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ nulles. Ceci prouve la seconde des relations demandées.

I.C.3.b) L'application du théorème du rang aux restrictions de τ aux noyaux de $\Phi_{M,N}$ et $\Phi_{N,N}$ entraîne :

$$\dim\,(\text{Ker}\,\Phi_{M,N}) = \dim\,(\tau(\text{Ker}\,\Phi_{M,N})) + \dim\,(\text{Ker}\,\tau\cap\text{Ker}\,\Phi_{M,N})$$

ainsi que la relation analogue pour $\Phi_{N,N}$. En utilisant **I.C.1**, il s'ensuit que les images des noyaux de $\Phi_{M,N}$ et $\Phi_{N,N}$ par τ ont même dimension, donc sont égales au vu de l'inclusion obtenue dans la question précédente.

I.C.3.c) La matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-m} \end{array}\right)$$

appartient à Ker $\Phi_{N,N}$, ce qui entraîne que

$$(0, -I_{n-m})$$

appartient à τ(Ker $\Phi_{N,N}$) c'est-à-dire à τ(Ker $\Phi_{M,N}$) ; ceci donne l'existence de Y.

I.C.4. Supposons A et A' diagonalisables sur K, R de la forme $AY - YA'$. La question **I.C.2** dit que M est semblable sur K à N, tandis que la question **I.A.3** assure que N est diagonalisable sur K. Il s'ensuit que M est diagonalisable sur K.

Réciproquement, supposons M diagonalisable sur K. L'argument de polynôme annulateur utilisé en **I.A.3** montre que A et A' sont diagonalisables sur K. Les matrices M et N sont alors toutes deux diagonalisables sur K et ont même polynôme caractéristique, donc sont semblables par **I.A.1.**c). La question **I.C.3**c) garantit alors que B est de la forme $AY - YA'$.

Partie II

II.A.1. Si M est dans $GL_n(A)$ d'inverse M^{-1}, les déterminants de M et M^{-1} sont éléments de A et leur produit vaut 1. Ces deux déterminants sont donc des inversibles de A. La réciproque se déduit du calcul de l'inverse à l'aide de la comatrice :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,{}^t(\mathrm{com}\,(M))$$

et du fait que les cofacteurs de M appartiennent à l'anneau A comme déterminants de matrices à coefficients dans A.

Si $A = \mathbf{Z}$, les inversibles de A sont 1 et -1 d'où la description de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ comme ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ de déterminant ± 1.

II.A.2. Il suffit d'observer que l'application $M \mapsto \overline{M}$ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$, ce qui implique que la réduction modulo p d'un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, et de réduire modulo p la relation :

$$B = PAP^{-1}.$$

II.A.3.a) La matrice S_1 a deux valeurs propres rationnelles 1 et -1. Puisqu'elle appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, elle est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$, les espaces propres étant des droites. Autrement dit, elle est semblable sur $\mathbb{Q}$ à S_0.

Pour le second point, on applique **II.A.2** avec $p = 2$: $\overline{S_0}$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2)$, donc sa classe de similitude sur $\mathbb{F}_2$ est réduite à elle -même, en particulier ne contient pas $\overline{S_1}$.

II.A.3.b) Par hypothèse, 1 est valeur propre de M ; on dispose donc d'un vecteur propre de M dans $\mathbb{Q}^2$. Multipliant ce vecteur par un entier convenable, on obtient un vecteur propre de M à coordonnées entières et premières entre elles.

II.A.3.c) Puisque x_1 et x_2 sont premiers entre eux, il existe (Bezout) y_1 et y_2 dans $\mathbf{Z}$ tels que $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ et $P^{-1}MP$ a pour première colonne ${}^t(1,0)$; puisque cette matrice a pour polynôme caractéristique $X^2 - 1$, elle est de la forme S_a avec a dans $\mathbf{Z}$.

II.A.3.d) Un calcul simple montre :

$$T_x S_a T_x^{-1} = T_x S_a T_{-x} = S_{a-2x}.$$

Il s'ensuit que toute matrice S_a avec a dans $\mathbf{Z}$ est semblable sur $\mathbf{Z}$ à S_0 ou S_1. Le résultat s'en déduit à l'aide de la question précédente.

II.B.1.a) Si M est dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{Z})$, $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)\,X + \det(M)$. La première assertion s'en déduit aussitôt.

Pour la seconde il suffit d'observer que puisque δ n'est pas un carré, $\delta - a^2$ n'est pas nul et donc b détermine c.

II.B.1.b) On établit que $M_{(a,-b)}$, $M_{(a+\lambda b,b)}$ et $M_{(-a,(\delta-a^2)/b)}$ sont semblables sur $\mathbf{Z}$ à $M_{(a,b)}$ en choisissant les matrices de passage :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et en notant que $c = (\delta - a^2)/b$.

II.B.2.a) Posons $b = \beta(M)$ et choisissons λ dans $\mathbf{Z}$ tel que :

$$|a + \lambda b| \leqslant \beta(M)/2.$$

La matrice $M_{(a+\lambda b,b)}$ est semblable sur $\mathbf{Z}$ à M et vérifie la condition demandée.

II.B.2.b) Les résultats de **II.B.1.**b) montrent que $M_{(a,b)}$ et $M_{\left(a,\pm\frac{\delta-a^2}{b}\right)}$ sont semblables sur $\mathbf{Z}$. Le choix de $\beta(M)$ entraîne alors :

$$\beta(M) \leqslant \frac{|a^2-\delta|}{\beta(M)} \quad \text{i.e :} \quad \beta(M)^2 \leqslant |a^2 - \delta|.$$

Si $\delta < 0$, $|a^2 - \delta| = a^2 - \delta$ et l'inégalité demandée découle de : $a^2 \leqslant \beta(M)^2/4$.

Si $\delta > 0$, on a : $\delta \geqslant a^2$, sans quoi il viendrait :

$$a^2 - \delta \geqslant \beta(M)^2, \quad \text{et :} \quad \delta \leqslant a^2 - \beta(M)^2 \leqslant -\frac{3\beta(M)^2}{4} < 0.$$

L'inégalité voulue suit aussitôt.

II.B.2.c) Toute classe de similitude entière contenue dans $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ contient donc une matrice $M_{(a,b)}$ telle que :

$$|a| \leqslant b/2 \leqslant \sqrt{\delta}/2 \quad \text{si} \quad \delta > 0,$$

$$|a| \leqslant b/2 \leqslant \sqrt{|\delta|/3} \quad \text{si} \quad \delta < 0.$$

Dans chaque cas, l'ensemble des couples (a, b) possibles est fini, d'où le résultat.

II.C.1.a) Puisque P et P' sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$, donc dans $\mathbb{Q}[X]$ (argument de **I.B.2**), on peut écrire une relation de Bezout entre P et P' dans $\mathbb{Q}[X]$. Multipliant cette relation par un entier relatif non nul convenable de façon à “chasser les dénominateurs" et obtenir un résultat > 0, on obtient une égalité de la forme demandée par l'énoncé.

II.C.1.b) Il suffit de réduire modulo p la relation obtenue dans la question précédente et d'utiliser **I.B.1**.

II.C.2.a) Notons Π_M le polynôme minimal de M (qui est le même vu sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbb{Q}$ puisque le rang du système de matrices $(M^i)_{i\in\mathbf{N}}$ est indépendant du corps de base). Comme diviseur unitaire de χ_M (**I.B.3**), Π_M appartient à $\mathbf{Z}[X]$. Les racines de Π_M dans $\mathbf{C}$ sont simples (diagonalisabilité), d'où le résultat avec $P = \Pi_M$.

II.C.2.b) La question précédente permet d'appliquer **II.C.1** : il existe d_M dans $\mathbf{N}^*$ tel que, pour tout nombre premier p ne divisant pas d_M, la réduction de Π_M modulo p est à racines simples dans $\overline{\mathbb{F}_p}$. Mais la réduction modulo p de l'égalité $\Pi_M(M) = 0$ montre que $\overline{\Pi_M}$ annule $\overline{M}$, d'où la diagonalisabilité de $\overline{M}$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

II.D.1. Soient α dans $\mathbf{C}$ une racine de P de multiplicité $\geqslant 2$, Q le polynôme minimal unitaire de α sur $\mathbb{Q}$. Puisque α est racine simple de Q d'après **I.B.2**, Q divise P et P/Q dans $\mathbb{Q}[X]$, i.e Q^2 divise P dans $\mathbb{Q}[X]$. Mais grâce à **I.B.3**, Q et $P/Q^2 = R$ sont dans $\mathbf{Z}[X]$, d'où le résultat.

II.D.2. Par choix de p, la matrice E_p se réduit modulo p en une matrice diagonalisable sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Supposons par l'absurde E_p et E_q semblables sur $\mathbf{Z}$. Les réductions modulo p de E_p et E_q sont alors semblables sur $\mathbb{F}_p$ et la réduction de E_q modulo p est diagonalisable sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Grâce à **I.A.3**, il en va de même de la réduction modulo p de la matrice :

$$E'_q = \left(\begin{array}{c|c} A & qI_l \\ \hline O & A \end{array}\right).$$

Grâce à **I.C.4**, ceci implique que $\overline{qI_l}$ est de la forme $\overline{A}X - X\overline{A}$ avec X dans $\mathscr{M}_l(\overline{\mathbb{F}_p})$ et est donc de trace nulle. Ainsi p divise ql, contradiction.

Variante. Supposons la réduction modulo q de E_q sur $\mathbb{F}_p$ diagonalisable sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Soit Q dans $\overline{F_p}[X]$ annulant cette matrice. Un calcul explicite montre que Q et Q' annulent $\overline{A}$. Cette dernière matrice est diagonalisable sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Si λ est une valeur propre de $\overline{A}$ dans $\overline{\mathbb{F}_p}$, λ est racine de Q et Q'. Un annulateur de Q ne peut donc être simplement scindé sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, ce qui permet de conclure.

II.D.3. De la question précédente il découle en particulier que si les nombres premiers distincts p et q sont strictement supérieurs à d_A, d_B et l, les matrices E_p et E_q, qui appartiennent trivialement toutes deux à $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$, ne sont pas semblables sur $\mathbf{Z}$. Puisque l'ensemble des nombres premiers est infini, on obtient ainsi une infinité de matrices de $\mathscr{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ deux à deux non semblables sur $\mathbf{Z}$.

Partie III

III.A.1. Si $(f_1,\dots,f_n)$ est une $\mathbf{Z}$-base de Γ, on peut écrire les e_i comme combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires des f_j. On écrit, pour $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} f_j.$$

On en déduit que $QP = I_n$, donc que P appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

Réciproquement, si P appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, l'inversion du système montre que l'on peut écrire les e_i comme combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires des f_j. La famille $(f_1,\dots,f_n)$ engendre donc le g.a.l.t.f Γ. Cette famille est de plus trivialement $\mathbf{Z}$-libre (l'inversibilité de P dans $\mathbb{Q}$ suffit pour ce second point), d'où le résultat demandé.

III.A.2. Adoptons les notations du début de **III**. Alors le quotient Γ/Γ' est isomorphe à :

$$\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/d_s\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^{r-s}.$$

Il est fini si et seulement si $r = s$, ce qui est l'assertion demandée.

III.A.3. a) Soit a un élément non nul de I. Alors : $aR \subset I$ et R/I est un quotient de R/aR, de sorte qu'il suffit de prouver que R/aR est fini. Mais puisque l'anneau R est intègre, $x \mapsto ax$ est un isomorphisme de groupes abéliens de R sur aR, ce qui implique que aR est un g.a.l.t.f de même rang que R, d'où le résultat via la question précédente.

b) L'ensemble des idéaux de R contenant I est naturellement en bijection avec celui des idéaux du quotient R/I. Ce dernier ensemble, contenu dans $\mathscr{P}(R/I)$, est fini par a).

III.A.4. Le sous-groupe $V \cap \mathbf{Z}^n$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$, donc un g.a.l.t.f. Montrons que son rang est m. Puisque V est de dimension m, toute famille de cardinal $> m$ de $V \cap \mathbf{Z}^n$ est $\mathbb{Q}$-liée, donc $\mathbf{Z}$-liée. Le rang de $V \cap \mathbf{Z}^n$ est ainsi majoré par m. Si maintenant $(f_1, \ldots, f_m)$ est une $\mathbb{Q}$-base de V, il existe d dans $\mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \qquad d f_i \in \mathbf{Z}^n.$$

On a alors :

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{Z} d f_i \subset V \cap \mathbf{Z}^n,$$

d'où l'on déduit le résultat.

En appliquant le théorème de la base adaptée de l'énoncé, on obtient alors une $\mathbf{Z}$-base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{Z}^n$ et des éléments $d_1, \ldots, d_m$ de $\mathbf{N}^*$ tels que la famille $(d_1 e_1, \ldots, d_m e_m)$ soit une $\mathbf{Z}$-base de $V \cap \mathbf{Z}^n$. En particulier $(e_1, \ldots, e_m)$ est une $\mathbb{Q}$-base de V.

III.B.1. Décomposons les éléments x et y de $\mathbb{Q}[\alpha]$ sur la base $(\alpha^i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \alpha^i, \qquad y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \alpha^i,$$

avec $(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1})$ dans $\mathbb{Q}^{2n}$. Alors :

$$xy = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} x_i y_j \alpha^{i+j}.$$

D'autre part, par définition de $\mathcal{N}$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{Q}[\alpha]^2, \qquad \mathcal{N}(u+v) \leqslant \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v),$$

$$\forall (x, u) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\alpha], \qquad \mathcal{N}(xu) = |x| \mathcal{N}(u).$$

Donc : $\mathcal{N}(xy) \leqslant C \mathcal{N}(x)\, \mathcal{N}(y)$ où :

$$C = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} \mathcal{N}(\alpha^{i+j}).$$

III.B.2. On découpe le cube $[0,1[^n$ en les M^n sous-cubes

$$C_{a_1,\ldots,a_n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\frac{a_k}{M}, \frac{a_k+1}{M} \right[, \qquad (a_0, \ldots a_{n-1}) \in \{0, \ldots M\}^n.$$

Si $a_1, \ldots a_{M^n+1}$ sont M^n+1 points distincts de $[0,1]^n$, le principe des tiroirs assure l'existence de i et j distincts dans $\{1, \ldots M^n+1\}$ tels que a_i et a_j appartiennent au même $C_{a_1,\ldots,a_n}$.

Identifiant $\mathbb{Q}[\alpha]$ et $\mathbb{Q}^n$ par le choix de la base $(\alpha^i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$, on obtient i et j tels que $0 \leqslant i < j \leqslant M^n$ tels que $\mathcal{N}(u_i - u_j) \leqslant \frac{1}{M}$. Mais $u_i - u_j$ s'écrit :

$$(j-i)y - a$$

pour un certain a dans $\mathbf{Z}[\alpha]$. Le résultat demandé suit en posant $m = j - i$.

III.B.3. a) On a donc :

$$\mathcal{N}\left(m\frac{x}{z} - a\right) \leqslant \frac{1}{M}$$

pour un certain m de $\{1, \ldots, M^n\}$ et un certain a de $\mathbf{Z}[\alpha]$, d'où, grâce à **III.B.1.** :

$$\mathcal{N}(mx - az) \leqslant C \mathcal{N}(z)/M,$$

et, enfin :

$$\mathcal{N}(mx - az) < \mathcal{N}(z).$$

Mais $mx - az$ est dans I car x et z y sont. Le choix de z force alors :

$$mx - az = 0, \quad \text{donc :} \quad mx \in z\mathbf{Z}[\alpha].$$

Puisque m est dans $\{1, \dots M^n\}$, il divise ℓ, et on a donc :

$$\ell x \in z\mathbf{Z}[\alpha].$$

Ceci est vrai pour tout x de I, c'est le résultat voulu.

b) Le résultat de a) assure que J est contenu dans $\mathbf{Z}[\alpha]$. Il est immédiat que J est un idéal de $\mathbf{Z}[\alpha]$. D'autre part, puisque z appartient à I, J contient $\ell\mathbf{Z}[\alpha]$.

Finalement, tout idéal non nul de $\mathbf{Z}[\alpha]$ est équivalent (pour $\sim$) à un idéal contenant $\ell\mathbf{Z}[\alpha]$. Comme $(\mathbf{Z}[\alpha], +)$ est trivialement un g.a.l.t.f (dont $(\alpha^i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est une $\mathbf{Z}$-base), la question **III.A.3.**b) montre que l'ensemble des idéaux de $\mathbf{Z}[\alpha]$ contenant $\ell\mathbf{Z}[\alpha]$ est fini, d'où la conclusion attendue.

La démonstration donne bien sûr la finitude du “class-number" pour tout ordre d'un corps de nombres.

III.C.1. a) Puisque α est racine de $P = \chi_M$, donc valeur propre de M, on obtient, en voyant M comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}[\alpha])$, l'existence de $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{Q}[\alpha]^n \setminus \{0\}$ tel que ${}^t x$ soit vecteur propre de M associé à α. Puisque tout élément de $\mathbb{Q}[\alpha]$ s'écrit r/m avec r dans $\mathbf{Z}[\alpha]$ et m dans $\mathbf{N}^*$, on en déduit que l'ensemble X_M n'est pas vide. L'irréductibilité de P et la question **I.B.2** montrent que α est racine simple de χ_M, donc que l'espace propre associé est une droite. On peut donc, si x et y sont dans X_M, écrire : $x = \lambda y$ avec λ dans $\mathbb{Q}[\alpha]^*$. Il suffit pour terminer d'écrire $\lambda = b/a$ avec a dans $\mathbf{N}^*$ (donc dans $\mathbf{Z}[\alpha] \setminus \{0\}$) et b dans $\mathbf{Z}[\alpha] \setminus \{0\}$.

b) Il suffit de montrer que (x) est stable par multiplication par α pour établir que (x) est un idéal de $\mathbf{Z}[\alpha]$. Mais puisque ${}^t x$ est vecteur propre de M associé à α, tout αx_j est combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire des x_i, d'où le résultat.

Par définition, $(x_1, \dots, x_n)$ engendre le g.a.l.t.f (x), lequel a, par **III.A.3**.a), le même rang que $\mathbf{Z}[\alpha]$, c'est-à-dire n. On en déduit aisément que $(x_1, \dots, x_n)$ est une $\mathbf{Z}$-base de (x).

Enfin, la deuxième partie de la question a) assure aussitôt que pour tout y de X_M, $(x) \sim (y)$.

III.C.2. a) On remonte l'argument de **III.C.1.**b). Si I est un idéal non nul de $\mathbf{Z}[\alpha]$, I est un g.a.l.t.f de rang n (**III.A.3.**a)). Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une $\mathbf{Z}$-base de I. Chaque αx_j est dans I, donc est combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire des x_i. Mais alors ${}^t x$ est vecteur propre associé à α d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Le polynôme caractéristique de cette matrice annule α, donc est divisible par P, donc lui est égal pour raison de degré. C'est dire que M est dans $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}}(P)$ et clairement $j(M)$ est la classe de I pour $\sim$.

b) Supposons : $M' = PMP^{-1}$ avec P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est dans X_M, et si $y = (y_1, \dots, y_n)$ est défini par :

$${}^t y = P\,{}^t x$$

alors y est dans $X_{M'}$. Chaque y_j est combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire des x_i ; en utilisant P^{-1} on voit réciproquement que chaque x_j est combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire des y_i. Par suite : $(x) = (y)$ et : $j(M) = j(M')$.

Supposons réciproquement $j(M) = j(M')$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans X_M et $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ dans $X_{M'}$. Les idéaux (x) et (x') sont équivalents et on peut donc, quitte à multiplier x et x' par des éléments non nuls de $\mathbf{Z}[\alpha]$, supposer : $(x) = (x')$. Cela étant, $(x_1, \dots x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont deux $\mathbf{Z}$-bases d'un même idéal, donc se déduisent l'une de l'autre par un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$:

$$P\,{}^t x = {}^t x', \text{avec} \quad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}).$$

On voit alors que les deux matrices M' et $M'' = PMP^{-1}$ admettent toutes deux ${}^t x'$ pour vecteur propre associé à α. Ces deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$, ceci implique qu'elles sont égales. Il suffit en effet d'expliciter coordonnée par coordonnée la relation :

$$M'({}^t x') = M''({}^t x'),$$

pour conclure en utilisant l'appartenance à $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ et la $\mathbf{Z}$-liberté de $(x'_1,\dots,x'_n)$.

III.D.1. Observons d'abord que $Q(M)$ n'est pas inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$: en effet, les racines de Q dans $\mathbf{C}$ sont racines de P donc valeurs propres de M. Une trigonalisation dans $\mathbf{C}$ permet alors de conclure.

Il s'ensuit que le sous-espace U de $\mathbb{Q}^n$ noyau de $Q(M)$ n'est pas nul. Soit donc v dans $U\backslash\{0\}$. Alors $(M^i(v))_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ est $\mathbb{Q}$-libre (grâce à l'irréductibilité de Q). Si V est le sous-espace de U, engendré par cette famille, V est de dimension m et stable par M. Le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice-compagnon effectué dans la question **I.A.2.**a) montre que $\chi_{M|V} = Q$.

En choisissant une $\mathbf{Z}$-base de $\mathbf{Z}^n$ adaptée à V au sens de la question **III.A.4**, on voit alors que M est semblable sur $\mathbf{Z}$ à une matrice :

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & A' \end{array}\right)$$

où $\chi_A = Q$, et donc nécessairement $\chi_{A'} = P/Q$. D'autre part, les matrices A et A' sont diagonalisables sur $\mathbf{C}$ (**I.C.4**), d'où l'existence de P dans $\mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ et de i dans $\{1,\dots,r\}$ tels que $PAP^{-1} = A_i$, de Q dans $\mathrm{GL}_{n-m}(\mathbf{Z})$ et de j dans $\{1,\dots,s\}$ tels que $QA'Q^{-1} = A'_j$. Soit :

$$R = \left(\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline O & Q \end{array}\right),$$

alors R est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ et $RM'R^{-1}$ est de la forme demandée par l'énoncé.

III.D.2. Il est clair que :

$$\Gamma = \{A_i X - XA'_j\ ;\ X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbb{Q})\} \cap \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z})$$

et :

$$\Gamma' = \{A_i X - XA'_j\ ;\ X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z})\}$$

sont deux sous-groupes du g.a.l.t.f $\mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbf{Z})$ et que Γ contient Γ'. Si Y est un élément du premier de ces groupes, il existe d dans $\mathbf{N}^*$ tel que dY appartienne au second (il suffit de “chasser les dénominateurs"). On en déduit aisément l'assertion désirée.

III.D.3. Grâce à **III.A.2**, Γ/Γ' est fini. Soient $t_{i,j}$ le cardinal du groupe quotient, $B_1,\dots,B_{t_{i,j}}$ un système fondamental de représentants du quotient Γ/Γ'.

Grâce à **I.C.4** et à la diagonalisabilité de M sur $\mathbf{C}$, la matrice B appartient à :

$$\{A_i X - XA'_j\ ;\ X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})\}.$$

Elle appartient en fait à :

$$\{A_i X - XA'_j\ ;\ X \in \mathscr{M}_{m,n-m}(\mathbb{Q})\}$$

en vertu du résultat général suivant : si un système linéaire non homogène à coefficients dans un corps K à une solution dont les coordonnées appartiennent à une extension L de K, il a une solution dont les coordonnées appartiennent à K. Ce résultat est lui-même conséquence (entre autres) de la détermination du rang d'une matrice par les déterminants extraits.

Cela étant, le calcul de **I.C.2** montre que la matrice M est semblable sur $\mathbf{Z}$ à une matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_i & B_k \\ \hline O & A'_j \end{array}\right).$$

Ceci achève la preuve du théorème.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

RAPPELS ET NOTATIONS.

L'objet de ce problème est d'étudier les applications Lipschitziennes, non linéaires en général, entre espaces vectoriels normés. Le problème est divisé en six parties. Les quatre premières parties sont indépendantes.

- Dans tout le problème, on considère des **R**- espaces vectoriels normés, dont la norme sera notée $\| \,.\, \|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. La droite réelle **R** sera toujours munie de la valeur absolue $|\,.\,|$.

- Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés et $f : X \to Y$ est linéaire continue, on note

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

On dit que $\Phi : X \to Y$ est une isométrie si $\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$ pour tout couple $(x_1, x_2) \in X^2$. On notera qu'une telle isométrie n'est pas nécessairement linéaire.

- Soit M un nombre réel positif. Une application $F : X \to Y$ est dite M-Lipschitzienne si

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant M\|x_1 - x_2\|$$

pour tout couple $(x_1, x_2) \in X^2$. Une application Lipschitzienne est une application qui, pour un certain $M \geqslant 0$, est M-Lipschitzienne.

- Un espace normé X est dit séparable s'il contient une suite dense, ou en d'autres termes une partie dénombrable dense.

- Pour tout espace normé X, on note X^* l'espace dual de X, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues de X dans **R**. Pour tout couple $(x^*, x) \in X^* \times X$, on note $x^*(x) = < x^*, x >$. Conformément aux notations ci-dessus, on note

$$\|x^*\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|< x^*, x >|}{\|x\|}.$$

On rappelle que l'espace dual X^* muni de cette norme est un espace de Banach. On notera simplement X^{**} l'espace $(X^*)^*$.

- L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace normé X sera noté $vect[A]$, et sa fermeture sera notée $\overline{vect}[A]$.

- Soit C une partie convexe d'un **R**-espace vectoriel X. On dit que $g : C \to \mathbf{R}$ est convexe si pour tous $(t_1, t_2, ..., t_n, x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]^n \times C^n$ tels que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$, on a

$$g(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i).$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit sur $\mathbf{R}^n$ la norme $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

- Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $x \in \Omega$ et $g : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable en x. On note $\{\nabla g\}(x)$ la différentielle de g au point x. Cette différentielle $\{\nabla g\}(x)$ est donc une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$.

- On rappelle le lemme de Baire : si P est un espace métrique complet et si pour tout entier $j \geqslant 1$, V_j est un sous-ensemble ouvert et dense de P, alors l'ensemble $\bigcap_{j \geqslant 1} V_j$ est dense dans P.

- On rappelle enfin que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

.

I. PRÉLIMINAIRES

1. Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application M-Lipschitzienne. Montrer qu'il existe une unique application M-Lipschitzienne $\tilde{f} : E \to F$ telle que pour tout $a \in A$, on ait $\tilde{f}(a) = f(a)$ (pour $x \in E$, on pourra considérer une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers x, et montrer que la suite $(f(a_n))$ est de Cauchy).

2. Soit $n \geqslant 1$. On définit $\gamma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = exp(-\pi(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)).$$

a. Montrer que γ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$ et que l'on a pour tout entier $p \geqslant 1$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \gamma(u_1, u_2, ..., u_n) du_1 du_2 ... du_n = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1, pt_2, ..., pt_n) dt_1 dt_2 ... dt_n = 1.$$

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction Lipschitzienne. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose

$$g_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1, pt_2, ..., pt_n) f(x_1 - t_1, x_2 - t_2, ..., x_n - t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n.$$

b. Montrer que la fonction g_p est bien définie pour tout $p \geqslant 1$, et que la suite de fonctions $(g_p)_{p \geqslant 1}$ converge vers f uniformément sur $\mathbf{R}^n$.

c. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, la fonction g_p est continûment différentiable sur $\mathbf{R}^n$ (on pourra effectuer le changement de variable $v_1 = x_1 - t_1, ..., v_n = x_n - t_n$).

d. Soit E un espace normé de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On désigne par $Lip_0(E)$ l'espace des fonctions Lipschitziennes f de E dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0)=0$. Pour $f \in Lip_0(E)$, on pose

$$\|f\|_L = sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}\ ;\ (x,y)\in E^2,\ x\neq y\}.$$

Montrer que pour toute fonction $f \in Lip_0(E)$, il existe une suite $(h_p)_{p\geqslant 1} \subset Lip_0(E)$ de fonctions continûment différentiables sur E telles que $\|h_p\|_L \leqslant \|f\|_L$ pour tout p, et telles que la suite $(h_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers f uniformément sur E.

II. ISOMÉTRIES ET LINÉARITÉ.

1. On munit dans cette question seulement l'espace $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$. Soit

$$f : (\mathbf{R}, |\ .\ |) \to (\mathbf{R}^2, \|\ .\|_\infty)$$

définie par $f(t) = (t, \sin(t))$. Montrer que f est une isométrie non linéaire.

2. Soit $\mathscr{H}$ un espace préhilbertien, dont la norme est notée $\|\ .\ \|_2$.

a. Soient x et y deux points de $\mathscr{H}$ et $t \in]0,1[$ tels que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|tx+(1-t)y\|_2$. Montrer qu'alors $x = y$.

b. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de $\mathscr{H}$ tels que $x_1 = x_2 + x_3$ et $\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2$. Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $x_2 = \lambda x_1$ (on pourra se ramener au cas où les (x_i) sont non nuls et considérer les vecteurs normalisés $((\|x_i\|_2^{-1} x_i))$.

c. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathscr{H}$ une isométrie telle que $\varphi(0) = 0$. Établir que $\varphi(t) = t\varphi(1)$ pour tout $t \geqslant 0$.

d. Soit Y un espace normé, et $\phi : Y \to \mathscr{H}$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que pour tout couple de vecteurs (x,y) dans Y et tout $t \geqslant 0$, on a $\phi(x+ty) = (1-t)\phi(x) + t\phi(x+y)$.

e. Montrer que ϕ est une application linéaire de Y dans $\mathscr{H}$.

III. DUALITÉ DES ESPACES NORMÉS

1. Soit X un espace normé, H un hyperplan de X, et $u \in X\backslash H$. Soit $h^* \in H^*$ de norme égale à 1. Montrer que

$$\sup_{h_1\in H} [< h^*, h_1 > - \|h_1 - u\|] \leqslant \inf_{h_2 \in H} [< h^*, h_2 > + \|h_2 - u\|].$$

2. Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\sup_{h_1\in H} [< h^*, h_1 > - \|h_1 - u\|] \leqslant a \leqslant \inf_{h_2 \in H} [< h^*, h_2 > + \|h_2 - u\|].$$

a. On définit $x^* : X \to \mathbf{R}$ comme suit : pour tout $(h,t) \in H \times \mathbf{R}$, $< x^*, h+tu >=< h^*, h > +ta$. Montrer que $x^* \in X^*$ et que $\|x^*\| = 1$.

b. Soit E un espace normé de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que pour tout $x^* \in F^*$, il existe $y^* \in E^*$ tel que $\|y^*\| = \|x^*\|$ et tel que $< y^*, x >=< x^*, x >$ pour tout $x \in F$.

Dans toute la suite de cette partie, X désignera un espace normé de dimension infinie, supposé séparable. On notera $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dense dans X.

3. Soit $x \in X$.

a. Montrer qu'il existe une suite croissante $(E_k)_{k\geqslant 0}$ de sous-espaces de dimension finie de X tels que $x \in E_0$ et tels que la réunion $V = \bigcup_{k\geqslant 0} E_k$ soit dense dans X.

b. Montrer qu'il existe $v^* \in V^*$ de norme 1 tel que $< v^*, x >= \|x\|$ (on pourra utiliser le III.2.b)).

c. Montrer qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x^*, x >= \|x\|$.

4. Soit $J_X : X \to X^{**}$ définie pour tout $(x, x^*) \in X \times X^*$ par $< J_X(x), x^* >=< x^*, x >$. Montrer que J_X est une isométrie linéaire.

5. a. Soit $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ une suite de X^* telle que $\|x_n^*\| \leqslant 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une sous-suite $(x^*_{\phi(n)})$ de (x_n^*) telle que

$$\lim_{n\to\infty} < x^*_{\phi(n)}, x_k >$$

existe pour tout $k \geqslant 1$.

b. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} < x^*_{\phi(n)}, z >$$

existe pour tout $z \in X$.

c. On pose $< x^*, z >= \lim_{n\to\infty} < x^*_{\phi(n)}, z >$. Montrer que l'application x^* ainsi définie est une forme linéaire et que $\|x^*\| \leqslant 1$.

6. Soit $j : \mathbf{R} \to X$ une isométrie telle que $j(0) = 0$.

a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $x_k^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x_k^*, j(k) - j(-k) >= 2k$.

b. Montrer que $< x_k^*, j(t) >= t$ pour tout $t \in [-k, k]$.

c. En déduire qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $< x^*, j(t) >= t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

IV. DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS CONVEXES

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a. Soient $a < b < c$ trois nombres réels. Montrer que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

b. Établir que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la dérivée à gauche $f'_g(x)$ et la dérivée à droite $f'_d(x)$ de f en x existent, que $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$, et que si $x_1 < x_2$, on a

$$f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_g(x_2).$$

c. Montrer que f est continue, et que le sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathbf{R}$ constitué des points où f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable (on vérifiera l'existence de $\psi : \mathscr{S} \to \mathbf{Q}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{S},\ \psi(x) \in]f'_g(x), f'_d(x)[$).

d. Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit $\tau : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ par

$$\tau(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]/t.$$

Montrer que τ est impaire et croissante sur $\mathbf{R}^*$, puis que f est dérivable en x si et seulement si

$$\lim_{t \to 0^+} \tau(t) = 0.$$

2. Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ tel que $(-x) \in C$ pour tout $x \in C$, et $F : C \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. On suppose que $F(0) = 0$ et que F est majorée sur C. Montrer que

$$\sup_{x \in C} F(x) = \sup_{x \in C} |F(x)|.$$

3. Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

a. Soient $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbf{R}^n$ et $\alpha > 0$.

On note $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{\|h\|_1 \leqslant \alpha} g(x+h) - g(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, |\varepsilon| = 1} g(x + \varepsilon \alpha e_i) - g(x).$$

b. Montrer que g est continue en tout point x de $\mathbf{R}^n$.

4. Soient $k \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $t > 0$. On pose

$$O_{k,i}(t) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \ ; \ \frac{g(x + te_i) + g(x - te_i) - 2g(x)}{t} < \frac{1}{k} \right\}$$

et

$$V_{k,i} = \bigcup_{t > 0} O_{k,i}(t).$$

a. Montrer que l'ensemble $V_{k,i}$ est ouvert.

b. Soit

$$\Delta_i = \bigcap_{k \geqslant 1} V_{k,i}.$$

Montrer que $\Delta_i = \{x \in \mathbf{R}^n \ ; \ \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe}\}$.

c. Montrer que Δ_i est dense dans $\mathbf{R}^n$ (on pourra utiliser la Question IV.1.c).

5. Montrer que l'ensemble

$$\Omega_g = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta_i$$

est dense dans $\mathbf{R}^n$ (on remarquera que chaque ensemble Δ_i est une intersection dénombrable d'ouverts).

6. Soit $x \in \Omega_g$. On définit la fonction G par $G(y) = g(y) - g(x) - \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)$.

a. Montrer que pour tout $h \in \mathbf{R}^n$,

$$|G(x+h)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n, |\varepsilon|=1} G(x+\varepsilon\|h\|_1 e_i).$$

b. En déduire que Ω_g est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ en lesquels la fonction g est différentiable.

7. Soit $\| \,.\, \|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$.

a. Justifier que $\| \,.\, \|$ est convexe, que $0 \notin \Omega_{\| \,.\, \|}$, que pour tout $x \in \Omega_{\| \,.\, \|}$ et tout $t > 0$, on a $tx \in \Omega_{\| \,.\, \|}$ et que $\{\nabla\| \,.\, \|\}(tx) = \{\nabla\| \,.\, \|\}(x)$.

b. Montrer que pour tout $x \in \Omega_{\| \,.\, \|}$, on a $\|\{\nabla\| \,.\, \|\}(x)\| =< \{\nabla\| \,.\, \|\}(x), \frac{x}{\|x\|} >= 1$.

c. Soit $z \in \mathbf{R}^n$. Soit $(x_p)_{p\geqslant 1}$ une suite de points de $\Omega_{\| \,.\, \|}$ qui converge vers z. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} < \{\nabla\| \,.\, \|\}(x_p), z >= \|z\|.$$

V. LE THÉORÈME DE FIGIEL

Dans cette partie, E désigne un espace normé de dimension finie N. Soit, dans les questions V.1 et V.2, un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. On suppose de plus que x est un point de différentiabilité de la norme $\| \,.\, \|$ de E.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une application 1-Lipschitzienne telle que $\varphi(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Soit $y \in E$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, on a

$$1 = |t\varphi(y) - t\varphi\big((\varphi(y)+1/t)x\big)| \leqslant \|x - t(y - \varphi(y)x)\|.$$

b. En déduire que $< \{\nabla\| \,.\, \|\}(x), y - \varphi(y)x >= 0$, puis que $\{\nabla\| \,.\, \|\}(x) = \varphi$.

2. Soit F un espace normé séparable et soit $\phi : E \to F$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$.

a. Montrer qu'il existe $f_x^* \in F^*$ de norme 1 tel que $< f_x^*, \phi(tx) >= t$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (on utilisera la Question III.6.c)).

b. Montrer que $f_x^* \circ \phi = \{\nabla\| \,.\, \|\}(x)$.

Pour $x' \in \Omega_{\| \,.\, \|}$, on considère plus généralement $f_{x'}^* \in F^*$ de norme 1 telle que $f_{x'}^* \circ \phi = \{\nabla\| \,.\, \|\}(x')$.

3. a. Montrer que pour tout $z \in E\backslash\{0\}$, il existe un point $x' \in \Omega_{\| \,.\, \|}$ tel que $\{\nabla\| \,.\, \|\}(x')(z) \neq 0$ (on utilisera la Question IV.7.c)).

b. En déduire qu'il existe des points $x_1, x_2, ..., x_N$ de $\Omega_{\| \,.\, \|}$ tels que la famille des différentielles $\big(\{\nabla\| \,.\, \|\}(x_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant N}$ soit une base de E^*.

c. Montrer qu'il existe une base $(z_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ de E telle que

$$\{\nabla\|\,.\,\|\}(x_i)(z_j)=\delta_{i,j}.$$

D'après la Question V.2.b), pour tout $1\leqslant i\leqslant N$, il existe $f^*_{x_i}\in F^*$ tel que

$$\{\nabla\|\,.\,\|\}(x_i)=f^*_{x_i}\circ\phi.$$

On définit une application $T:F\to E$ par

$$T(y)=\sum_{i=1}^N f^*_{x_i}(y)z_i.$$

d. Montrer que T est linéaire continue et que $T\circ\phi=Id_E$.

4. On suppose dans cette question que $\overline{vect}[\phi(E)]=F$.

a. Montrer que pour tout $x'\in\Omega_{\|\,.\,\|}$, on a

$$f^*_{x'}=\{\nabla\|\,.\,\|\}(x')\circ T.$$

b. Montrer que $\|T\|=1$ (pour $y\in F$, on pourra poser $z=T(y)$ et utiliser la Question IV.7 .c)).

5. On suppose à présent que X est un espace de Banach séparable de dimension infinie. D'après la Question III.3.a), on a

$$X=\overline{\bigcup_{k\geqslant1}E_k}$$

où $(E_k)_{k\geqslant1}$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Soit Y un espace normé, et soit $\Phi:X\to Y$ une isométrie telle que $\Phi(0)=0$ et $\overline{vect}[\Phi(X)]=Y$. On pose $F_k=vect[\Phi(E_k)]$.

a. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $T_k:F_k\to E_k$ telle que pour tout $x\in E_k$, $T_k(\Phi(x))=x$, et que $\|T_k\|=1$.

b. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T:Y\to X$ telle que $T\circ\Phi=Id_X$, et que $\|T\|=1$.

6. **Applications :**

a. On munit $\mathbf{R}^2$ d'une norme arbitraire. Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ une isométrie. Montrer qu'il existe une base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ de $\mathbf{R}^2$ et une application Lipschitzienne φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout $t\in\mathbf{R}$, on a $f(t)=t\varepsilon_1+\varphi(t)\varepsilon_2$.

b. Montrer le théorème de Mazur-Ulam : si X et Y sont des espaces de Banach séparables, toute surjection isométrique $\Phi:X\to Y$ telle que $\Phi(0)=0$ est linéaire.

VI. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit X un espace normé séparable de dimension infinie. On désigne par $Lip_0(X)$ l'espace vectoriel des fonctions Lipschitziennes f de X dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0)=0$. Pour $f\in Lip_0(X)$, on pose

$$\|f\|_L=sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}\ ;\ (x,y)\in X^2,\ x\neq y\}.$$

On vérifie facilement que $\| \, . \, \|_L$ est une norme sur $Lip_0(X)$, que le dual X^* de X est un sous-espace de $Lip_0(X)$ et que $\|x^*\| = \|x^*\|_L$ pour tout $x^* \in X^*$.

1. Pour tout $\mu \in Lip_0(X)^*$, on note $\beta(\mu)$ la restriction de μ à X^*. Montrer que β est une application linéaire continue de $Lip_0(X)^*$ dans X^{**} et que $\|\beta\| = 1$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ de vecteurs de X linéairement indépendants tels que $\overline{vect}[(x_i)_{i\geqslant 1}] = X$ et $\|x_i\| = 2^{-i}$ pour tout i.

On pose $E_k = vect[\{x_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant k\}]$.

On considère l'unique application linéaire $R_k : E_k \to Lip_0(X)^*$ qui satisfait pour tout $1 \leqslant n \leqslant k$ et toute $f \in Lip_0(X)$

$$R_k(x_n)(f) = \int_{[0,1]^{k-1}} \Big[f(x_n + \sum_{j=1, j\neq n}^{k} t_j x_j) - f(\sum_{j=1, j\neq n}^{k} t_j x_j)\Big] dt_1 dt_2 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k \, .$$

3. Soit $f \in Lip_0(X)$. On note f_k la restriction de f à E_k. Montrer que si f_k est continûment différentiable, on a pour tout $x \in E_k$

$$R_k(x)(f) = \int_{[0,1]^k} < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^{k} t_j x_j), x > dt_1 dt_2 ... dt_k.$$

4. Montrer que

$$\|R_k\| \leqslant 1$$

(On utilisera la Question I. 2. d).

5. a. Montrer que si $1 \leqslant n \leqslant k$, on a

$$\|R_{k+1}(x_n) - R_k(x_n)\| \leqslant 2\|x_{k+1}\|.$$

b. Montrer que pour tout $x \in E_k$, la suite $(R_l(x))_{l\geqslant k}$ converge dans l'espace de Banach $Lip_0(X)^*$.

6. On pose $C = \bigcup_{k\geqslant 1} E_k$. La Question VI.5 permet de définir pour tout $x \in C$

$$R(x) = \lim_{l\to\infty} R_l(x).$$

a. Montrer que R est une application linéaire continue de C dans $Lip_0(X)^*$ telle que $\|R\| = 1$ et $\beta \circ R(x) = J_X(x)$ pour tout $x \in C$ (l'application β est définie à la Question VI.1).

b. En déduire qu'il existe une application linéaire continue $\overline{R} : X \to Lip_0(X)^*$ telle que $\|\overline{R}\| = 1$ et $\beta \circ \overline{R} = J_X$.

Soient Y un espace de Banach et $Q : Y \to X$ une application linéaire continue, telle qu'il existe une application M-Lipschitzienne $\mathscr{L} : X \to Y$ telle que $Q \circ \mathscr{L} = Id_X$ et $\mathscr{L}(0) = 0$. On admettra que l'équation

$$< S(x), y^* > = < \overline{R}(x), y^* \circ \mathscr{L} >$$

où $y^* \in Y^*$ et $\overline{R}$ est définie à la Question VI. 6. b) ci-dessus, définit une application linéaire continue $S : X \to Y$ telle que $Q \circ S = Id_X$ et telle que $\|S\| \leqslant M$.

7. Montrer que si X est un espace de Banach séparable, et s'il existe une isométrie Φ de X dans un espace de Banach Y, alors Y contient un sous-espace vectoriel fermé linéairement isométrique à X.

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

RAPPORT SUR LE PROBLÈME D'ANALYSE ET PROBABILITÉS.

L'objet de ce problème est de démontrer le théorème suivant : si un espace de Banach séparable X se plonge isométriquement dans un espace de Banach Y, alors il existe une isométrie linéaire de X dans Y. Ce théorème est l'un des résultats principaux d'un article de Nigel Kalton et Gilles Godefroy (Studia Mathematica, 2003) et le problème présente une démonstration qui n'emploie que des arguments appartenant au programme de l'agrégation. Le problème est auto-suffisant, à ceci près qu'une équation traduisant un diagramme linéaire est admise dans l'ultime calcul du problème, mais cette équation est de fait facile à vérifier.

Le problème est divisé en six parties. Les quatre premières parties sont indépendantes, et concernent des résultats tout à fait classiques à ce niveau. La cinquième partie est consacrée à la démonstration d'une extension du théorème de Mazur-Ulam établie par Figiel en 1968 : toute isométrie Φ d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y telle que $\Phi(0) = 0$ admet un inverse à gauche linéaire de norme 1. La sixième partie établit le résultat principal. Voici quelques commentaires plus précis sur chaque partie.

Partie I : la première question I.1 est un résultat de cours sur l'extension d'une fonction Lipschitzienne définie sur une partie dense A d'un espace vectoriel normé E à une fonction Lipschitzienne de même constante de Lipschitz sur tout E. Une indication précise était donnée, qu'il suffisait de suivre. L'unicité de l'extension fait d'ailleurs qu'il n'y a aucun doute possible sur son mode de définition. Elle a pourtant souvent été mal traitée.

Les questions suivantes mettent en place la méthode classique de convolution par une approximation de l'identité par des fonctions lisses, pour montrer que toute fonction Lipschitzienne f sur $\mathbb{R}^n$ est limite uniforme de fonctions continûment différentiables, de constantes de Lipschitz majorées par celle de f. Les fonctions lisses choisies sont, comme c'est l'usage, des fonctions gaussiennes. La notation choisie est assez synthétique, pour éviter des intégrales multiples inutilement lourdes. C'est peut-être pour cela qu'un nombre significatif de candidats n'a pas reconnu le cadre dans lequel le travail se déroule, qui permet d'utiliser les théorèmes classiques de dérivation sous le signe somme puis la continuité des dérivées partielles pour démontrer le caractère continûment différentiable des approximations, qui est le résultat le plus difficile de la première partie. Il convient de noter au passage que le théorème de convergence dominée *ne permet pas* (en 2.b) de montrer la convergence - par absence de domination - et qu'il faut utiliser un changement de variable (voir le corrigé) ou éventuellement un découpage en sous-domaines.

Partie II : la question II.1 présente un exemple très simple d'isométrie non linéaire de la droite réelle dans le plan muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$ et elle a été en général bien traitée. La suite de cette partie a pour objectif de montrer que toute isométrie à valeurs dans l'espace de Hilbert et qui envoie 0 en 0 est linéaire, ce qui généralise (un peu) le résultat élémentaire de linéarité des isométries qui respectent 0 sur l'espace de Hilbert. Le point crucial de l'argument est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cette partie a été correctement traitée par d'assez nombreux candidats.

Partie III : le premier objectif de cette partie est la démonstration du théorème de Hahn-Banach pour les espaces normés réels séparables. Cette démonstration se fait en trois temps : une formule explicite pour passer d'un espace de dimension n à un sur-espace de dimension $(n+1)$ (questions III.1 et III. 2), la mise en place de l'extension sur un sous-espace dense formé d'une suite d'espaces de dimension finie emboîtés (questions III.3.a et III.3.b) puis enfin l'extension à tout E (question III.3.c) qui reposait sur la toute première question du problème. Parmi les candidats qui ont traité cette partie, certains ont reconnu ce qu'on leur faisait démontrer, et ont tout simplement utilisé le théorème de Hahn-Banach, ce qui n'était pas le but. On note également des difficultés à manipuler correctement les inf et les sup, ce qui n'est pas acceptable à ce niveau : un enseignant de lycée doit avoir les idées parfaitement claires sur les inégalités entre nombres réels, faute de quoi il risque de faire naître des confusions.

La question III.4 établit le caractère isométrique de l'injection canonique d'un espace normé séparable dans son bidual. Il suffisait d'appliquer immédiatement le théorème de Hahn-Banach (maintenant démontré !) mais cela n'a parfois pas été vu, et remplacé par une formule de dualité certes exacte mais non justifiée. La question III.5 établit le théorème de Banach-Alaoglu pour la boule unité du dual d'un espace séparable par le procédé diagonal usuel, puis ce théorème est appliqué dans la question III.6 pour montrer le cas particulier du théorème de Figiel où l'espace de départ est la droite réelle. La question la moins facile (III.6.b) n'a été que rarement bien traitée.

Partie IV : L'objectif de cette partie est de montrer que toute fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable en tout point d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}^n$. La question IV.1 concerne exclusivement les fonctions convexes d'une seule variable réelle. Malgré le caractère très élémentaire du sujet, cette question a été rarement bien traitée par les candidats, qui ont par exemple dessiné des graphes là où un calcul très accessible donne le résultat sans qu'il faille s'appuyer sur une intuition graphique qui peut être trompeuse, y compris pour les fonctions convexes. Rappelons encore une fois qu'un enseignant du secondaire peut légitimement faire appel à l'intuition de ses élèves et illustrer son cours, mais doit conclure par le calcul pour être absolument convaincant. Les dérivées à droite et à gauche ont donné lieu à de nombreuses confusions.

Le passage aux fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ est l'objet des questions IV.2 à IV.6, et repose naturellement sur un usage approprié du lemme de Baire, qui est rappelé dans l'énoncé. Les candidats étaient assez précisément guidés dans cette partie du problème, qui a été menée à bien dans un nombre significatif de copies. Parmi les confusions à relever, la plus fréquente consistait à dire qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est un *ouvert* dense, alors que l'ensemble des réels irrationnels donne un contre-exemple parmi bien d'autres. La question IV.7 traite enfin du cas particulier des normes, nécessaire à la partie V.

Parties V et VI : la question V.1 donne par un argument de différentiabilité une caractérisation de la différentielle de la norme, en un point de lissité x, parmi les fonctions 1-Lipschitziennes homogènes dans la direction x. Cette question était un calcul direct, correctement effectué dans un certain nombre de copies. Peu de candidats se sont aventurés au-delà, mais lorsqu'ils l'ont fait les question abordées étaient en général bien traitées.

Le cadre naturel de la partie VI est le dual de l'espace des fonctions Lipschitziennes sur un espace de Banach X, mais il n'est pas nécessaire d'avoir une quelconque connaissance de la “nature" des éléments de ce dual. Le point culminant du problème sont les questions VI. 3 et VI. 4, qui conduisent à l'existence d'un inverse à droite linéaire continu des applications quotients (à image séparable) dès lors qu'il existe un inverse à droite Lipschitzien. Ceci donne, avec le théorème de Figiel, le résultat principal. Cette dernière partie n'a pratiquement pas été abordée par les candidats, mais les préparateurs des agrégations futures doivent savoir qu'elle n'est pas essentiellement difficile.

4.3 Corrigé

Corrigé du problème d'analyse-probabilités 2011

I. Préliminaires

I.1 Soit $x \in E$, et (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers x ; alors (a_n) est une suite de Cauchy, et comme $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \|f(a_n) - f(a_m)\| \leqslant M\|a_n - a_m\|$, il s'ensuit que $(f(a_n))$ est de Cauchy dans F complet, donc converge.

- Soit par ailleurs (b_n) une autre suite d'éléments de A qui converge vers x ; le même raisonnement s'applique, et $(f(b_n))$ converge. Cependant $\forall n \in \mathbf{N}, \|f(a_n) - f(b_n)\| \leqslant M\|a_n - b_n\|$: or $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$. On peut ainsi définir $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ indépendamment de la suite d'éléments de A qui converge vers x.

- De plus, $\forall a \in A$ la suite constante (a) converge vers a ; ainsi, par définition de $\tilde{f}$: $\tilde{f}(a) = f(a)$.

- En outre, soient $(x, x') \in E^2, (a_n)$ [resp. (a'_n)] une suite d'élements de A qui converge vers x [resp. x'] ; on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \|f(a_n) - f(a'_n)\| \leqslant M\|a_n - a'_n\|$, d'où, en passant à la limite : $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x')\| \leqslant M\|x - x'\|$. $\tilde{f}$ est donc M-Lipschitzienne.

- Enfin, l'unicité de $\tilde{f}$ provient de ce que deux applications continues (*a fortiori* lipschitziennes) qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Remarque : pour établir l'existence de $\tilde{f}$, on peut également invoquer le critère de Cauchy, satisfait par f au voisinage de chaque point de E.

I.2a Notons $\gamma_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbf{R}, \gamma_0(x) = e^{-\pi x^2}$. Cette fonction est intégrable sur $\mathbf{R}$ (continue et $O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \to +\infty$). Or $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n, \gamma(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n \gamma_0(x_i)$; donc, d'après le théorème de Fubini : γ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$ et $\int_{\mathbf{R}^n} \gamma(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}} \gamma_0(x)dx = 1$ (effectuer le changement de variable $t = \sqrt{\pi}x$, et voir "Rappels et notations").

- Définissons d'autre part $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ par : $\forall (t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n, \varphi(t_1, ..., t_n) = (pt_1, ...pt_n)$. φ est un isomorphisme linéaire, donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même, de déterminant p^n, et le théorème de changement de variable assure que

$$\int_{\mathbf{R}^n} \gamma(u_1, ...u_n)du_1...du_n = \int_{\mathbf{R}^n} p^n\gamma(pt_1, ...pt_n)dt_1...dt_n = 1.$$

I.2b Fixons $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$. Par le même changement de variable qu'au 2.a, on se ramène à étudier l'intégrabilité sur $\mathbf{R}^n$ de $(u_1, ...u_n) \mapsto \gamma(u_1, ..., u_n)f(x_1 - \frac{u_1}{p}, ..., x_n - \frac{u_n}{p})$. Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, f est en particulier lipschitzienne de $(\mathbf{R}^n, \|.\|_1)$ dans $(\mathbf{R}, |.|)$: soit $M \geqslant 0$ tel que $\forall (x, x') \in (\mathbf{R}^n)^2, |f(x) - f(x')| \leqslant M\|x - x'\|_1$. Alors $\forall x \in \mathbf{R}^n, |f(x)| \leqslant |f(0)| + M\|x\|_1$, et :

$$\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbf{R}^n, |\gamma(u_1, ..., u_n)f(x_1 - \frac{u_1}{p}, ..., x_n - \frac{u_n}{p})| \leqslant \gamma(u_1, ..., u_n)[|f(0, ..., 0)| + M(\sum_{i=1}^n |x_i| + \frac{|u_i|}{p})].$$

- Formons à présent, pour $1 \leqslant i \leqslant n, \beta_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbf{R}^n, \beta_i(u_1, ..., u_n) = |u_i|\gamma(u_1, ...u_n)$. La fonction $x \mapsto |x|\gamma_0(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ (car continue et $O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \to +\infty$). Comme $\beta_i(u_1, ..., u_n) = (\prod_{j\neq i} \gamma_0(u_j)) \times |u_i|\gamma_0(u_i)$, d'après le théorème de Fubini chaque β_i est intégrable sur $\mathbf{R}^n$.

- Ce qui précède garantit que $(u_1, ...u_n) \mapsto \gamma(u_1, ..., u_n)f(x_1 - \frac{u_1}{p}, ..., x_n - \frac{u_n}{p})$ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$, ainsi, par changement de variable, que $(t_1, ...t_n) \mapsto \gamma(t_1, ..., t_n)f(x_1 - t_1, ..., x_n - t_n)$. g_p est donc bien définie pour tout $p \geqslant 1$, et

$$\forall (x_1, ...x_n) \in \mathbf{R}^n, g_p(x_1, ...x_n) = \int_{\mathbf{R}^n} \gamma(u_1, ..., u_n)f(x_1 - \frac{u_1}{p}, ..., x_n - \frac{u_n}{p})du_1...du_n.$$

- En outre, compte-tenu du 2.a : $\forall (x_1, ...x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$|g_p(x_1, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \gamma(u_1, ..., u_n)|f(x_1 - \frac{u_1}{p}, ..., x_n - \frac{u_n}{p}) - f(x_1, ..., x_n)|du_1...du_n$$

$$\leqslant \frac{M}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}^n} \beta_i(u_1, ..., u_n)du_1...du_n.$$

Il en découle que (g_p) converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}^n$.

I.2c Pour $(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n$ fixé, l'application $(t_1,...,t_n) \mapsto (v_1 = x_1 - t_1,...,v_n = x_n - t_n)$ définit une bijection affine, donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même de déterminant $(-1)^n$. Le théorème de changement de variable fournit alors :

$$g_p(x_1,...,x_n) = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(p(x_1 - v_1),...,p(x_n - v_n)) f(v_1,...,v_n) dv_1...dv_n.$$

- Par ailleurs, $(v_1,...v_n) \in \mathbf{R}^n$ étant fixé, l'application

$$\delta : (x_1,...,x_n) \mapsto p^n \gamma[p(x_1 - v_1),...,p(x_n - v_n)] f(v_1,...,v_n)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n$:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_i}(x_1,...,x_n) = -2\pi p^n (x_i - v_i)\gamma[p(x_1 - v_1),...,p(x_n - v_n)] f(v_1,...,v_n).$$

D'où

$$|\frac{\partial \delta}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)| \leqslant 2\pi p^n (|x_i| + |v_i|) \prod_{j=1}^{n} \gamma_0[p(x_j - v_j)] \times |f(v_1,...,v_n)|.$$

- Soit alors $A \geqslant 0$ et $(x_1,...,x_n) \in [-A, A]^n$; observons que pour $1 \leqslant j \leqslant n$ on a toujours $\gamma_0[p(x_j - v_j)] \leqslant 1$, et si de plus $|v_j| \geqslant A$, alors $|x_j - v_j| \geqslant |v_j| - |x_j| \geqslant |v_j| - A \geqslant 0$, donc $\gamma_0[p(x_j - v_j)] \leqslant \gamma_0[p(|v_j| - A)]$. Notons h l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\forall v \in \mathbf{R}, h(v) = \gamma_0[p(|v| - A)]$ si $|v| > A$, et $h(v) = 1$ si $|v| \leqslant A$; h est intégrable sur $\mathbf{R}$ ainsi que toutes les fonctions $v \mapsto v^k h(v)$ pour $k \in \mathbf{N}$ (car continues par morceaux et $O(\frac{1}{v^2})$ lorsque $|v| \to +\infty$).

Ce qui précède montre que $\gamma_0[p(x_j - v_j)] \leqslant h(v)$ et il vient :

$$|\frac{\partial \delta}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)| \leqslant 2\pi p^n (A + |v_i|) \prod_{j=1}^{n} h(v_j) |f(v_1,...,v_n)| \leqslant 2\pi p^n (A + |v_i|) \prod_{j=1}^{n} h(v_j)(|f(0,...,0)| + M \sum_{k=1}^{n} |v_k|).$$

On se ramène ainsi à une somme de fonctions de la forme $\prod_{j=1}^n \varphi_j(v_j)$ où chaque φ_j est intégrable sur $\mathbf{R}$; le théorème de Fubini assure une fois de plus que la fonction majorante est intégrable sur $\mathbf{R}^n$. En outre, cette fonction est indépendante de $(x_1,...,x_n) \in [-A, A]^n$.

- D'après le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, g_p admet des dérivées partielles sur $]-A, A[^n$; le théorème de continuité garantit de plus que ces dérivées partielles sont continues sur $]-A, A[^n$: g_p est ainsi $\mathscr{C}^1$ sur $]-A, A[^n$ pour tout $A \geqslant 0$, donc sur $\mathbf{R}^n$.

I.2d Munissons tout d'abord E d'une base $(e_1,...,e_n)$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$; définissons $\underline{g_p} : E \to \mathbf{R}$ par $\forall x \in E, \underline{g_p}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1,...,pt_n) f(x - t_1 e_1 - ... - t_n e_n) dt_1...dt_n$, et soit $h_p = \underline{g_p} - \underline{g_p}(0)$. h_p est bien définie (appliquer le 2.b à $\underline{f}(x_1,...,x_n) = f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n)$, lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$) et vérifie $h_p(0) = 0$. En outre, d'après le 2.a :

$$\forall (x, x') \in E^2, |h_p(x) - h_p(x')| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} p^n \gamma(pt_1,...,pt_n) dt_1...dt_n \times \|f\|_L \|x - x'\| = \|f\|_L \|x - x'\|.$$

Ceci implique que $h_p \in Lip_0(E)$, et $\|h_p\|_L \leqslant \|f\|$.

D'autre part, le $I.2.c$ assure que h_p est $\mathscr{C}^1$ sur E ; enfin, pour tout $x \in E$:

$$|h_p(x) - f(x)| \leqslant |f(x) - \underline{g_p}(x)| + |\underline{g_p}(0)|.$$

Le $I.2.b$ établit que $(\underline{g_p})$ converge uniformément vers f sur E, et comme $f(0) = 0$, on a de plus $\lim_{p \to +\infty} \underline{g_p}(0) = 0$: (h_p) converge donc uniformément vers f sur E.

II. Isométries et linéarité

II.1 Observons tout d'abord que, comme pour tout $t \in \mathbf{R}, |sin'(t)| = |cos(t)| \leqslant 1$, d'après l'inégalité des accroissements finis sin est 1-Lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. Soit $(t,t') \in \mathbf{R}^2$; on a donc : $\|f(t)-f(t')\|_\infty = max\{|t-t'|, |sin(t)-sin(t')|\} = |t-t'|$. Ceci établit que f est une isométrie. En outre, $f(\pi) = (\pi,0) \neq 2f(\frac{\pi}{2}) = (\pi,2)$: f n'est donc pas linéaire.

II.2.a Notons $a = \|x\|_2 = \|y\|_2$. Si $a=0$, alors $x=y=0$. Si $a>0$, il vient : $a = \|tx+(1-t)y\|_2 \leqslant t\|x\|_2 + (1-t)\|y\|_2 = ta+(1-t)a = a$. Il y a ainsi égalité dans l'inégalité triangulaire : la norme $\|.\|_2$ étant euclidienne, cela implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que $tx = \alpha(1-t)y$. En évaluant les normes : $t = (1-t)\alpha > 0$, d'où $x = y$.

II.2.b Si $x_2 = 0, \lambda = 0$ convient. Si $x_1 = 0$, alors $\|x_2\|_2 + \|x_3\|_2 = 0$, d'où $x_2 = x_3 = 0$ et $\lambda = 0$ convient également. Si $x_3 = 0$, alors $x_1 = x_2$ et $\lambda = 1$ convient.

- Supposons à présent que les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 3}$ sont tous non nuls ; formons pour $1 \leqslant i \leqslant 3$: $y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|_2}$, et soit $t = \frac{\|x_2\|_2}{\|x_2\|_2+\|x_3\|_2} \in]0,1[$. On a : $y_1 = ty_2+(1-t)y_3$ et $\|y_1\|_2 = \|y_2\|_2 = \|y_3\|_2 = 1$, d'où, d'après la question précédente : $y_2 = y_3$ et $\exists\mu = (\|x_2\|_2)^{-1}\|x_3\|_2 > 0, x_3 = \mu x_2$. En reportant : $x_2 = \frac{1}{1+\mu}x_1$.

Remarque : on peut aussi, plus directement, invoquer le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour un espace préhilbertien ; l'intérêt d'utiliser le $II.2.a$ est que la démonstration se généralise à une norme strictement convexe.

II.2.c Soit $t \geqslant 0$; alors $\|\varphi(t)\|_2 = \|\varphi(t)-\varphi(0)\|_2 = |t| = t$. D'où $\forall (t_1,t_2) \in (\mathbf{R}+)^2$ tels que $t_1 \geqslant t_2$: $\|(\varphi(t_1)-\varphi(t_2))+\varphi(t_2)\|_2 = \|\varphi(t_1)\|_2 = t_1 = (t_1-t_2)+t_2 = \|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\|_2 + \|\varphi(t_2)\|_2$. D'après le $II.2.b$ appliqué à $x_1 = \varphi(t_1), x_2 = \varphi(t_2)$: $\exists\lambda \geqslant 0, \varphi(t_2) = \lambda\varphi(t_1)$ et en identifiant les normes : $t_2 = \lambda t_1$. En distinguant alors selon que $t \leqslant 1$ ou $t \geqslant 1$, on obtient $\varphi(t) = t\varphi(1)$.

II.2.d Si $y = 0$ le résultat est évident. Si $y \neq 0$, définissons $\varphi : \mathbf{R} \to \mathscr{H}$ par : $\forall t \in \mathbf{R}, \varphi(t) = \frac{\Phi(x+ty)-\Phi(x)}{\|y\|}$. Alors $\forall (t_1,t_2) \in \mathbf{R}^2$: $\|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\|_2 = \frac{\|\Phi(x+t_1y)-\Phi(x+t_2y)\|_2}{\|y\|} = |t_1-t_2|$ (puisque Φ est une isométrie). Ainsi, φ est elle aussi une isométrie, et elle vérifie en outre $\varphi(0) = 0$. Le $II.2.c$ implique que $\forall t \geqslant 0, \varphi(t) = t\varphi(1)$, d'où, en reportant : $\Phi(x+ty) = (1-t)\Phi(x) + t\Phi(x+y)$.

II.2.e En particulier, pour $x = 0$: $\forall (t,y) \in (\mathbf{R}+) \times Y, \Phi(ty) = t\Phi(y)$, propriété notée (i). Soit alors $(x_1,x_2) \in Y^2$; en posant $x_1 = x, x_2 - x_1 = y$ et pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient : $\Phi(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{1}{2}(\Phi(x_1)+\Phi(x_2))$. En appliquant (i) : $\Phi(x_1+x_2) = \Phi(x_1)+\Phi(x_2)$. Φ est donc un morphisme additif, et on a $\forall x \in Y, \Phi(-x) = -\Phi(x)$. De (i) on déduit alors que $\forall (t,y) \in \mathbf{R} \times Y, \Phi(ty) = t\Phi(y)$, ce qui achève de prouver que Φ est linéaire.

III. Dualité des espaces normés.

III.1 Soit $(h_1,h_2) \in H^2$; h^* étant de norme 1, on a :

$$< h^*, h_1 - h_2 > \leqslant | < h^*, h_1 - h_2 > | \leqslant \|h_1 - h_2\| \leqslant \|h_1 - u\| + \|h_2 - u\|.$$

D'où $< h^*, h_1 > - \|h_1 - u\| \leqslant < h^*, h_2 > + \|h_2 - u\|$, et donc

$$\sup_{h_1 \in H} < h^*, h_1 > - \|h_1 - u\| \leqslant \inf_{h_2 \in H} < h^*, h_2 > + \|h_2 - u\|.$$

III.2.a x^* est bien définie et linéaire, car H et $\mathbf{R}.u$ sont supplémentaires dans X, et h^* ainsi que $tu \mapsto ta$ sont linéaires. Soit alors $x = h + tu \in X$.

- Si $t>0, <x^*,x> = <h^*,h> + ta \leqslant <h^*,h> + t(<h^*,-\frac{h}{t}> + \|-u-\frac{h}{t}\|) = \|x\|$ (par définition de a, en posant $h_2 = -\frac{h}{t} \in H$). De même, pour $h_1 = -\frac{h}{t}$: $<x^*,x> = <h^*,h> + ta \geqslant -\|x\|$. Ainsi, $|<x^*,x>| \leqslant \|x\|$.

- Si $t<0$, on applique ce qui précède à $-x$, et on obtient encore $|<x^*,x>| \leqslant \|x\|$.

- Si $t=0, x=h\in H$ et $|<x^*,x>| = |<h^*,x>| \leqslant \|x\|$ (car $\|h^*\|=1$). x^* est donc une forme linéaire continue, et $\|x^*\| \leqslant 1$.

- Notons enfin que comme $\|h^*\|=1, \exists (h_n)_{n\in\mathbf{N}} \in H^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \|h_n\|=1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} |<h^*,h_n>| = 1 = \lim_{n\to+\infty} |<x^*,h_n>|.$$

Il en résulte que $\|x^*\|=1$.

III.2.b Si $x^*=0$, il suffit de poser $y^*=0$. Supposons donc $x^*\neq 0$; quitte à remplacer x^* par $\frac{x^*}{\|x^*\|}$, on peut se ramener au cas où $\|x^*\|=1$. Posons alors $r = codim_E(F)$ et $x_0^* = x^*$; soit $j\in\{0,\dots,r-1\}$: supposons qu'il existe F_j sous-espace de E de dimension $dim(F)+j$, contenant F, et $x_j^* \in F_j^*$ de norme 1 et dont la restriction à F est x^*. Choisissons $u_j \in E \setminus F_j$ (cela est possible car $j<r$), et soit $F_{j+1} = F_j \oplus \mathbf{R}.u_j$. On peut appliquer le $III.2.a$, et construire $x_{j+1}^* \in F_{j+1}^*$, prolongement de x_j^* (dont la restriction à F est donc x^*), de norme 1. Par récurrence sur j, on aboutit à $y^* = x_r^* \in E^*$, de norme 1, dont la restriction à F est x^*.

III.3.a Il suffit de poser $E_0 = Vect(x)$ et, pour tout $k\geqslant 1$: $E_k = Vect(x,x_1,\dots,x_k)$. C'est bien une suite croissante de sous-espaces de dimensions finies telle que $x\in E_0$, et $\bigcup_{k\geqslant 0} E_k$ est dense dans X car contenant $(x_k)_{k\geqslant 1}$.

III.3.b Si $x=0$, n'importe quel v^* de norme 1 convient. Supposons dorénavant $x\neq 0$, et définissons $v_0^* \in E_0^*$ par $\forall t\in\mathbf{R}, <v_0^*, tx> = t\|x\|$. On a évidemment $\|v_0^*\|=1$ et $<v_0^*,x> = \|x\|$. Le $III.2.b$ permet, par récurrence, de construire une suite $(v_k^*)_{k\geqslant 0}$ de formes linéaires continues de norme 1 telle que $\forall k\geqslant 1, v_k^*\in E_k^*$, et la restriction de v_k^* à E_{k-1} est v_{k-1}^*. Définissons alors $v^* : V \to \mathbf{R}$ par : $\forall v \in V$, si $v\in E_k$ alors $<v^*,v> = <v_k^*,v>$.

- v^* est bien définie, car si $v\in E_k \cap E_l$, avec par exemple $k\geqslant l$, alors $<v_k^*,v> = <v_l^*,v>$ puisque la restriction de v_k^* à E_l est v_l^*.

- v^* est linéaire, car pour $(v,w,\lambda,\mu)\in V^2\times(\mathbf{R})^2$, si $v\in E_k$ et $w\in E_l$ avec $k\geqslant l$, alors $\lambda v+\mu w \in (E_k)^2$ et $<v^*,\lambda v+\mu w> = <v_k^*,\lambda v+\mu w> = \lambda <v_k^*,v> + \mu <v_k^*,w> = \lambda <v^*,v> + \mu <v^*,w>$.

- Enfin pour tout $v\in V$, si $v\in E_k$ alors $|<v^*,v>| = |<v_k^*,v>| \leqslant \|v\|$ (puisque $\|v_k^*\|=1$) : v^* est donc continue de norme $\leqslant 1$. En outre, $<v^*,x> = <v_0^*,x> = \|x\|$ et $x\neq 0$, donc $\|v^*\|=1$.

III.3.c v^* étant 1-Lipschitzienne de V dans $\mathbf{R}$ complet, et V étant dense dans X, le $I.1$ permet de prolonger v^* (de manière unique) en $x^* : X\to\mathbf{R}$, 1-Lipschitzienne. De plus, par définition de x^* (cf. $I.1$), soit $(x,y,\lambda,\mu)\in X^2\times(\mathbf{R})^2$ et $(x_n),(y_n)$ deux suites d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y ; alors $(\lambda x_n+\mu y_n)$ est une suite d'éléments de V qui converge vers $\lambda x+\mu y$, et $<x^*,\lambda x+\mu y> = \lim_{n\to+\infty} <v^*,\lambda x_n+\mu y_n> = \lambda \lim_{n\to+\infty} <v^*,x_n> + \mu \lim_{n\to+\infty} <v^*,y_n> = \lambda <x^*,x> + \mu <x^*,y>$. x^* est ainsi une forme linéaire 1-Lipschitzienne telle que $<x^*,x> = <v^*,x> = \|x\|$, donc de norme 1.

III.4 Notons d'abord que pour $x\in X$ fixé et $(x_1^*,x_2^*,\lambda_1,\lambda_2)\in(X^*)^2\times(\mathbf{R})^2$:

$$<\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*, x> = \lambda_1 <x_1^*,x> + \lambda_2 <x_2^*,x>.$$

$J_X(x)$ est donc une forme linéaire sur X^*.

Par ailleurs, $\forall (x_1,x_2,x^*,\mu_1,\mu_2)\in X^2\times X^*\times(\mathbf{R})^2$:

$$<x^*, \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2> = \mu_1 <x^*,x_1> + \mu_2 <x^*,x_2>.$$

D'où $J_X(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) = \mu_1 J_X(x_1) + \mu_2 J_X(x_2)$: J_X est linéaire.

• En outre, $\forall x^* \in X^*, |< x^*, x >| \leqslant \|x^*\|.\|x\|$: $J_X(x)$ est donc continue, et $\|J_X(x)\| \leqslant \|x\|$. Enfin, d'après le $III.3.c$, il existe $x^* \in X^*$ vérifiant $\|x^*\| = 1$ et $< J_X(x), x^* >=< x^*, x >= \|x\|$: il s'ensuit que $\|J_X(x)\| = \|x\|$. J_X est bien une isométrie linéaire.

III.5.a On met en œuvre le procédé d'extraction diagonale : notons, pour $k \geqslant 1$, $u_{n,k} =< x_n^*, x_k >$. Pour k fixé, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n,k}| \leqslant \|x_k\|$ (car $\|x_n^*\| \leqslant 1$). D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite réelle bornée $(u_{n,1})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente $(u_{\phi_1(n),1})_{n\in\mathbf{N}}$; puis, de la suite réelle bornée $(u_{\phi_1(n),2})_{n\in\mathbf{N}}$, on peut extraire $(u_{\phi_1(\phi_2(n)),2})_{n\in\mathbf{N}}$ convergente. Par récurrence, on construit une suite $(\phi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'injections croissantes de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, telle que pour tout $k \geqslant 1$, la suite réelle $(u_{\phi_1\circ\phi_2\circ\ldots\circ\phi_k(n),k})_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

• Formons alors $\Phi : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \Phi(n) = \phi_1\circ\phi_2\circ\ldots\circ\phi_n(n)$. Φ est strictement croissante, car $\phi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1 > n$, d'où $\Phi(n+1) > \Phi(n)$. En outre, pour $k \geqslant 1$ donné, la suite $(u_{\Phi(n),k})_{n\geqslant k}$ est extraite de $(u_{\phi_1\circ\phi_2\circ\ldots\circ\phi_k(n),k})_{n\geqslant k}$, donc converge. Il en découle que pour tout $k \geqslant 1$, la suite $(< x^*_{\Phi(n)}, x_k >)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

III.5.b Notons, pour $k \geqslant 1$: $l_k = \lim\limits_{n\to+\infty} < x^*_{\Phi(n)}, x_k >$. Soit $z \in X$: la suite (x_k) étant dense dans X, il existe une suite d'entiers $(k(m))_{m\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{k(m)} = z$.

• Pour $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, on a, puisque $\|x^*_{\Phi(n)}\| \leqslant 1$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, |< x^*_{\Phi(n)}, x_{k(p)} > - < x^*_{\Phi(n)}, x_{k(q)} >| \leqslant \|x_{k(p)} - x_{k(q)}\|.$$

D'où, par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$: $|l_{k(p)} - l_{k(q)}| \leqslant \|x_{k(p)} - x_{k(q)}\|$. La suite $(x_{k(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy car convergente, la suite réelle $(l_{k(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ l'est également, donc converge. Soit $l = \lim\limits_{m\to+\infty} l_{k(m)}$. Observons que, pour $p \in \mathbf{N}$ donné, lorsque $q \to +\infty$ on obtient : $|l_{k(p)} - l| \leqslant \|x_{k(p)} - z\|$.

• Soit $\varepsilon > 0$: $\exists p \in \mathbf{N}, \|x_{k(p)} - z\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, d'après ce qu'on vient de voir, $|l_{k(p)} - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Cependant, p étant fixé : $l_k(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} < x^*_{\Phi(n)}, x_{k(p)} >$, donc

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N : |l_{k(p)} - < x^*_{\Phi(n)}, x_{k(p)} >| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme de plus $|< x^*_{\Phi(n)}, z - x_{k(p)} >| \leqslant \|z - x_{k(p)}\|$, il s'ensuit que pour tout $n \geqslant N$:

$$|< x^*_{\Phi(n)}, z > - l| \leqslant |< x^*_{\Phi(n)}, z - x_{k(p)} >| + |< x^*_{\Phi(n)}, x_{k(p)} > - l_{k(p)}| + |l_{k(p)} - l| \leqslant \varepsilon.$$

On vient ainsi de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} < x^*_{\Phi(n)}, z >= l$.

III.5.c x^*, limite simple d'une suite d'applications linéaires, est encore linéaire. Soit $z \in X$; comme $\forall n \in \mathbf{N}, |< x^*_{\Phi(n)}, z >| \leqslant \|z\|$, on en déduit, lorsque $n \to +\infty$: $|< x^*, z >| \leqslant \|z\|$. Ainsi, x^* est continue et $\|x^*\| \leqslant 1$.

III.6.a j étant une isométrie : $\|j(k) - j(-k)\| = 2k$. L'existence de x_k^* provient alors du $III.3.c$

III.6.b Formons $f : [-k, k] \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall t \in [-k, k], f(t) =< x_k^*, j(t) >$. j étant une isométrie et puisque $\|x_k^*\| = 1$, il vient : $\forall (t_1, t_2) \in [-k, k]^2, |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \|j(t_1) - j(t_2)\| = |t_1 - t_2|$. f est ainsi 1-Lipschitzienne.

• De plus, $f(0) = 0$. Il en découle que $\forall t \in [-k, k]$: $|f(t)| \leqslant |t|$. En particulier : $f(k) \leqslant k$ et $f(-k) \geqslant -k$. Cependant $2k = f(k) - f(-k) \leqslant k - (-k) = 2k$, d'où $f(k) = k$ et $f(-k) = -k$.

• Soit maintenant $t \in]0, k]$; on a, d'après ce qui précède : $f(t) \leqslant t$ et si $f(t) < t$ alors $f(k) - f(t) > k - t = |k - t|$, ce qui contredit le caractère 1-Lipschitzien de f. Nécessairement : $f(t) = t$. De même, pour $t \in [-k, 0[$: $f(t) \geqslant t$ et si $f(t) > t$ alors $f(t) - f(-k) > t + k = |t - (-k)|$, ce qui ne se peut pas davantage. D'où finalement : $\forall t \in [-k, k], < x_k^*, j(t) >= t$.

III.6.c On peut appliquer le $III.5.c$ à la suite (x_k^*) : il existe une sous-suite $(x^*_{\Phi(k)})$ de (x_k^*) qui converge simplement sur X vers $x^* \in X^*$ de norme $\leqslant 1$. En outre, pour $t \in \mathbf{R}$ fixé, on a, d'après le $III.6.b$: $\forall k \geqslant |t|, < x_k^*, j(t) >= t$. Or, par définition de x^* : $< x^*, j(t) >= \lim\limits_{k\to+\infty} < x^*_{\Phi(k)}, j(t) >$, d'où $< x^*, j(t) >= t$. Enfin, comme $\| j(1)\| = 1$ et $< x^*, j(1) >= 1$, on a bien $\|x^*\| = 1$.

IV. Différentiabilité des fonctions convexes.

IV.1.a Posons $t = \frac{c-b}{c-a} \in [0,1]$, de sorte que $b = ta + (1-t)c$ et $1-t = \frac{b-a}{c-a}$. Par convexité de f : $f(b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(c)$. D'où

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{1-t}{b-a}(f(c)-f(a)) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

On a également :

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geqslant \frac{t}{c-b}(f(c)-f(a)) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Finalement :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

IV.1.b $x \in \mathbf{R}$ étant donné, soit $T_x : \mathbf{R} \smallsetminus \{x\} \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall y \in \mathbf{R}, T_x(y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Soit $(y_1, y_2) \in (\mathbf{R} \smallsetminus \{x\})^2$ tels que $y_1 < y_2$. D'après le $IV.I.a$, selon que $y_1 < y_2 < x$ (resp. $y_1 < x < y_2$, resp. $y_1 < y_2 < x$), en posant $a = y_1, b = y_2, c = x$ (resp. $a = y_1, b = x, c = y_2$, resp. $a = y_1, b = y_2, c = x$), on a toujours :

$$T_x(y_1) \leqslant T_x(y_2).$$

On en déduit que T_x est croissante sur $\mathbf{R} \smallsetminus \{x\}$.

- Le théorème de la limite monotone (pour des fonctions réelles d'une variable réelle) garantit alors l'existence de $f_g'(x) = \lim\limits_{y\to x, y<x} T_x(y) = \sup\limits_{y<x} T_x(y)$ et de $f_d'(x) = \lim\limits_{y\to x, y>x} T_x(y) = \inf\limits_{y>x} T_x(y)$, avec de plus $f_g'(x) \leqslant f_d'(x)$.

- En outre, si $x_1 < x_2$, on a, toujours d'après le $IV.1.a$: $\forall y \in]x_1, x_2[, T_{x_1}(y) \leqslant T_{x_2}(y)$. D'où, d'après ce qui précède :

$$f_g'(x_1) \leqslant f_d'(x_1) = \inf_{y>x_1} T_{x_1}(y) \leqslant \sup_{y<x_2} T_{x_2}(y) = f_g'(x_2).$$

IV.1.c f admettant en tout point $x \in \mathbf{R}$ une dérivée à droite et à gauche, y est continue à droite et à gauche : f est donc continue sur $\mathbf{R}$.

- Comme en tout point $f_g' \leqslant f_d'$, $\mathscr{S}$ est exactement $\{x \in \mathbf{R}, f_g'(x) < f_d'(x)\}$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbf{R}$, on peut construire $\Psi : \mathscr{S} \to \mathbb{Q}$ telle que : $\forall x \in \mathscr{S}, \Psi(x) \in]f_g'(x), f_d'(x)[$. Soit par ailleurs $x_1 < x_2 \in \mathscr{S}^2$; comme $f_d'(x_1) \leqslant f_g'(x_2)$, il s'ensuit que $\Psi(x_1) < \Psi(x_2)$. Ψ est donc injective de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{Q}$, et $\mathscr{S}$ est fini ou dénombrable.

IV.1.d Pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, on a : $\tau(-t) = \frac{[f(x-t)+f(x+t)-2f(x)]}{-t} = -\tau(t)$. τ est donc impaire.

- De plus, avec les notations introduites au $IV.1.b$: $\forall t \in \mathbf{R}^*, \tau(t) = T_x(x+t) - T_x(x-t)$. T_x étant croissante sur $\mathbf{R} \smallsetminus \{x\}$, on en déduit que τ est croissante sur $\mathbf{R}^*$.

- Enfin, comme $\lim\limits_{t\to 0^+} T_x(x+t) = f_d'(x)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} T_x(x-t) = f_g'(x)$: f est dérivable en x si et seulement si $f_d'(x) = f_g'(x)$ si et seulement si $\lim\limits_{t\to 0^+} \tau(t) = 0$.

IV.2 Notons $M = \sup\limits_{x\in C} F(x)$. Par convexité de F : $\forall x \in C, 0 = F(0) \leqslant \frac{F(x)+F(-x)}{2}$. D'où

$$-F(x) \leqslant F(-x) \leqslant M.$$

Il en découle que $|F|$ est majorée sur C, et que $\sup\limits_{x\in C}|F(x)| \leqslant M$. L'inégalité réciproque étant immédiate, on a bien : $\sup\limits_{x\in C}|F(x)| = M = \sup\limits_{x\in C} F(x)$.

IV.3.a Soit $A_\alpha = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n, |\varepsilon|=1} g(x+\varepsilon\alpha e_i) - g(x)$ (bien défini, car pris sur un nombre fini de valeurs).

- Soit $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|h\|_1 = \sum_{i=1}^n |h_i| \leqslant \alpha$; posons $\lambda = 1 - \frac{\|h\|_1}{\alpha} \geqslant 0$ et définissons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$: $\varepsilon_i = 1$ si $h_i \geqslant 0, \varepsilon_i = -1$ si $h_i < 0$. Alors

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i = \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha}\varepsilon_i \alpha e_i = \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha}\varepsilon_i\alpha e_i + \frac{\lambda}{2}\alpha e_1 + \frac{\lambda}{2}(-1)\alpha e_1.$$

Comme $\sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 1$ et puisque ces coefficients sont tous $\geqslant 0$, la convexité de g fournit :

$$\begin{aligned} g(x+h) &= g(\sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha}(x+\varepsilon_i\alpha e_i) + \frac{\lambda}{2}(x+\alpha e_1) + \frac{\lambda}{2}(x+(-1)\alpha e_1)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \frac{|h_i|}{\alpha} g(x+\varepsilon_i\alpha e_i) + \frac{\lambda}{2} g(x+\alpha e_1) + \frac{\lambda}{2} g(x+(-1)\alpha e_1) \leqslant A_\alpha + g(x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\sup\limits_{\|h\|_1\leqslant\alpha} g(x+h) - g(x)$ est bien défini et $\leqslant A_\alpha$.

- De plus, Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, on a : $\|\varepsilon\alpha e_i\|_1 = \alpha$, donc $A_\alpha \leqslant \sup\limits_{\|h\|_1\leqslant\alpha} g(x+h) - g(x)$. Finalement :

$$\sup_{\|h\|_1\leqslant\alpha} g(x+h) - g(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n, |\varepsilon|=1} g(x+\varepsilon\alpha e_i) - g(x).$$

IV.3.b Considérons $C = \{h \in \mathbf{R}^n, \|h\|_1 \leqslant \alpha\}$: C est convexe et symétrique par rapport à 0 (c'est une boule fermée de centre 0 pour $\|.\|_1$). Soit aussi $F : C \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall h \in C, F(h) = g(x+h) - g(x)$. Alors F est convexe (car g l'est), majorée sur C d'après le $IV.3.a$, et vérifie $F(0) = 0$: le $IV.2$ s'applique, et (avec les notations ci-dessus et toujours d'après $IV.3.a$) $A_\alpha = \sup\limits_{\|h\|_1\leqslant\alpha} |g(x+h) - g(x)|$.

- Cependant, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, l'application $f_{i,\varepsilon}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbf{R}, f_{i,\varepsilon}(t) = g(x+\varepsilon t e_i)$ est convexe (car composée de g et d'une fonction affine) ; le $IV.1.c$ montre qu'elle est continue en 0. Ainsi, pour $\eta > 0$:

$$\exists \alpha_{i,\varepsilon} > 0, \forall t \in [-\alpha_{i,\varepsilon}, \alpha_{i,\varepsilon}] : |g(x+\varepsilon t e_i) - g(x)| \leqslant \eta.$$

En posant $\alpha = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n, |\varepsilon|=1} \alpha_{i,\varepsilon} > 0$, il vient, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}$:

$$g(x+\varepsilon\alpha e_i) - g(x) \leqslant |g(x+\varepsilon\alpha e_i) - g(x)| \leqslant \eta.$$

On en déduit que $\forall h \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|h\|_1 \leqslant \alpha$:

$$|g(x+h) - g(x)| \leqslant A_\alpha \leqslant \eta.$$

g est donc bien continue sur $\mathbf{R}^n$.

IV.4.a g étant continue, la fonction $\varphi_{k,i,t} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbf{R}^n, \varphi_{k,i,t}(x) = \frac{g(x+te_i)+g(x-te_i)-2g(x)}{t}$ l'est aussi. Alors $O_{k,i}(t) = (\varphi_{k,i,t})^{-1}(]-\infty, \frac{1}{k}[)$, image réciproque d'un ouvert par une application continue, est un ouvert. Il en résulte que $V_{k,i}$, réunion d'ouverts, est ouvert.

IV.4.b Pour $x \in \mathbf{R}^n$, $x \in \Delta_i$ si et seulement si $\forall k \geqslant 1, \exists t > 0, \frac{g(x+te_i)+g(x-te_i)-2g(x)}{t} < \frac{1}{k}$. Cela équivaut à ce que $\forall \varepsilon > 0, \exists t > 0, \frac{g(x+te_i)+g(x-te_i)-2g(x)}{t} < \varepsilon$.

- Cependant, g étant convexe, la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = g(x+te_i)$ est également convexe. Le $IV.1.d$ garantit alors que la fonction $\tau : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbf{R}^*, \tau(t) = \frac{g(x+te_i)+g(x-te_i)-2g(x)}{t}$ est impaire et croissante sur $\mathbf{R}^*$. Par croissance de τ : $x \in \Delta_i$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in]0, \alpha] : \tau(t) < \varepsilon,$$

condition notée (ii).

- Rappelons ici que $\lim_{t \to 0^+} \tau(t) = f_d'(0) - f_g'(0) \geqslant 0$ (cf. $IV.1.d$) ; la croissance de τ implique alors que $\forall t > 0, \tau(t) \geqslant 0$. La condition (ii) équivaut donc à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in]0, \alpha] : |\tau(t)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire aussi à $\lim_{t \to 0^+} \tau(t) = 0$, et, toujours en invoquant $IV.1.d$, à la dérivabilité de f en 0, enfin, par définition d'une dérivée partielle, à l'existence de $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$: ce qu'il fallait démontrer.

IV.4.c Avec les notations précédentes et d'après le $IV.1.c$, f convexe de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dérivable sauf sur une partie finie ou dénombrable : l'ensemble des points de dérivabilité de f est donc dense dans $\mathbf{R}$, et il existe une suite $(t_p)_{p \in \mathbf{N}}$ qui converge vers 0 et telle que $\forall p \in \mathbf{N}$, f est dérivable en t_p : c'est dire que $x + t_p e_i \in \Delta_i$. Comme $\lim_{p \to +\infty} x + t_p e_i = x$, et cela valant pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on en déduit que Δ_i est dense $\mathbf{R}^n$.

IV.5 D'après les $IV.4.a$ et $IV.4.b$, $\Delta_i = \bigcap_{k \geqslant 1} V_{k,i}$ est une intersection dénombrable d'ouverts, et ces ouverts sont denses dans $\mathbf{R}^n$ puisque Δ_i l'est. Il s'ensuit que $\Omega_g = \bigcap_{i \in \{1,\dots,n\}, k \geqslant 1} V_{k,i}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{R}^n$ muni d'une norme quelconque étant complet, le lemme de Baire nous assure que Ω_g est dense dans $\mathbf{R}^n$.

IV.6.a G, somme de g et d'une application affine, est convexe sur $\mathbf{R}^n$. Soit $C = \{z \in \mathbf{R}^n, \|z\|_1 \leqslant \|h\|_1\}$: ainsi qu'au $IV.3.b$, C est convexe symétrique par rapport à 0. En définissant F sur C par : $\forall z \in C, F(z) = G(x+z)$, F est convexe et vérifie $F(0) = 0$. Comme $h \in C$, le $IV.2$ garantit que

$$|G(x+h)| = |F(h)| \leqslant \sup_{z \in C} |F(z)| = \sup_{z \in C} F(z) = \sup_{z \in C} G(x+z) - G(x).$$

Le $IV.3.a$ s'applique également avec G à la place de g et $\|h\|_1$ à celle de α (si $h = 0$, le résultat est évident) ; il vient (compte-tenu de $G(x) = 0$) :

$$|G(x+h)| \leqslant \sup_{z \in C} G(x+z) - G(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, |\varepsilon|=1} G(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i).$$

IV.6.b Soit $x \in \mathbf{R}^n$; si g est différentiable en x, alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}$: $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe, et d'après le $IV.4.b$: $x \in \Omega_g$.

- Réciproquement, si $x \in \Omega_g$, soit $(i, \varepsilon) \in \{1,\dots,n\} \times \{-1,+1\}$; on a, $\forall h \in \mathbf{R}^n$:

$$G(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i) = g(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i) - g(x) - \varepsilon \|h\|_1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

Soit alors $\eta > 0$; par définition de $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$: $\exists \alpha_{i,\varepsilon} > 0, \forall h \in \mathbf{R}^n$: si $\|h\|_1 \leqslant \alpha_{i,\varepsilon}$, alors

$$|g(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i) - g(x) - \varepsilon \|h\|_1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)| \leqslant \eta \|h\|_1.$$

Ainsi, d'après le $IV.6.a$, si $\|h\|_1 \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n, |\varepsilon|=1} \alpha_{i,\varepsilon}$:

$$|g(x+h)-g(x)-\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)| = |G(x+h)| \leqslant \eta \|h\|_1.$$

Cela est exactement dire que g est différentiable en x (avec $\{\nabla g\}(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$), et Ω_g est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ en lesquels g est différentiable.

IV.7.a $\forall (t_1, ..., t_m, x_1, ...,, x_m) \in [0,1]^m \times (\mathbf{R}^n)^m$ tels que $t_1 + ... + t_m = 1$, on a, par inégalité triangulaire et homogénéité positive : $\|t_1x_1 + ... = t_m x_m\| \leqslant t_1\|x_1\| + ... + t_m\|x_m\|$. $\|.\|$ est donc convexe.

- Si $\|.\|$ était différentiable en 0, la fonction $t \mapsto \|te_1\| = |t| \times \|e_1\|$ serait dérivable en 0, ce qui n'est pas. Ainsi, 0 n'appartient pas à $\Omega_{\|.\|}$.
- Soient $x \in \Omega_{\|.\|}$ et $t > 0$ fixés ; on peut écrire, pour tout $h \in \mathbf{R}^n$:

$$\|tx+h\| = t\|x+\frac{h}{t}\| = t(\|x\| + \{\nabla\|.\|\}(x)(\frac{h}{t}) + \|\frac{h}{t}\|\varepsilon(\frac{h}{t})) = \|tx\| + \{\nabla\|.\|\}(x)(h) + \|h\|\varepsilon(\frac{h}{t}),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Il en découle, par définition de la différentielle, que $tx \in \Omega_{\|.\|}$, et que

$$\{\nabla\|.\|\}(tx) = \{\nabla\|.\|\}(x).$$

IV.7.b Soit donc $x \in \Omega_{\|.\|}$, et $h \in \mathbf{R}^n$; on a, par inégalité triangulaire : $\forall t > 0, |\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}| \leqslant \|h\|$. D'où, lorsque $t \to 0^+$:

$$| < \{\nabla\|.\|\}(x), h > | \leqslant \|h\|.$$

Ainsi, $\|\{\nabla\|.\|\}(x)\| \leqslant 1$.

- En outre, pour $h = \frac{x}{\|x\|}$ ($x \neq 0$ d'après le $IV.7.b$), il vient : $\forall t > 0, |\frac{\|x+t\frac{x}{\|x\|}\|-\|x\|}{t}| = 1$, d'où, lorsque $t \to 0^+$: $< \{\nabla\|.\|\}(x), \frac{x}{\|x\|} >= 1$. Compte-tenu de ce qui précède, il s'ensuit que

$$\|\{\nabla\|.\|\}(x)\| =< \{\nabla\|.\|\}(x), \frac{x}{\|x\|} >= 1.$$

IV.7.c L'existence de $(x_p)_{p\geqslant 1}$ est assurée par le $IV.5$. D'autre part, puisque $\|\{\nabla\|.\|\}(x)\| = 1$ (cf. $IV.7.b$) :

$$\forall p \geqslant 1, | < \{\nabla\|.\|\}(x_p), x_p - z > | \leqslant \|x_p - z\|.$$

Donc $\lim_{p\to+\infty} < \{\nabla\|.\|\}(x_p), x_p - z >= 0$. Comme de plus, toujours d'après $IV.7.b$:

$$< \{\nabla\|.\|\}(x_p), x_p >= \|x_p\|,$$

on en déduit

$$\lim_{p\to+\infty} < \{\nabla\|.\|\}(x_p), z >= \|z\|.$$

V. Le théorème de Figiel.

V.1.a Par hypothèse sur φ :

$$|t\varphi(y) - t\varphi((\varphi(y) + \frac{1}{t})x)| = |t\varphi(y) - t(\varphi(y) + \frac{1}{t})| = |-1| = 1.$$

De plus, φ étant 1-Lipschitzienne :

$$|t\varphi(y) - t\varphi((\varphi(y) + \frac{1}{t})x)| \leqslant |t| \times \|y - (\varphi(y) + \frac{1}{t})x\| = \|ty - t\varphi(y)x - x\| = \|x - t(y - \varphi(y)x)\|.$$

V.1.b Il découle de la question précédente que

$$\forall t \in \mathbf{R}^*, \|x - t(y - \varphi(y)x)\| - \|x\| = \|x - t(y - \varphi(y)x)\| - 1 \geqslant 0.$$

D'où, si $t > 0$ (resp. < 0) : $\frac{\|x-t(y-\varphi(y)x)\|-\|x\|}{t} \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$). En passant à la limite lorsque $t \to 0^+$ (resp. 0^-), il vient, par définition de la dérivée selon un vecteur : $< \{\nabla\|.\|\}(x), y - \varphi(y)x >\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), d'où :

$$< \{\nabla\|.\|\}(x), y - \varphi(y)x >= 0.$$

- Cette dernière égalité s'écrit aussi, compte-tenu de $< \{\nabla\|.\|\}(x), x >= 1$ (cf. $IV.7.b$) :

$$< \{\nabla\|.\|\}(x), y >=< \{\nabla\|.\|\}(x), \varphi(y)x >= \varphi(y) < \{\nabla\|.\|\}(x), x >= \varphi(y).$$

Ceci valant pour tout $y \in E$, il s'ensuit que $\{\nabla\|.\|\}(x) = \varphi$.

V.2.a L'application $j : \mathbf{R} \to F$ définie par : $\forall t \in \mathbf{R}, j(t) = \Phi(tx)$ vérifie $j(0) = 0$ et :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2, \|j(t_1) - j(t_2)\| = \|\Phi(t_1x) - \Phi(t_2x)\| = \|(t_1 - t_2)x\| = |t_1 - t_2|.$$

Le $III.6.c$ s'applique donc, et il existe $f_x^* \in F^*$, de norme 1, tel que $\forall t \in \mathbf{R}, < f_x^*, \Phi(tx) >= t$.

V.2b $f_x^* \circ \Phi : E \to \mathbf{R}$ est 1-Lipschitzienne (car composée de deux applications 1-Lipschitziennes) ; de plus :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f_x^* \circ \Phi(tx) =< f_x^*, \Phi(tx) >= t.$$

Le $V.1.b$ implique alors que $f_x^* \circ \Phi = \{\nabla\|.\|\}(x)$.

V.3.a Soit, ainsi qu'au $IV.7.c$, $(x_p)_{p\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\Omega_{\|.\|}$ telle que $\lim_{p\to+\infty} = z$. Alors

$$\lim_{p\to+\infty} < \{\nabla\|.\|\}(x_p), z >= \|z\| \neq 0,$$

donc il existe $p_0 \geqslant 1$ tel que $< \{\nabla\|.\|\}(x_{p_0}), z >\neq 0$: on peut poser $x' = x_{p_0}$.

V.3.b La question précédente implique que, pour $z \in E$: si $\forall x' \in \Omega_{\|.\|}, < \{\nabla\|.\|\}(x'), z >= 0$ alors $z = 0$. Cela revient à dire que l'orthogonal (au sens de la dualité) de la famille des $(\{\nabla\|.\|\}(x'))_{x'\in\Omega_{\|.\|}}$ est $\{0\}$, donc, comme E est de dimension finie, que cette famille est génératrice de E^*. On peut alors en extraire une base : il existe $(x_1, ..., x_n) \in (\Omega_{\|.\|})^N$ tels que la famille des $(\{\nabla\|.\|\}(x_i))_{1\leqslant i\leqslant N}$ soit une base de E^*.

V.3.c $(z_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ est, par définition, la base antéduale de $(\{\nabla\|.\|\}(x_i))_{1\leqslant i\leqslant N}$.

V.3.d L'existence des $(f_{x_i}^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (admise par l'énoncé) provient de ce que $\{\nabla\|.\|\}(x_i) = \{\nabla\|.\|\}(\frac{x_i}{\|x_i\|})$ (cf. $IV.7.a$) ; la linéarité et la continuité de T découlent immédiatement de celles des $(f_{x_i}^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

- En outre, pour tout $x \in E$, si $x = \sum_{j=1}^N a_j z_j$, on a :

$$\forall i \in \{1, ..., N\} : f_{x_i}^*(\Phi(x)) = \{\nabla\|.\|\}(x_i)(x) = \{\nabla\|.\|\}(x_i)(\sum_{j=1}^N a_j z_j) = \sum_{j=1}^N a_j \{\nabla\|.\|\}(x_i)(z_j) = a_i.$$

D'où $T \circ \Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i z_i = x$, et donc $T \circ \Phi = Id_E$.

V.4.a Les deux applications $f_1 = f_{x'}^*$ et $f_2 = \{\nabla\|.\|\}(x') \circ T$ sont des formes linéaires continues ; elles vérifient de plus, d'après le $V.3.d$:

$$\forall x \in E, f_1(\Phi(x)) = f_{x'}^* \circ \Phi(x) = \{\nabla\|.\|\}(x')(x) = \{\nabla\|.\|\}(x')[T \circ \Phi(x)] = f_2(\Phi(x)).$$

Par linéarité, on en déduit que f_1 et f_2 coïncident sur $Vect(\Phi(E))$; cette dernière partie étant dense dans F et f_1, f_2 étant continues, il s'ensuit que $f_1 = f_2$, *i.e.*

$$f_{x'}^* = \{\nabla\|.\|\}(x') \circ T.$$

V.4.b Soit donc $y \in F$ et $z = T(y) \in E$; d'après le $IV.7.c$, si $(z_p)_{p\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $\Omega_{\|.\|}$ qui converge vers z, on a : $\lim\limits_{p\to+\infty} < \{\nabla\|.\|\}(z_p), z >= \|z\|$.

- Cependant, pour tout $p \geqslant 1$:

$$< \{\nabla\|.\|\}(z_p), z >= \{\nabla\|.\|\}(z_p)[T(y)] = f_{z_p}^*(y).$$

Comme $\|f_{z_p}^*\| = 1$, on a : $< \{\nabla\|.\|\}(z_p), z >\leqslant \|y\|$, et, lorsque $p \to +\infty$: $\|T(y)\| = \|z\| \leqslant \|y\|$. Ainsi :

$$\|T\| \leqslant 1.$$

- En outre, d'après les $V.4.a$ et $IV.7.b$, et puisque la norme d'une composée d'applications linéaires continues est inférieure au produit des normes, on a également, pour $x' \in \Omega_{\|.\|}$:

$$1 = \|f_{x'}^*\| = \|\{\nabla\|.\|\}(x') \circ T\| \leqslant \|\{\nabla\|.\|\}(x')\| \times \|T\| = \|T\|.$$

- Finalement : $\|T\| = 1$.

V.5.a Supposons que T_k existe, et soit $y \in F_k = Vect(\Phi(E_k))$; si $y = \sum_{i=1}^{m} a_i \Phi(x_i)$, où $\forall i \in \{1,...,m\}, x_i \in E_k$, alors, par linéarité de T_k :

$$T_k(y) = \sum_{i=1}^{m} a_i T_k(\Phi(x_i)) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i.$$

Ceci établit l'unicité de T_k en cas d'existence.

- E_k, de dimension finie, est séparable : soit en effet $m = dim(E_k)$ et $(e_1,...,e_m)$ une base de E_k ; alors la famille dénombrable $(\sum_{i=1}^{m} r_i e_i)_{(r_1,...,r_m)\in\mathbb{Q}^m}$ est dense dans E_k (muni par exemple de $\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |a_i|$). Ordonnons cette famille en une suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$: Φ étant une isométrie, $(\Phi(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans $\Phi(E_k)$.

Considérons alors l'ensemble $\mathscr{A}$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels d'éléments de $(\Phi(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$:

$$\mathscr{A} = Vect_{\mathbb{Q}}(\Phi(z_n))_{n\in\mathbf{N}} = \bigcup_{N\in\mathbf{N}} \{\sum_{i=0}^{N} r_i z_i, (r_0,...,r_N) \in \mathbb{Q}^{N+1}\}$$

est dénombrable, en tant que réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. Soit $y \in F_k$ et $\varepsilon > 0$; si $y = \sum_{i=1}^{m} a_i \Phi(x_i)$, où $\forall i \in \{1,...,m\}, x_i \in E_k$, alors, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbf{R}$: pour tout $i \in \{1,...,m\}$, il existe $r_i \in \mathbb{Q}, |a_i - r_i| \times \|\phi(x_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2m}$; de plus, par densité de $(\Phi(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\Phi(E_k)$: il existe $n_i \in \mathbf{N}, |r_i| \times \|\Phi(x_i) - \Phi(z_{n_i})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2m}$.

Il vient :

$$\|y - \sum_{i=1}^{m} r_i \Phi(z_{n_i})\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_i - r_i| \times \|\Phi(x_i)\| + |r_i| \times \|\Phi(x_i) - \Phi(z_{n_i}\| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, $\mathscr{A}$ est dense dans F_k : F_k est séparable.

- On peut alors appliquer le $V.3.d$ à $\Phi_k : E_k \to F_k$, définie par : $\forall x \in E_k, \Phi_k(x) = \Phi(x)$. Φ_k est une isométrie vérifiant $\Phi_k(0) = \Phi(0) = 0$, E_k est de dimension finie et F_k est séparable : il existe donc bien T_k linéaire continue de F_k dans E_k telle que $T_k \circ \Phi_k = Id_{E_k}$, *i.e.* pour tout $x \in E_k$, $T_k(\Phi_k(x)) = x$. Enfin, la fermeture (relative) de $Vect(\Phi(E_k))$ dans F_k est F_k : le $V.4.b$ s'applique également, et $\|T_k\| = 1$.

V.5.b Notons $Y_1 = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} F_k$, et observons que pour tout $y \in Vect(\Phi(X))$, si $y = \sum_{i=1}^m a_i\Phi(x_i)$, où $\forall i \in \{1,\dots,m\}, x_i \in X$, alors, comme $X = \overline{\bigcup_{k\geqslant 1} E_k}$: $\forall i \in \{1,\dots,m\}, \exists (x_{i,n})_{n\in\mathbf{N}} \in (\bigcup_{k\geqslant 1} E_k)^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{i,n} = x_i$. Φ étant continue (car 1-Lipschitzienne), on en déduit que :

$$y = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^m a_i\Phi(x_{i,n}).$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}, \exists k_{i,n} \geqslant 1, x_{i,n} \in E_{k_{i,n}}$; en notant $N_n = \max_{1\leqslant i\leqslant m} k_{i,n}$, on a :

$$\sum_{i=1}^m a_i\Phi(x_{i,n}) \in F_{N_n} \subset Y_1.$$

Il s'ensuit que y est limite d'une suite d'éléments de Y_1, qui est donc dense dans $vect(\Phi(X))$, et aussi dans Y (puisque $\overline{Vect(\Phi(X))} = F$).

- En outre, pour $k \geqslant l \geqslant 1$ et $y \in F_l \subset F_k$, avec $y = \sum_{i=1}^m a_i\Phi(x_i), (x_1,\dots,x_m) \in (E_l)^m \subset (E_k)^m$, on a vu à la question précédente que $T_k(y) = \sum_{i=1}^m a_i x_i = T_l(y) \in X_l \subset X_k$. On peut donc définir $T_\infty : Y_1 \to X$ par : $\forall y \in Y_1$, si $y \in F_k$ alors $T_\infty(y) = T_k(y)$. ($T_\infty(y)$ est bien défini, car indépendant d'après ce qui précède de l'entier k tel que $y \in F_k$.)

- Pour tout $(y, y', \lambda, \lambda') \in Y_1^2 \times \mathbf{R}^2$, si $y \in F_k$ et $y' \in F_{k'}$, avec par exemple $k \geqslant k'$, on a : $(y, y') \in F_k^2$, donc $T_\infty(\lambda y + \lambda' y') = T_k(\lambda y + \lambda' y') = \lambda T_k(y) + \lambda' T_k(y') = \lambda T_\infty(y) + \lambda' T_\infty(y')$. T_∞ est donc linéaire.

- Par ailleurs, $\forall y \in Y_1$, si $y \in F_k$ alors $\|T_\infty(y)\| = \|T_k(y)\| \leqslant \|y\|$ (car $\|T_k\| = 1$). Ainsi, $\|T_\infty\|$ est continue, et $\|T_\infty\| \leqslant 1$. Comme de plus $\|T_1\| = 1$, il existe $(z_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F_1^{\mathbf{N}}, \forall n \in \mathbf{N}, \|z_n\| = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \|T_1(z_n)\| = 1$. Il s'ensuit que $\|T_\infty\| = 1$.

- On peut alors appliquer le $I.1$ à T_∞, 1-Lipschitzienne de Y_1, dense dans Y, dans X complet : il existe une unique application 1-Lipschitzienne $T : Y \to X$ prolongeant T_∞. En outre, T est définie par : $\forall y \in Y$, si $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$, où $\forall n \in \mathbf{N}, y_n \in Y_1$, alors :

$$T(y) = \lim_{n\to+\infty} T_\infty(y_n).$$

- Soit $(y, y', \lambda, \lambda') \in Y^2 \times \mathbf{R}^2$, et $(y_n), (y'_n)$ deux suites d'éléments de Y_1 qui convergent respectivement vers y et y'. Alors $\forall n \in \mathbf{N}, T_\infty(\lambda y_n + \lambda' y'_n) = \lambda T_\infty(y_n) + \lambda' T_\infty(y'_n)$. D'où, lorsque $n \to +\infty$: $T(\lambda y + \lambda' y') = \lambda T(y) + \lambda' T(y')$: T est linéaire. De plus, comme $\|T_\infty\| = 1$: $\forall n \in \mathbf{N}, \|T_\infty(y_n)\| \leqslant \|y_n\|$, et, par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$: $\|T(y)\| \leqslant \|y\|$. T est bien continue. Enfin, T_∞ étant une restriction de T : $1 = \|T_\infty\| = \sup_{y\in Y_1, y\neq 0} \dfrac{\|T_\infty(y)\|}{\|y\|} \leqslant \|T\|$, donc $\|T\| = 1$.

- Soit enfin $x \in X$, et une suite (x_n) d'éléments de $\bigcup_{k\geqslant 1} E_k$ qui converge vers x. Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}, k_n \geqslant 1$ tel que $x_n \in E_{k_n}$; alors $\Phi(x_n) \in F_{k_n} \subset Y_1$. Φ étant continue, $(\Phi(x_n))$ est une suite d'éléments de Y_1 qui converge vers $\Phi(x)$. Par définition de T : $T(\Phi(x)) = \lim_{n\to+\infty} T_\infty(\Phi(x_n))$. Cependant, pour tout $n \in \mathbf{N}, T_\infty(\Phi(x_n)) = T_{k_n}(\Phi(x_n)) = x_n$ (d'après le $V.5.a$). On en déduit que

$$T(\Phi(x)) = \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

V.6.a $\mathbf{R}$ étant de dimension 1 et $\mathbf{R}^2$ séparable (cf. *supra*), on peut appliquer le $V.3.d$, et il existe une application linéaire $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ telle que $T\circ f=Id_{\mathbf{R}}$. T est donc surjective, et d'après le théorème du rang, son noyau est une droite vectorielle. Soit ε_2 une base de Ker(T), et $\varepsilon_1\in\mathbf{R}^2$ tel que $T(\varepsilon_1)=1$. Alors $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$ (car $\varepsilon_1\notin\mathbf{R}.\varepsilon_2$), et pour tout $x=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2\in\mathbf{R}^2, T(x)=x_1$. Comme pour tout $t\in\mathbf{R}, T(f(t))=t$, on en déduit qu'il existe $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que

$$\forall t\in\mathbf{R}, f(t)=t\varepsilon_1+\varphi(t)\varepsilon_2.$$

f étant isométrique (donc lipschitzienne) pour une certaine norme, est encore lipschitzienne (par équivalence des normes) pour $\|x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2\|_1=|x_1|+|x_2|$. Soit $M\geqslant 0$ tel que $\forall(t,t')\in\mathbf{R}^2, \|f(t)-f(t')\|_1\leqslant M|t-t'|$; il vient : $\forall(t,t')\in\mathbf{R}^2, |\varphi(t)-\varphi(t')|\leqslant(M-1)|t-t'|$. φ est donc bien lipschitzienne.

V.6.b Φ étant isométrique surjective, est bijective de $X\to Y$; de plus, le $V.5$ s'applique (puisque $\Phi(X)=Y$, et les deux espaces sont complets et séparables) : il existe T linéaire continue $Y\to X$ telle que $T\circ\Phi=Id_X$. En composant par Φ^{-1} à droite, il vient : $T=\Phi^{-1}$, et $\Phi=T^{-1}$ est linéaire.

VI. Le résultat principal.

VI.1 Le caractère linéaire de β est évident; de plus, pour tout $\mu\in Lip_0(X)^*$, $\beta(\mu):X^*\to\mathbf{R}$ est une forme linéaire sur X^*, et $\forall x^*\in X^*, |<\beta(\mu),x^*>|=|<\mu,x^*>|\leqslant\|\mu\|\times\|x^*\|$. Ainsi, $\beta(\mu)\in X^{**}$, et $\|\beta(\mu)\|\leqslant\|\mu\|$. Ceci prouve que β est continue, et que $\|\beta\|\leqslant 1$.

- Soit à présent $x_0\in X, \|x_0\|=1$ (x_0 existe, puisque X est de dimension infinie) ; formons $\mu_0:Lip_0(X)\to\mathbf{R}$ définie par : $\forall f\in Lip_0(X), \mu_0(f)=f(x_0)$. Alors

$$\forall f\in Lip_0(X), |<\mu_0,f>|=|f(x_0)|=\frac{|f(x_0)-f(0)|}{\|x_0-0\|}\leqslant\|f\|_L:$$

ceci établit que $\mu_0\in Lip_0(X)^*$, et $\|\mu_0\|\leqslant 1$. En outre, d'après $III.3.c$ (X étant séparable) : il existe $x_0*\in X^*, \|x_0^*\|=1$ et $<x_0^*,x_0>=1$. Alors $<\mu_0,x_0^*>=<x_0^*,x_0>=1$, donc $\|\mu_0\|=\|\beta(\mu_0)\|=1$: il s'ensuit que $\|\beta\|=1$.

VI.2 X étant séparable, soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dense. Alors $X_1=Vect((y_n)_{n\in\mathbf{N}})$ est de dimension infinie (sinon, X_1 serait fermé et dense dans X, donc égal à X, ce qui ne se peut puisque X est de dimension infinie). On construit $(x_i)_{i\geqslant 1}$ par récurrence :

* Soit $n_1=\min\{n\in\mathbf{N}, y_n\neq 0\}$, et $x_1=\frac{y_{n_1}}{2\|y_{n_1}\|}$;

** Soit $i\geqslant 1$; supposons $(x_1,\ldots,x_i)$ définis; soit $n_{i+1}=\min\{n\in\mathbf{N}, y_n\notin Vect(x_1,\ldots,x_i)\}$ (cet entier est bien défini, car X_1 est de dimension infinie), et $x_{i+1}=\frac{y_{n_{i+1}}}{2^{i+1}\|y_{n_{i+1}}\|}$.

- Par construction, $(x_i)_{i\geqslant 1}$ est libre (puisque $x_1\neq 0$ et $\forall i\geqslant 1, x_{i+1}\notin Vect(x_1,\ldots,x_i)$) ; de plus, $\forall i\geqslant 1, Vect(x_1,\ldots,x_i)=Vect(y_1,\ldots,y_{n_i})$, donc $Vect((x_i)_{i\geqslant 1})=Vect((y_n)_{n\in\mathbf{N}})$ est dense dans X; enfin $\forall i\geqslant 1, \|x_i\|=2^{-i}$.

VI.3 Soit $n\in\{1,\ldots,k\}$; si f_k est $\mathscr{C}^1$, alors l'application $h:[0,1]^k\to\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall(t_1,\ldots,t_k)\in[0,1]^k, h(t_1,\ldots,t_k)=<\{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_jx_j),x_n>$$

est continue. On peut appliquer le théorème de Fubini (sur un pavé) :

$$\int_{[0,1]^k}<\{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_jx_j),x_n>dt_1\ldots dt_k$$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (\int_0^1 < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x_n > dt_n) dt_1 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k.$$

- Par ailleurs, soit $(t_1, ..., t_{n-1}, t_{n+1}, ..., t_k) \in [0,1]^{k-1}$; par composition des différentielles, l'application Ψ : $[0,1] \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall t_n \in [0,1], \Psi(t_n) = f(\sum_{j=1}^k t_j x_j) = f_k(\sum_{j=1}^k t_j x_j)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et $\forall t_n \in [0,1], \Psi'(t_n) =< \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x_n >$. Il en résulte que :

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (\int_0^1 < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x_n > dt_n) dt_1 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k$$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (\Psi(1) - \Psi(0)) dt_1 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k = R_k(x_n)(f).$$

- R_k étant linéaire et $(x_1, ..., x_k)$ étant une base de E_k, on a alors, pour tout $x = \sum_{n=1}^k a_n x_n \in E_k$:

$$R_k(x)(f) = \sum_{n=1}^k a_n R_k(x_n)(f) = \sum_{n=1}^k a_n \int_{[0,1]^k} < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x_n > dt_1 ... dt_k$$

$$= \int_{[0,1]^k} < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x > dt_1 ... dt_k.$$

VI.4 Soit $x \in E_k$ et $f \in Lip_0(X)$; alors $f_k \in Lip_0(E_k)$ et d'après le $I.2.d$ (E_k étant de dimension finie), il existe une suite (h_p) de fonctions de $Lip_0(E_k)$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que : $\forall p \in \mathbf{N}, \|h_p\|_L \leqslant \|f_k\|_L \leqslant \|f\|_L$ (car f_k est une restriction de f), et (h_p) converge vers f uniformément sur E_k.

- Pour $p \in \mathbf{N}$ fixé, on a, par définition de la dérivée selon un vecteur :

$$\forall y \in E_k, | < \{\nabla h_p\}(y), x > | = | \lim_{t \to 0} \frac{h_p(y + tx) - h_p(y)}{t} |.$$

Or, pour tout $t \neq 0$, par définition de $\|h_p\|_L$: $|\frac{h_p(y+tx)-h_p(y)}{t}| \leqslant \|h_p\|_L \times \|x\| \leqslant \|f\|_L \times \|x\|$. Il en résulte que : $\forall y \in E_k, | < \{\nabla h_p\}(y), x > | \leqslant \|f\|_L \times \|x\|$, puis, d'après le $VI.3$, compte-tenu de $\int_{[0,1]^k} dt_1 ... dt_k = 1$:

$$|R_k(h_p)(x)| = | \int_{[0,1]^k} < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x > dt_1 ... dt_k|$$

$$\leqslant \int_{[0,1]^k} | < \{\nabla f_k\}(\sum_{j=1}^k t_j x_j), x > | dt_1 ... dt_k \leqslant \|f\|_L \times \|x\|.$$

- Soit d'autre part $n \in \{1, ..., k\}$; par définition de R_k, en notant $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E_k, on a, $\forall p \in \mathbf{N}$, compte-tenu de $\int_{[0,1]^{k-1}} dt_1 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k = 1$:

$$|R_k(x_n)(h_p) - R_k(x_n)(f)|$$

$$= | \int_{[0,1]^{k-1}} [(f_k - h_p)(x_n + \sum_{j=1, j \neq n}^k t_j x_j) - (f_k - h_p)(\sum_{j=1, j \neq n}^k t_j x_j)] dt_1 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_k|$$

$$\leqslant 2 \|f_k - h_p\|_\infty.$$

Or $\lim_{p \to +\infty} \|f_k - h_p\|_\infty = 0$, donc

$$\lim_{p \to +\infty} R_k(x_n)(h_p) = R_k(x_n)(f).$$

- Par linéarité de R_k, si $x=\sum_{n=1}^k a_n x_n$:

$R_k(x)(f)=\sum_{n=1}^k a_n R_k(x_n)(f)=\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^k a_n R_k(x_n)(h_p)=\lim\limits_{p\to+\infty} R_k(x)(h_p)$. Cependant, on vient de voir que $\forall p\in\mathbf{N}, |R_k(x)(h_p)|\leqslant \|f\|_L\times\|x\|$, d'où, en passant à la limite lorsque $p\to+\infty$: $|R_k(x)(f)|\leqslant\|f\|_L\times\|x\|$. Ceci valant pour toute $f\in Lip_0(X)$, on en déduit que $\forall x\in E_k, \|R_k(x)\|\leqslant\|x\|$, puis que

$$\|R_k\|\leqslant 1.$$

VI.5.a Soit $f\in Lip_0(X)$; d'après le théorème de Fubini, comme $\int_0^1 dt_{k+1}=1$:

$$R_k(x_n)(f)=\int_{[0,1]^k}[f(x_n+\sum_{j=1,j\neq n}^k t_jx_j)-f(\sum_{j=1,j\neq n}^k t_jx_j)]dt_1...dt_{n-1}dt_{n+1}...dt_{k+1}.$$

- D'où

$$\begin{aligned}|R_{k+1}(x_n)(f)-R_k(x_n)(f)|&=|\int_{[0,1]^k}[f(x_n+\sum_{j=1,j\neq n}^{k+1} t_jx_j)-f(x_n+\sum_{j=1,j\neq n}^{k} t_jx_j)\\&-f(\sum_{j=1,j\neq n}^{k+1} t_jx_j)+f(\sum_{j=1,j\neq n}^{k} t_jx_j)]dt_1...dt_{n-1}dt_{n+1}...dt_{k+1}|\\&\leqslant 2\|f\|_L\|x_{k+1}\|\int_{[0,1]^k} t_{k+1}dt_1...dt_{n-1}dt_{n+1}...dt_{k+1}\leqslant 2\|f\|_L\|x_{k+1}\|.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute $f\in Lip_0(X)$, il vient :

$$\|R_{k+1}(x_n)-R_k(x_n)\|\leqslant 2\|x_{k+1}\|.$$

Remarque : Comme $\int_{[0,1]^k} t_{k+1}dt_1...dt_{n-1}dt_{n+1}...dt_{k+1}=\frac{1}{2}$, on a même :

$$\|R_{k+1}(x_n)-R_k(x_n)\|\leqslant\|x_{k+1}\|.$$

VI.5.b Tout d'abord, pour $n\in\{1,...,k\}$ fixé, la question précédente montre que

$$\forall k\geqslant n, \|R_{k+1}(x_n)-R_k(x_n)\|\leqslant 2^{-k}.$$

La série $\sum_{k\geqslant n} R_{k+1}(x_n)-R_k(x_n)$ converge ainsi absolument dans $Lip_0(X)^*$ complet, donc converge : cela revient à dire que la suite $(R_k(x_n))_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans $Lip_0(X)^*$.

- Soit à présent $x=\sum_{n=1}^k a_nx_n\in E_k$ et $l\geqslant k$; par linéarité de R_l : $R_l(x)=\sum_{n=1}^k a_nR_l(x_n)$ (bien défini, puisque $E_k\subset E_l$). Or ce qui précède établit que, pour tout $n\in\{1,...,k\}$, chaque suite $(R_l(x_n))_{l\geqslant k}$ converge ; ainsi : la suite $(R_l(x))_{l\geqslant k}$ converge dans $Lip_0(X)^*$.

VI.6.a Soit $(x,x',\lambda,\lambda')\in C^2\times\mathbf{R}^2$; si $x\in E_k$ et $x'\in E_{k'}$, avec par exemple $k\geqslant k'$, alors $\forall l\geqslant k$: $R_l(\lambda x+\lambda'x')=\lambda R_l(x)+\lambda' R_l(x')$, d'où, lorsque $l\to+\infty$: $R(\lambda x+\lambda'x')=\lambda R(x)+\lambda'R(x')$. R est bien linéaire.

- De plus, pour $x\in C$, si $x\in E_k$ alors d'après $VI.4$: $\forall l\geqslant k, \|R_l(x)\|\leqslant\|x\|$, d'où, en passant à la limite lorsque $l\to+\infty$ (dans $Lip_0(X)^*$) : $\|R(x)\|\leqslant\|x\|$. Ainsi, R est continue et $\|R\|\leqslant 1$.

- Pour ce même $x\in C$ et avec les mêmes notations, on a, pour $x^*\in X^*$: $\beta(R(x))(x^*)=R(x)(x^*)$. Or, pour tous $l\geqslant k$ et $n\in\{1,...,k\}$:

$$R_l(x_n)(x^*)=\int_{[0,1]^{l-1}}[<x^*,x_n+\sum_{j=1,j\neq n}^l t_jx_j>-<x^*,\sum_{j=1,j\neq n}^l t_jx_j>]dt_1...dt_{n-1}dt_{n+1}...dt_l$$

$$= \int_{[0,1]^{l-1}} < x^*, x_n > dt_1 ... dt_{n-1} dt_{n+1} ... dt_l = < x^*, x_n > .$$

Il en découle, par linéarité de R_l, que :

$$R_l(x)(x^*) = < x^*, x > .$$

De plus, $|R_l(x)(x^*) - R(x)(x^*)| \leqslant \|R_l(x) - R(x)\| \times \|x^*\|$. Comme $(R_l(x))_{l \geqslant k}$ converge dans $Lip_0(X)^*$ vers $R(x)$, il vient :

$$\lim_{l \to +\infty} R_l(x)(x^*) = R(x)(x^*) = < x^*, x > .$$

Ceci valant pour tout $x^* \in X^*$:

$$\beta(R(x)) = J_X(x).$$

- J_X étant une isométrie (cf. $III.4$) et puisque $\|\beta\| = 1$ (cf. $VI.1$), il en découle que, pour $x \in C \setminus \{0\}$:

$$\|x\| = \|J_X(x)\| = \|\beta(R(x))\| \leqslant \|R(x)\| \leqslant \|R\| \times \|x\|.$$

D'où $\|R\| \geqslant 1$, et compte-tenu de ce qui précède, finalement :

$$\|R\| = 1.$$

VI.6.b Par définition des $(x_i)_{i \geqslant 1}$, $C = Vect((x_i)_{i \geqslant 1})$ est dense dans X (cf. $VI.2$). $Lip_0(X)^*$ étant complet, on peut appliquer le $I.1$ à R, 1-Lipschitzienne sur C, et la prolonger en une application 1-Lipschitzienne $\overline{R} : X \to Lip_0(X)^*$. De même qu'au $V.5.b$, on vérifie aisément que $\overline{R}$ est linéaire continue, et que $\|\overline{R}\| = \|R\| = 1$.

- Par ailleurs, par définition de $\overline{R}$, soit $x \in X$ et (y_n) une suite d'éléments de C qui converge vers x ; on a : $\overline{R}(x) = \lim_{n \to +\infty} R(y_n)$. D'après $VI.6.a$: $\forall n \in \mathbf{N}, \beta(R(y_n)) = J_X(y_n)$. Comme J_X et β sont continues, il s'ensuit, lorsque $n \to +\infty$:

$$\beta(\overline{R}(x)) = J_X(x).$$

VI.7 Soit donc Φ une isométrie de $X \to Y$. X étant un espace de Banach séparable, d'après le $V.5.b$ il existe une application linéaire continue $T : Y \to X$, de norme 1, et telle que $T \circ \Phi = Id_X$. Y étant un espace de Banach, d'après le résultat admis, il existe $S : X \to Y$ linéaire continue, de norme $\leqslant 1$, et telle que $T \circ S = id_X$.

- Posons $X' = S(X)$. C'est un sous-espace vectoriel de Y, et si $y \in \overline{X'}$, soit (x_n) une suite d'éléments de X telle que $\lim_{n \to +\infty} S(x_n) = y$. Alors pour tous $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, $\|x_n - x_m\| = \|T(S(x_n)) - T(S(x_m))\| \leqslant \|S(x_n) - S(x_m)\|$ (puisque $\|T\| = 1$). $(S(x_n))$ étant une suite de Cauchy (car convergente), on en déduit que (x_n) également ; X étant complet, (x_n) converge vers $x \in X$, et, S étant continue : $y = S(x) \in X'$. X' est donc fermé.

- Enfin, pour tout $x \in X$: $\|x\| = \|T(S(x))\| \leqslant \|S(x)\| \leqslant \|x\|$ (car $\|T\| = 1$ et $\|S\| \leqslant 1$). D'où $\|S(x)\| = \|x\|$: S est une isométrie, et X' est bien un sous-espace vectoriel fermé de Y linéairement isométrique à X, ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques pour l'Informatique.

5.1 Organisation des épreuves 2011

Pour les candidats de l'option D, des changements de modalités sur les leçons de mathématiques sont intervenus lors du concours 2009. Ces candidats tirent un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre, d'analyse et de probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours.

Tous les candidats tirent un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plait.

À l'issue de la période de préparation qui dure 3 heures pour "Analyse et Probabilités" et 3h30 pour l'épreuve "Algèbre et Géométrie" ou "Mathématiques pour l'Informatique" (cette extension de 30mn est due au temps de préparation pour l'épreuve "Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable", voir le chapitre 7) durant laquelle le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres ouvrages (avec un numéro ISBN et non annotés) mais n'a pas accès à Internet (ni bien-sûr à son téléphone portable ou tout autre objet électronique !), le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages A4 ***au maximum*** et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. *Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs.* Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement sur le plan les développements proposés.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan ».

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve.

5.1.1 Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **8 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan.

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. La formalisation mathématique doit être soignée et l'utilisation des symboles mathématiques correcte. Le jury conseille vivement aux candidats de soigner tant leurs écrits que leur expression orale. ***Le plan doit être maîtrisé***, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes, les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Toutefois il peut être utile d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin !

Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon systématique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos.

Le plan est malheureusement rarement commenté. Le candidat se contente trop souvent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Parfois le candidat, se met à parler extrêmement rapidement ce qui rend incompréhensible les mathématiques présentées. Si le candidat énonce un théorème particulièrement difficile, il faut qu'il soit *contextualisé* en montrant comment il répond à des problématiques naturelles de la leçon ou en donnant des applications internes ou externes de la théorie dont il est issu.

La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Insistons sur le fait que la recopie de plans disponibles sur Internet ou dans des livres spécialisés, ne constitue pas un travail suffisant de préparation du concours. L'exposé oral ne peut être maîtrisé s'il ressemble à une récitation. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon ; les titres des leçons définissent un champ clair qu'il faut traiter entièrement. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

À la fin de cette présentation, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat. On peut aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements eu égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé, s'il présente un développement non maîtrisé ou mal compris ou exposé trop rapidement. Il faut toutefois veiller à rester au niveau de l'Agrégation ; les développements de niveau d'une classe de Terminale ou d'une première année post-bac ne peuvent constituer une proposition acceptable.

Le jury demande au candidat de présenter *deux développements au moins*. Ceux-ci doivent être clairement mentionnés sur le plan écrit et non pas vaguement évoqués à l'oral. Le candidat doit préciser ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre. Le candidat dispose de 15mn (maximum) pour mener à bien ce développement. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat demandera aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Le jury souhaite, dans la mesure du possible, que le candidat efface le moins possible le tableau pendant cette période.

Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut Ître opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté.

Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou étapes de ce dernier. Le jury aimerait avoir une petite explication de la démarche au début du développement. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury !

Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation d'un développement est lourdement sanctionnée ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé.

On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Rappelons que le développement doit être en rapport avec le sujet traité, la leçon présentée et le plan écrit. Tout hors sujet est sévèrement sanctionné. L'utilisation d'un résultat non présent dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme, soit-disant admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explications convaincantes. Dans le cas d'un développement ambitieux, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury.

Comme mentionné précédemment le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve* et ses notes manuscrites produites durant la préparation, uniquement durant la première phase de l'interrogation dite « présentation du plan, mais il ne pourra les utiliser pendant le développement.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan présenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. De manière générale, il faut éviter de dépasser largement son niveau. Pour assimiler les notions il faut, durant l'année de préparation, se demander si on est capable de les mettre en œuvre sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, si on a réfléchi à des exemples ou des contre-exemples. Le candidat doit être conscient que s'il met un énoncé dans son plan, il doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme évidentes auxquelles il doit répondre avec précision, et à des calculs éventuels sur ce point.

Une fois de plus, insistons sur le fait qu'il est essentiel de bien maîtriser ce que l'on propose.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiate. Le but est plutôt de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être compris comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager. *Il doit au contraire rester attentif aux suggestions du jury* ; la qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Pendant cette discussion le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Rappelons que l'objet du concours est de recruter de futurs enseignants.

5.1.4 Rapport détaillé sur les épreuves orales

Le jury suggère la lecture des rapports de ces cinq dernières années. Les commentaires précis sur les leçons y restent d'actualité.

Voici quelques remarques concernant certains groupes de leçons de la session 2011.

Les candidats de l'option D consulteront la liste *ad hoc* des titres (repérés par un numéro unique) reprenant ceux de l'oral des options A,B, C, en algèbre et analyse.

Leçons d'Algèbre et Géométrie

Les leçons **150** et **151**, bien que présentes sur la liste des *leçons d'algèbre et de géométrie*, ne figuraient pas dans les tirages de la session 2011, mais pourront figurer dans ceux de la session 2012.

Les leçons **118** et **121** ne figureront pas dans la liste des tirages de la session 2012. Pour la session 2012 la Leçon **117** évoluera en "*Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées ($n \geqslant 2$) ; aspects théoriques et* *applications.*", leçon **124** évoluera en "*Polynômes d'endomorphisme en dimension finie ; applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.*", la leçon **125** évoluera en "*Sous-espaces stables d'un endomorphisme ou d'une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications.*" et la leçon **140** évoluera en "*Systèmes linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.*"

Voici quelques points plus spécifiques.

Leçons sur les groupes. Les actions de groupes sont centrales dans l'ensemble de ces leçons. L'introduction de la notion de représentations dans le programme de l'agrégation procède de cette logique pédagogique. Elle permet d'une part de moderniser l'approche algébrique et d'autre part de faire un pont entre des domaines variés y compris très appliqués (dans le traitement des images numériques par exemple).

Les notions de quotients et de morphismes interviennent de manière substantielle pour la compréhension des structures des groupes.

L'ensemble des leçons doit comporter des exemples illustrant les différentes approches.

Le groupe symétrique, le groupe linéaire, le groupe des racines de l'unité et les groupes de petits cardinal doivent avoir été manipulés sous différents aspects.

Leçons sur les anneaux. L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est clairement une source de réflexions et d'études pour les candidats ; les connexions dans le programme sont nombreuses et seront toujours utiles dans la pratique professionnelle des futurs enseignants. Les anneaux de polynômes, la notion d'idéal et d'irréductibles, la construction des corps, les séries formelles et les applications à la combinatoire doivent être maitrisés.

Il faut donc trouver dans ces leçons un bon compromis entre théorie, exemples et applications. Le niveau d'exposition peut être très varié ; il est toujours préférable de viser le juste équilibre.

Leçons d'algèbre linéaire. Les fondements doivent être parfaitement maîtrisés (dimension, déterminant, rang, opérations sur les systèmes et les matrices).

La réduction des endomorphismes doit avoir été étudiée en profondeur ... et comprise. Les aspects plus globaux (similitude, algèbre $K[f]$, semi-simplicité, exponentielle de matrice, *etc.*, liens avec les représentations), les aspects algorithmiques ou topologiques viennent dans un second temps. Ils permettent une compréhension plus synthétique des objets élémentaires.

Leçons de géométrie. Les leçons de géométrie sont souvent délaissées. C'est bien anormal pour de futurs professeurs qui auront à enseigner la géométrie qui fournit de nombreux exemples et applications des notions algébriques, par exemple en théorie des groupes. Les leçons d'exemples devraient être construites à partir des connaissances théoriques de candidat. Ces leçons abordent des aspects très variés des mathématiques. Il faut donc recentrer autour de la géométrie (dans un sens large) les outils mathématiques développés dans d'autres champs (techniques euclidiennes, résultant, formes quadratiques, convexité, *etc.*).

Leçons d'Analyse et Probabilités

Le jury rappelle que le chapitre des probabilités a vocation à se développer dans l'enseignement secondaire et post-baccalauréat. Les candidats à un futur poste d'enseignant en mathématiques doivent maîtriser les notions centrales de ces thématiques. Il y a cinq leçons de probabilités qui peuvent toutes se traiter à un niveau raisonnable. Le jury encourage les candidats à choisir ces leçons.

Généralement, le jury apprécie que les candidats soient en mesure d'appliquer les résultats élémentaires mais fondamentaux de leur leçon, par exemple : justifier une permutation limite-intégrale ; résoudre une équation différentielle simple ; étudier la convergence d'une suite ou d'une série (numérique, de fonctions, de variables aléatoires).

De nombreux candidats ont présenté au jury d'analyse des plans raisonnables, suivis d'un développement correctement mené, car soigneusement appris et révisé pendant les trois heures de préparation. Cependant, la première question du jury a souvent révélé une incompréhension réelle du sujet traité. Rappelons aux candidats qu'ils peuvent s'attendre, après leur plan, à quelques questions portant sur un cas particulièrement simple d'application du théorème présenté, ou sur des situations proches qui soulignent l'utilité des hypothèses ou la portée des arguments de la preuve qu'ils viennent de développer. Si ces questions restent sans réponse, le jury sera conduit à la conclusion que le candidat n'a fait que restituer mécaniquement quelques pages apprises à la va-vite et sa note s'en ressentira. Il est attendu des candidats qu'ils aient compris les notions mathématiques au programme de l'agrégation. Il est légitime qu'un candidat ignore certains résultats, le jury ne prétend pas à l'omniscience et ne l'attend pas des candidats. Cependant, un candidat qui se montre capable de proposer des pistes de solution aux questions qu'on lui pose impressionne très favorablement le Jury. Il faut donc apprendre, mais surtout comprendre.

Il est également souhaitable que les candidats gardent à l'esprit la nature des objets qu'ils sont en train de manipuler : quantités numériques, variables muettes, indéterminées, inconnues, paramètres, vecteurs, fonctions, opérateurs.... Cela est assez sensible en analyse où par exemple, la question "à quel espace appartiennent les deux termes de votre équation ?" peut se révéler embarrassante. Le calcul différentiel est particulièrement délicat à cet égard, et on recommande aux candidats qui préparent l'agrégation de s'astreindre à la rigueur dans les leçons correspondantes.

Voici quelques points plus spécifiques concernant les leçons.

203 - Utilisation de la notion de compacité. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*), sans proposer des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, *etc.*).

204 - Connexité. Exemples et applications. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. Bien distinguer connexité et connexité par arcs.

205 - Espaces complets. Exemples et applications. Le théorème de Baire trouve naturellement sa place dans cette leçon, mais il faut l'accompagner d'applications. Rappelons que celles-ci ne se limitent pas aux théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé, mais qu'on peut évoquer au niveau de l'agrégation l'existence de divers objets : fonctions continues nulle part dérivables, points de continuité pour les limites simples de suites de fonctions continues, vecteurs à orbite dense pour certains opérateurs linéaires, etc.

206 - Théorèmes de points fixes. Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses.

207 - Prolongement de fonctions. Les candidats exploitent rarement toutes les potentialités de cette leçon très riche. Le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, ainsi que le théorème de Hahn-Banach, le prolongement de fonctions C^∞ sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique, l'intégrale de Riemann, la transformation de Fourier sur L^2 et l'extension des fonctions Lipschitziennes définies sur un sous-ensemble (pas nécesairement dense) d'un espace métrique.

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée.

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)e_n$ et $||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)^2$ en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence.

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications. Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur $d^k f(a)$ définissent des applications k-linéaires (sur quel espace ?). Il faut savoir calculer sur des exemples simples, la différentielle d'une fonction, ou effectuer un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction.

217 - Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples. Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, *etc.*) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. En ce qui concerne les surfaces de $\mathbf{R}^3$, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques.

Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

218 - Applications des formules de Taylor. Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $||f^{(k)}|| \leqslant 2^{k(n-k)/2}||f||^{1-k/n}||f^{(n)}||^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ème sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

219- Problèmes d'extremums. Bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence).

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions. Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général on peut évoquer les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = sin(u_n)$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués. La méthode du gradient ou les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Siedel fournissent des exemples naturels et utiles de suites vectorielles. Le théorème de Sharkovski sur l'itération des fonctions continues sur un intervalle est un résultat récent qui peut se traiter entièrement au niveau de l'agrégation, et il trouve sa place dans cette leçon.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Un plan découpé en deux parties (I - Continuité, II - Dérivabilité) n'est pas le mieux adapté. Enfin les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, *etc*), sont les bienvenues.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Les candidats sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités. La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. La dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel du plan. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, etc...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.

234 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$).

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications. Cette leçon ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. La transformation de Fourier des distributions tempérées trouve sa place ici. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications (dans la direction du théorème de Paley-Wiener, par exemple).

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Il faut éviter de ne parler que de dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce (ou utilise) ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes. Les séries entières fournissent une méthode puissante d'extension des fonctions au plan complexe, puis au calcul fonctionnel et cela peut être évoqué. Le comportement au bord du disque de convergence (Théorèmes d'Abel, de Tauber et de Hardy-Littlewood) fournit de bons thèmes de développement.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !

246 - Série de Fourier. Exemples et applications Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet *etc*...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier.

Les leçons 254, 255 et 256 qui portaient sur la théorie des distributions et son utilisation ont été choisies par quelques candidats, qui étaient souvent bien préparés et dont la présentation s'est avérée satisfaisante.

Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes, et se placent au niveau de ce qu'un cours de M1 standard sur le sujet peut contenir. Ainsi, il peut être utile d'avoir compris pourquoi la métrique de l'espace de Schwartz est définie par une suite de semi-normes et ne peut pas l'être par une norme unique, mais aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Les candidats sont invités à présenter des situations simples où les distributions sont effectivement utilisées, et à avoir les idées claires sur ce qu'est le support d'une distribution ou son ordre. La dérivation au sens des distributions des fonctions d'une seule variable réelle fournit déjà une problématique intéressante. Des applications simples aux équations aux dérivées partielles linéaires sont également les bienvenues.

5.2 Remarques sur l'épreuve de leçon de mathématiques - Option D

Dans cette épreuve, le candidat tire un couple de sujets au sein d'une liste d'une quarantaine de sujets d'algèbre et d'analyse extraite de la liste générale des autres options du concours. **Il n'y a donc plus nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse !** Il peut y avoir deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Loi binomiale* et *Fonctions monotones*. Le nouveau programme précise en effet :

> *Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.*

Il est donc impératif que les candidats ajustent leur préparation à cette nouvelle organisation.

Le jury a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient strictement identiques.

Notons toutefois que lorsqu'ils avaient le choix, les candidats ont le plus souvent préféré les sujets d'algèbre à ceux d'analyse. Nous conseillons vivement aux futurs candidats de cette option de ne pas négliger leur formation en analyse.

Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options, et le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à ce point.

5.3 Remarques sur l'épreuve de leçon d'informatique - Option D

Cette épreuve a évolué cette année : la liste des leçons a été refondue. Essentiellement, les leçons de *programmation* (langages typés, sémantique, typage, compilation) ont été retirées de la liste ainsi que certaines leçons élémentaires d'*algorithmique*. Par contre, la liste de leçons a été enrichie en ce qui concerne la *logique*, en particulier son application aux preuves de programme. Nous espérons que ces modifications contribueront à faciliter la tâche des préparateurs en recentrant les sujets sur 4 domaines bien identifiés : algorithmique, calculabilité et complexité, langages et automates, logique et preuves.

De manière générale, le jury a plutôt été heureusement surpris par la qualité de certaines leçons présentées, notamment parmi les leçons les plus avancées, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours. Ceci est particulièrement net dans la bonne focalisation des présentations. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants mais le niveau est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes.

Organisation de la leçon- Une tentation bien compréhensible pour les candidats est de *mathématiser* les sujets de leçons en oubliant l'aspect informatique. Ainsi, sur le sujet *Langages algébriques*, il était tentant de faire une leçon centrée sur un aspect théorique unique comme le Lemme d'itération d'Ogden, en oubliant complètement les aspects plus concrets de ce domaine et ses multiples applications, par exemple à l'analyse syntaxique et aux compilateurs.

Les candidats de niveau moyen ont en effet souvent montré des connaissances assez solides pour les résultats théoriques, mais par contre un manque de réflexion manifeste en ce qui concerne leurs applications et exemples concrets de mise en oeuvre.

Le jury tient donc à rappeler qu'il s'agit bien d'une épreuve d'*informatique fondamentale*, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon.

La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsqu'il s'agit d'outils sophistiqués comme ceux de la théorie de la calculabilité ou de la théorie des types, s'apparente donc à un *hors-sujet*. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été affinés en conséquence. Les titres des leçons concernant des modèles formels de l'informatique sont maintenant libellés en mentionnant explicitement *exemples et applications*.

Les deux questions-clés de cette épreuve sont toujours les mêmes.
- À quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Pouvez-vous décrire quelques exemples pertinents de son application concrète ?
- La complexité ou le coût de son utilisation sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Interaction avec le jury- Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. En informatique, cette interaction ne prend habituellement pas la forme d'un exercice d'application. Il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les *exemples d'application* de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un *dialogue* avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une *occasion privilégiée* pour le candidat de montrer ses connaissances ! À lui de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Organisation de l'épreuve de modélisation

Depuis la session 2006 incluse, deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Le jury apprécie en effet que le candidat reste honnête quant à sa compréhension du texte, plutôt que de se lancer dans une présentation des parties du texte qu'il ne comprend absolument pas. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Le jury aura le texte sous les yeux, mais vous devez considérer qu'il ne l'a pas lu.*

Plus précisément, le jury s'attend à ce que le candidat dégage une problématique, en s'inspirant du texte, pour mettre en valeur sa maturité mathématique et ses connaissances. L'interrogation dure une heure, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter (le jury dispose d'écrans de contrôle reproduisant celui du candidat). Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Il appartient au candidat de discuter la mathématisation du problème, en particulier d'expliquer les hypothèses faites lors de la modélisation ou du traitement du modèle, de critiquer ou d'améliorer le modèle, du point de vue de l'adéquation à la réalité, de la généralité, de la rigueur, de la simplicité du traitement mathématique subséquent…

Le jury n'ayant *a priori* pas lu le texte, le candidat commencera par présenter celui-ci. Un plan en début d'exposé est apprécié, annonçant en particulier les propriétés du modèle que le candidat va dégager. Il est important d'expliquer le problème et le modèle, de l'illustrer, ainsi que d'y revenir en fin d'exposé. Le modèle mathématique a-t-il les propriétés attendues ? Des propriétés parasites surprenantes ? A-t-on résolu le problème posé ?

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`.

Il est vivement souhaité que des illustrations informatiques (simulation, résolution numérique ou formelle, cas particuliers éclairants...) soient présentées, mais *il ne s'agit pas d'une épreuve de programmation.* Un programme qui ne fonctionne pas n'est en rien rédhibitoire et le jury appréciera un regard critique du candidat sur une tentative non aboutie. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut en revanche devenir pertinent pour illustrer les insuffisances d'une méthode naïve.

Les suggestions sont facultatives et ne sont là que pour guider la réflexion du candidat sur des points significatifs du texte, ou des exemples utilisables. Certaines d'entre elles sont conçues pour permettre au candidat de comprendre le problème, de «rentrer» dans le modèle.

S'il est exclu de plaquer une démonstration d'un théorème du programme dans l'exposé, les démonstrations mathématiques de certaines assertions du texte sont très appréciées. Lorsqu'une démonstration est ébauchée dans le texte, le candidat peut choisir de la compléter. Il est alors particulièrement apprécié que le candidat précise les point mathématiques nécessaires pour une démonstration rigoureuse. Le candidat peut, tout comme le texte, utiliser des arguments heuristiques s'il les signale comme tels. Cependant le candidat ne doit pas oublier qu'il s'agit d'une épreuve de l'agrégation externe de mathématiques, et qu'un exposé ne comportant aucun argument mathématique précis est vivement déconseillé.

Un travers à éviter à tout prix : la paraphrase linéaire du texte sans aucun apport personnel du candidat, ni mise en perspective, agrémentée de la recopie de toutes les formules rencontrées.

Recommandations du jury

Le jury attache un intérêt particulier à l'effort de modélisation (qu'on peut définir comme le passage du « concret » aux mathématiques), à la mise en perspective des applications présentées, ainsi qu'aux illustrations permises par les moyens informatiques mis à disposition des candidats.

Le principal travers observé chez les candidats est la répétition linéaire du texte, y compris des passages non compris en espérant que le jury ne demandera pas de détails. Rappelons qu'utiliser des notions que l'on ne comprend pas, dans cette épreuve comme dans les autres, est une faute lourdement sanctionnée. Enfin, rappelons qu'*aucun développement n'est attendu.* Le candidat est libre de proposer des démonstrations de résultats utilisés, mais le jury peut les refuser, ou demander au candidat d'en donner seulement les grandes lignes.

Quelques qualités appréciées : prise de distance et d'initiative par rapport au texte, étude d'un exemple ou d'un cas simple pour comprendre le texte et le faire comprendre au jury, simplification ou, à l'inverse, généralisation du problème proposé, étude qualitative ou heuristique, critique du modèle.

Sur le plan

Il est conseillé aux candidats de présenter un plan *succinct* de leur exposé, précisant les moments où ils comptent présenter leurs simulations informatiques. Ceci permet au jury de guider les candidats dans leur gestion du temps.

Sur la présentation

Nous rappelons ici que l'agrégation est un concours visant à recruter des *enseignants.* Ainsi seront appréciés une bonne gestion du tableau, un exposé clair et pédagogique, et une bonne capacité à effectuer des calculs analytiques clairs, corrects et lisibles.

6.2 Utilisation de l'outil informatique

Le jury observe avec plaisir une utilisation plus pertinente de l'outil informatique, due certainement à une meilleure préparation des candidats.

Il est attendu du candidat un commentaire sur les résultats de sa simulation (résultats numériques ou graphiques), mais aussi du code mis en œuvre. Le jury regrette toutefois l'utilisation parfois abusive de « boîtes noires » de simulation au sein de leur programme, qui peuvent être source d'incompréhension sur les sorties.

Rappelons que le candidat ne doit pas avoir peur de présenter un programme non abouti. Le jury est sensible à la démarche employée.

D'un point de vue purement pratique, il est dommage de voir des candidats gênés durant l'épreuve de modélisation tout simplement parce qu'ils ne savent pas sauvegarder leur travail sur fichier, certains -rares heureusement- fermant directement l'application en ignorant les messages d'avertissement du logiciel utilisé et perdant ainsi tout ce qu'ils ont fait. Rappelons à ce sujet que le site du jury de l'agrégation décrit dans ses pages les logiciels utilisés et propose des outils pour qu'un candidat puisse se familiariser avec l'environnement proposé (voir http ://agreg.org/Agreg/installation.html).

6.3 Option A : probabilités et statistiques

L'exposé doit être, idéalement, un dosage **cohérent** entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. **Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère dynamique de l'exposé apporte une valeur ajoutée conséquente sur l'évaluation.**

Connaissance du programme

Lors de la discussion avec le candidat, le jury peut interroger celui-ci sur la totalité du programme. En particulier, il est **presque systématique** que le jury pose des questions de nature statistique à partir des textes à coloration probabiliste et inversement. Un nombre croissant de textes mêlent d'ailleurs les deux aspects. Le jury encourage donc les candidats et les préparateurs à tenir compte de l'ensemble du programme. Encore trop de candidats éprouvent des difficultés à formaliser précisément des notions qui font partie du programme de l'option, ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie, et analyse pour l'étude des modèles.

• Probabilités

- La loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale sont des points fondamentaux en probabilités comme en statistiques. Il convient d'en connaître les hypothèses précises, et de ne pas confondre les différents types de convergence. **Le lemme de Borel-Cantelli est également à connaître et à maitriser.**
- Les propriétés fondamentales des chaînes de Markov sont souvent mal connues : classification des états, conditions de convergence vers la loi stationnaire (irréductibilité, récurrence positive, apériodicité), etc. *Certains candidats ont du mal à réaliser qu'une suite i.i.d. de variables aléatoires constitue un exemple de chaîne de Markov, et que la loi des grands nombres usuelle est un cas particulier de celle pour les chaînes de Markov.* Les candidats gagneraient à utiliser plus souvent une représentation graphique des chaînes de Markov manipulées.
- La définition de l'espérance conditionnelle et son interprétation en terme de projection orthogonale échappent à de trop nombreux candidats.
- Les théorèmes du programme sur la convergence des surmartingales positives ne sont pas suffisamment employés, alors qu'ils permettent des démonstrations convaincantes et simples dans de nombreux modèles.

• **Statistiques**

Le niveau moyen en statistique semble avoir progressé depuis quelques années (utilisation d'histogrammes, recours systématique à des expériences de type Monte-Carlo, construction d'intervalles de confiance, connaissance du modèle linéaire gaussien, etc.). Cependant,

– Les notions élémentaires de statistique paramétrique ne sont pas toujours clairement définies. Les candidats doivent connaître les problématiques d'estimation (notion de biais et de consistance, **d'estimation par maximum de vraisemblance**) et de test d'hypothèses.
– **Le jury a observé qu'il semble souvent plus important aux candidats qu'un estimateur soit sans biais plutôt qu'il soit convergent, alors que la convergence devrait primer (un estimateur doit d'abord "estimer"). De même la notion de vitesse de convergence d'un estimateur est souvent inconnue des candidats.**
– *Le jury a observé ces dernières années une amélioration sur la connaissance des principes de construction d'un intervalle de confiance.*
– Dans le cadre des tests d'adéquation, les candidats éprouvent des difficultés à motiver le choix du test qu'ils proposent (chi-deux, Kolmogorov-Smirnov, . . .).
– *Le lemme de Slutsky est souvent ignoré ou mal énoncé.* **Le Lemme de Slutsky est désormais souvent cité par les candidats, mais uniquement dans sa forme "produit de suites de variables aléatoires convergentes". Il serait plus intéressant de le connaître sous sa forme "couple de suites de variables aléatoires convergentes".**
– *La notion de maximum de vraisemblance est souvent ignorée.*

Illustrations informatiques

– Les logiciels de calcul numérique comme Scilab, Octave, et R sont particulièrement adaptés à cette option, tandis que les logiciels de calcul formel comme Maple le sont beaucoup moins. Les candidats ainsi que les préparateurs doivent en tenir compte.
– Nos futurs enseignants gagneraient à apprendre à utiliser des logiciels libres plutôt que des logiciels coûteux du commerce dont les sources sont tenues secrètes.
– Le jury attend des candidats qu'ils accompagnent leurs illustrations informatiques d'explications d'au moins deux ordres : d'une part sur la nature de ce qui est montré (que sont ces nombres ? Qu'y a-t-il en abscisse et en ordonnée dans ce graphique ? Quelles données ont permis de réaliser cet histogramme ?) et d'autre part sur les aspects mathématiques qu'elles illustrent (par exemple une convergence presque sûre, une convergence en loi, l'adéquation d'une loi empirique à un résultat théorique).
– Les illustrations informatiques sont souvent une occasion propice à l'utilisation de tests ou d'intervalles de confiance, pour vérifier que les résultats expérimentaux sont conformes aux résultats théoriques. Sans attendre un développement systématique à ce sujet, le jury apprécie que le candidat mette en valeur sa connaissance de ces outils et précise par exemple si l'écart entre des valeurs empiriques et des valeurs théoriques lui paraît acceptable ou non.
– Les candidats dont les programmes informatiques ne sont pas aboutis ou ne produisent pas les résultats escomptés sont néanmoins invités à expliquer leur démarche et ce qu'ils envisageaient de mettre en œuvre pour illustrer le texte.
– **De nombreux textes proposent de travailler sur un jeu de données qui est fourni. Malheureusement trop peu de candidats exploitent cette possibilité.**
– **Pour illuster la convergence d'une suite de variables aléatoires lorsque $n \to \infty$, les candidats ont souvent recours à des simulations qui régènerent tout l'échantillon pour chaque valeur de n choisie (avec par exemple n variant de 1 à 1000) ; ceci ne permet pourtant pas d'exhiber une convergence trajectorielle. Il est plutôt conseillé de générer un seul échantillon de grande taille en début de programme.**

Modélisation

Il est rappelé que même si la plupart des textes s'appuient sur des problèmes issus de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle mathématique proposé, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et, à un niveau tout à fait élémentaire, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Le jury s'attend à ce que le candidat ne se contente pas d'un exposé qualitatif et développe, fût-ce partiellement, certains aspects purement mathématiques du texte. A contrario, les interprétations qualitatives du comportement des modèles sont parfois absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème.

6.4 Option B : Calcul Scientifique

Les quarante premières minutes de l'épreuve de modélisation sont laissées à l'initiative du candidat qui peut les exploiter à sa guise pour restituer et enrichir le contenu du texte fourni. La qualité de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. A l'arrivée du candidat, le jury recommande d'indiquer en préambule de l'épreuve, le plan suivant lequel la présentation sera organisée ; ce rapport donne l'occasion de conseiller de suivre cette recommandation ! Un exposé réduit à une simple paraphrase du texte ne peut que conduire à une évaluation négative. Le candidat est invité à mobiliser ses connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir son propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Cependant la stratégie consistant à tirer prétexte du texte pour réciter une leçon n'ayant qu'un lointain rapport avec le document est considérée comme hors sujet et est lourdement pénalisée. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien. A un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

L'édition 2011 du concours a malheureusement vu le retour de candidats mal préparés, peu au fait des exigences de l'épreuve, et esquivant le recours à l'outil informatique pour illustrer leur propos et mettre en situation certains aspects du texte. Le jury rappelle donc que la capacité à amorcer une discussion scientifique par des simulations numériques fait partie de ses attentes. La note finale tient compte de cette capacité. Il convient de rappeler aussi qu'une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standard des logiciels fournis comme Matlab, Octave ou Scilab. La présentation des illustrations informatiques ouvre fréquemment la discussion soit sur des commentaires critiques des résultats obtenus et du modèle, soit sur les principes et les propriétés des méthodes numériques du programme (résolution de systèmes linéaires ou non, recherche de valeurs propres, résolution d'EDO, intégration numérique,...).

De manière plus précise, le jury souhaite mettre en exergue des éléments du programme qu'il serait heureux de voir mieux maîtrisés :

– Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel : le triptyque "discussion du caractère bien posé, au moins localement en temps/passage du local au global grâce à des estimations sur la solution (conservation, dissipation)/propriétés qualitatives (par exemple analyse de stabilité linéaire)" devrait être un réflexe à la vue de la moindre équation différentielle ordinaire. Rappelons que le théorème de Cauchy-Lipschitz est l'outil fondamental qu'il faut absolument connaître à ce propos. Beaucoup

trop de candidats ne maîtrisent pas les bases du programme sur ces points. Traduire une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel d'ordre un constitue pour trop de candidats un obstacle infranchissable. La dérivation de fonctions de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^p$ manque trop souvent de dextérité.
- Schémas numériques pour les équations différentielles : le jury considère la description du schéma d'Euler comme un élément central du programme. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ce schéma, ses propriétés de stabilité, consistance et convergence, les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Beaucoup trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution au temps t_n témoigne souvent d'une compréhension déficiente du sujet. Afin de limiter ces confusions , le jury recommande de prohiber toute utilisation de symboles comme $\simeq$ ou $\sim$ pour relier l'évaluation de la solution aux points de discrétisation et les éléments de la suite numérique définie par le schéma.
- Intégration numérique : le jury s'étonne que nombre de candidats définissent l'ordre d'une méthode d'intégration numérique comme étant le degré des polynômes pour lesquels la formule d'approximation est exacte mais se révèlent totalement incapables de relier cette information à la qualité de l'approximation de la méthode correspondante.
- Algèbre linéaire : le jury déplore un manque d'aisance généralisé concernant le calcul matriciel et trop de démonstrations reposant sur des arguments élémentaires d'algèbre linéaire sont excessivement laborieuses. Les résultats les plus classiques liés à la décomposition spectrale sont méconnus de même que les techniques de base de l'algèbre linéaire numérique (méthode de la puissance, résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss...)
- Optimisation : beaucoup de candidats ont les plus grandes difficultés à reconnaître, au détour de certains textes, l'application de résultats de base sur la minimisation de fonctionnelles convexes. L'optimisation sous contrainte semble faire l'objet d'une impasse à peu près totale et le théorème des extrema liés, partie intégrante du programme général du concours, est méconnu.
- Généralités : la méconnaissance de l'alphabet grec laisse toujours une impression négative. Par ailleurs, le jury s'estime en droit d'attendre un minimum de culture scientifique et s'alarme du nombre de candidats ignorant par exemple le principe fondamental de la dynamique ou se trouvant incapables de la moindre analyse dimensionnelle visant à identifier l'homogénéité des différents termes d'une équation. Le jury conseille de ne manier les notations o et $\mathcal{O}$ que sous la condition exclusive d'en connaître la signification. Le jury demande aux candidats de supprimer de leur vocabulaire "approximer" au profit d'"approcher".

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

Remarques générales.

Exposé. Rappelons ce qui est attendu : le candidat doit utiliser le texte comme point de départ pour construire son propre discours sur un problème qui lui est soumis, et développer un traitement mathématique dudit problème en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, fournis par le texte. Savoir aller plus loin que le texte (en particulier en saisissant les perches fournies dans la rubrique Suggestions pour le développement) est un plus très net. Savoir, à l'issue du traitement mathématique, revenir sur le problème de départ et indiquer dans quelle mesure (totale ou partielle, satisfaisante ou pas) il est résolu devrait être un réflexe pour les candidats, dans la mesure où il s'agit de la conclusion naturelle d'un tel exposé.

En matière d'exposition, il est utile de rappeler que le fait que l'épreuve ne porte pas le nom de leçon n'est pas une invitation à oublier les règles élémentaires d'exposition. Tout d'abord, le contexte du concours implique qu'il s'agit de se placer dans une situation pédagogique. Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. L'exposé doit donc être soigneusement préparé, à la manière d'un cours sur le sujet du texte.

Quelques travers à proscrire (liste non limitative) :

– les formulations du genre "l'auteur dit que", "le texte dit que", sauf de façon très exceptionnelle pour pointer une affirmation que l'on souhaite discuter ;
– la lecture du texte sans rien écrire au tableau, ou en n'écrivant que les formules ; comme un discours, un tableau se construit et bien des candidats devraient, dans leur préparation, se confronter en fin d'oral à leur propre tableau ;
– l'improvisation d'un plan à la demande du jury, qui en général se limite à suivre celui du texte et ne se retrouve pas dans la structure de l'exposé.
– faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration quand ce n'est pas le cas.
– le hors-sujet se raccrochant à un ou deux mots-clés du texte, prétexte à présenter une partie de plan ou un développement préparé pour une leçon de mathématiques générales ou analyse-probabilités.

Enfin, rappelons encore une fois que la lecture (au sens premier du mot) du texte, ce dernier tenu en main, et en changeant un mot toutes les trois phrases, produit généralement les pires planches qui soient.

Les démonstrations fournies dans le texte sont souvent des esquisses qui doivent être développées. La présentation à l'identique de la démonstration du texte au jury va nécessairement révéler deux choses : d'une part, le fait que le candidat ne l'a probablement pas réellement comprise, d'autre part le fait qu'il n'est pas capable d'en repérer les manques. Un regard critique ("il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire") permet déjà d'éviter le second écueil, qui est presque le plus grave.

Illustration informatique. La maîtrise technique de l'exercice de l'illustration informatique est en progrès. En revanche, il semble que le nombre de candidats refusant de jouer le jeu et arrivant sans illustration est en légère recrudescence. Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, qui n'est pas un exercice de programmation, mais un exercice de réflexion sur comment utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Cela peut se faire de façon très variée.

Il appartient au candidat d'expliquer au jury en quoi ce qu'il présente illustre bien le contenu du texte, et est pertinent dans ce contexte. Un tel discours est rare, mais pourtant bien plus intéressant que le discours souvent entendu (commentaire linéaire du code façon 'ici j'ai fait une boucle for' ou équivalent).

Le jury ne saurait trop insister sur le fait qu'il n'est pas réaliste de découvrir le système de calcul de son choix le jour de l'épreuve. Même pour les candidats n'étant pas inscrits à une préparation, dans chacune des options, des logiciels gratuits sont proposés qui permettent de pratiquer pendant l'année, et de se poser, au minimum, la question de la manipulation des objets de base rencontrés dans l'option. Devoir le faire le jour de l'épreuve, en situation de stress, en temps limité avec un texte à découvrir en même temps est tout bonnement irréaliste, et l'argument "je n'ai jamais fait d'informatique" ne peut en aucun cas être considéré comme une excuse valable.

Questions. La séance de questions est l'occasion pour le jury d'affiner sa perception du candidat. Elle va lui permettre d'une part de vérifier si certaines erreurs commises en cours d'exposé sont de simples lapsus ou relèvent d'une compréhension erronnée ; elle va aussi permettre de tester davantage le candidat sur les points sur lesquels le jury n'a pas pu se faire une opinion sur le seul fondement de l'exposé. Les questions ne contiennent pas de piège, ce qui ne veut pas dire qu'elles doivent être considérés comme faciles, vues les circonstances de l'épreuve (4h de préparation, 40 minutes d'exposé, plus le stress impliqué par les circonstances) : une question d'apparence élémentaire est, à de très rares exceptions près, élémentaire et il est inutile de chercher des choses fort compliquées en réponse.

Il y a peu de règles à rappeler sur ce point, hormis deux points de bon sens :

- réfléchir, là encore, à l'utilisation du tableau ; bien des candidats cherchent à répondre uniquement de tête, sans rien écrire au tableau, même quand un calcul est clairement requis ;

- ne pas chercher à répondre du tac au tac. Le jury ne l'attend pas particulièrement ; et observer, éventuellement, quelques secondes de réflexion et de prise de recul pour gérer fatigue et stress est un bien meilleur réflexe que de répondre la première chose qui passe par la tête.

Remarques spécifiques sur l'option C.

Contenu mathématique. Le jury regrette que l'algèbre linéaire, qui constitue le coeur du programme de l'agrégation, ne soit pas davantage maîtrisée, à la fois dans ses aspects théoriques et dans ses aspects calculatoires. Peu de candidats savent que la méthode du pivot de Gauss permet de résoudre l'essentiel des problèmes calculatoires de l'algèbre linéaire (rang, résolution de systèmes linéaires, inversion, déterminant). A l'inverse, beaucoup pensent que réduire (diagonaliser ou trigonaliser une matrice) permet de calculer le déterminant ; d'un point de vue théorique, c'est le cas, mais d'un point de vue calculatoire c'est en général très maladroit. En outre, sur le plan conceptuel, il s'agit de deux problèmes de nature fondamentalement différente. Le jury a pu noter dans l'esprit de nombreux candidats une confusion entre trigonaliser une matrice (la réduire sous la forme $P^{-1}TP$) et l'écrire sous forme d'un produit LU de matrices triangulaires. Là encore, la différence conceptuelle est nette, et cette confusion ne devrait pas être faite. Les suites récurrentes linéaires sont toujours aussi mal connues, et plusieurs fois confondues avec les équations différentielles linéaires, avec pour résultat que les candidats écrivent des formules dépourvues de sens.

Le résultant est le parent pauvre de l'option, et sa simple existence est parfois totalement ignorée, souvent méconnue, et le lien avec l'élimination apparaît bien limité dans l'esprit des candidats. La classique présentation univariée de l'objet résultant n'est sans doute pas totalement étrangère à cet état de fait. Idéalement, les candidats devraient connaître les deux difficultés classiques (points ou composantes "à l'infini", correspondant à l'annulation conjointe des termes de tête, et points ou composantes définies sur la clôture algébrique). L'interprétation géométrique du résultant dans un problème d'élimination comme permettant de calculer la projection d'une intersection est un support précieux à l'intuition, et permet d'illustrer les deux pathologies ci-dessus. Elle gagnerait à être mieux connue des candidats. Faute de mieux, le jury est déjà heureux de voir des candidats avoir une relative maîtrise opérationnelle du résultant comme outil permettant de calculer des (sur-ensembles d') intersections de courbes ou de surfaces, et de mener ce processus à bien. Les candidats montrant leur maîtrise du sujet ont pu obtenir de très bonnes notes.

Plus largement, les anneaux de polynômes en plusieurs variables et leurs propriétés arithmétiques posent de gros problèmes aux candidats, sur des questions élémentaires comme : peut-on factoriser un polynôme en n variables ? Le pgcd existe-t-il ? Peut-on faire une division euclidienne dans cet anneau ? Par ce polynôme, etc.

Les connaissances en arithmétique sont dans l'ensemble satisfaisantes, avec un point noir : la vision "naïve" de l'algorithme d'Euclide étendu comme "remonter les identités déduites de l'algorithme d'Euclide" trouve très vite ses limites. Comme écrit l'an passé, la vision matricielle consistant à écrire une étape de l'algorithme d'Euclide

$$\begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix}$$

fournit immédiatement, pour tout i, r_i comme combinaison linéaire des entiers de départ. L'exponentiation rapide, longtemps bien maîtrisée, semble disparaître quelque peu de la culture des candidats, au grand regret du jury. Enfin, beaucoup de candidats ne sont pas à l'aise avec la manipulation des congruences, et se réfugient dans des égalités qui, fréquemment, alourdissent considérablement les calculs et les arguments.

La complexité des opérations élémentaires ne fait pas non plus partie du tout de la culture des candidats. Il s'agit pourtant d'un sujet où il est important d'avoir des repères pour comprendre la pertinence de certains choix faits dans les textes. Il devrait être à la portée des candidats de retenir que l'addition est linéaire en la taille de l'entrée, le reste de l'arithmétique (multiplication, division, pgcd, Euclide étendu) quadratique dans le cas des nombres et des polynômes, et que les algorithmes standard (multiplication, pivot de Gauss, inversion, résolution de système linéaire) sur les matrices ont un coût cubique (cette fois en la dimension de la matrice).

Informatique. Outre les remarques générales, le jury incite vivement les candidats à se poser, avant l'oral, la question spécifique de la représentation et de la manipulation, souvent un peu délicate, des éléments des corps finis non premiers dans le logiciel de leur choix. Sur ce point également, le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les logiciels orientés vers le calcul réel, en précision fixée, peuvent s'avérer peu adaptés pour la manipulation de grands entiers, d'entiers modulo n, ou de réels en grande précision, fréquente dans le cadre de l'option C.

6.6 Option D : Modélisation et Analyse de Systèmes Informatiques

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.

Exposé des motivations Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est au candidat d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle du candidat. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Exercice de programmation informatique Au cours de l'exposé, le candidat présente son *exercice de programmation*. Nous donnons quelques recommandations spécifiques à cette partie de l'épreuve à la fin de ce rapport.

Cette partie de l'épreuve a été globalement satisfaisante, les candidats ayant généralement bien compris l'importance qui y est attachée. Elle dure environ 10 minutes. Le candidat choisit librement dans le temps d'exposé le moment où présenter son exercice de programmation, de façon qu'il s'intègre au mieux à la présentation. Si l'exercice n'a pas été présenté au bout d'une trentaine de minutes, le jury lui rappellera de le faire.

Le plus souvent, les candidats le placent dès que les notions nécessaires ont été introduites dans l'exposé. Cette introduction doit être soignée et complète, afin d'éviter tant les allers-retours du terminal au tableau que les discours approximatif devant l'écran.

Cette présentation au jury doit être faite que le programme *fonctionne* — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que le candidat lance une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet à un candidat réactif de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

6.6.1 Remarques spécifiques sur l'exercice de programmation.

Voici quelques recommandations plus précises concernant l'exercice de programmation. Elles sont motivées par les présentations des candidats de cette année. Nous espérons qu'elles seront utiles pour les candidats des années à venir.

Installation technique Le candidat dispose d'un poste informatique analogue à celui utilisé pour la préparation. Les fichiers qu'il a préparés sont installés sur ce poste en début d'interrogation. Le jury dispose d'écrans de contrôle pour suivre la présentation, mais il ne dispose ni de clavier ni de souris : le candidat est donc le seul à contrôler ce qui est présenté, sans interférence possible.

Présentation du programme D'une manière générale, le candidat doit proposer un code lisible et mettre en valeur ses connaissances en programmation et sa maîtrise du langage utilisé et de l'environnement de programmation utilisé. À titre de repère, la partie centrale du code devrait tenir sur un écran.

Les candidats sont invités à présenter le schéma algorithmique et les structures de données utilisés avant de lancer leur programme. Par contre, il est inutile de descendre dans les détails les plus triviaux du code, que le jury peut lire lui-même sur les écrans de contrôle. Le jury pourra demander au candidat d'évaluer la complexité de son implémentation ou de discuter de choix alternatifs de conception. La possibilité de modification au vol d'un paramètre ou des données est appréciée pour la vérification de la correction.

Choix des données d'exécution Il est demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur différents jeux de données, et il est souhaitable qu'ils aient anticipé ce point. La manière dont ces jeux de données sont choisis devra être justifiée par la démonstration de divers aspects du comportement du programme. Les candidats sont souvent interrogés sur leurs critères de choix.

Le candidat doit être capable de repérer des résultats erronés produits par son programme. Ne pas s'apercevoir que son programme renvoie des résultats absurdes est évidemment pénalisé ! Le jury invite donc les candidats à réfléchir aux ordres de grandeur des résultats attendus.

Choix du langage Le candidat choisit son langage. Cette année, nous n'avons pratiquement pas vu de programmes en Java. Les candidats se partagent équitablement entre Caml et C (en fait, ils utilisent dans le langage C les extensions C++ admises par le compilateur `gcc`). Ce choix peut orienter les questions, car l'implémentation d'un problème peut être plus facile dans certains langages qui permettent de manipuler les structures de données directement, par exemple les listes pour Caml. Mais un candidat qui utilise ces facilités doit pouvoir les justifier. Par exemple, la différence ensembliste entre deux listes étant prédéfinie dans les bibliothèques de Caml, on attend du candidat qui l'utiliserait qu'il puisse expliquer l'implémentation de cette fonction et la complexité des opérations concernées.

L'exercice est soigneusement spécifié dans les textes proposés. Il doit être conduit dans l'un des langages proposés (C, Caml ou Java) : un candidat qui n'utilise pas les langages proposés reçoit la note 0 à l'exercice de programmation, même si ce langage est disponible sur le poste informatique (Maple, Matlab, etc.)

Style de programmation La *lisibilité* et l'*élégance* de l'expression du programme dans le langage choisi sont particulièrement appréciées par le jury. Il est essentiellement attendu que le style de programmation des programmes soit *cohérent* : utilisation de structures d'itération (bornées `for` ou non-bornées `while`), initialisation des variables, découpage plus ou moins fin en fonctions auxiliaires, etc. **Les critères d'arrêt des boucles doivent être parfaitement maîtrisés.** Toutes les quantités présentes dans les programmes doivent être définies par des constantes symboliques facilement modifiables à la demande du jury.

Certains langages favorisent une programmation récursive ou itérative. Le candidat peut utiliser le mode de programmation qu'il préfère, pourvu que ce soit de manière cohérente avec les autres choix de conception. Il est bien sûr attendu du candidat qu'il sache passer d'une programmation récursive à une programmation itérative et réciproquement dans les cas simples, par exemple en présence de *récursivité terminale*.

Entrées-sorties Certains candidats passent beaucoup de temps à programmer des entrées *intéractives* au clavier. Ce n'est pas nécessaire et souvent inutilement complexe, notamment en C (appel par référence dans la fonction `scanf`, etc.). Il est recommandé de coder le jeu de données dans une procédure d'initialisation qui pourra être facilement modifiée à la demande du jury.

Assertions de correction Il est très souvent demandé aux candidats d'exécuter leurs programmes sur les cas limites de leurs spécifications, sauf si ces cas ont été explicitement exclus dans la présentation préalable : liste vide pour les algorithmes de tri, nombres négatifs pour des algorithmes de factorisation, etc. Il sera d'ailleurs bien apprécié que le candidat garde les parties délicates de son programme par des assertions, par exemple à l'aide de la fonction `assert` de la bibliothèque C ou de levée d'exception `failwith` de Caml. C'est particulièrement indiqué pour les accès aux tableaux passés en paramètre en C.

Cas de la programmation C Dans le cas d'une programmation en C, il sera systématiquement demandé au candidat de recompiler son programme avec le niveau maximal d'avertissement :

```
gcc -Wall prog.c -o prog
```

Un programme qui produit des avertissements sera pénalisé et le candidat devra le corriger pendant l'interrogation. La même chose sera vérifiée en Caml ou Java. En particulier, les *pattern-matching* de Caml doivent être exhaustifs et les fonctions internes à une séquence doit retourner la valeur `()` du type `unit`.

Organisation de la préparation Il est souvent demandé combien de temps un candidat devrait consacrer à la préparation de l'épreuve au sein des 4 heures de préparation. Ceci dépend bien sûr des capacités du candidat et de l'organisation de son exposé. Cependant, il faut noter que la présentation de cette partie ne dure que 10 minutes sur les 40 minutes d'exposé. Il est donc indiqué d'y passer au plus un quart du temps de préparation, soit entre une demi-heure et une heure, afin de ne pas empiéter sur la préparation du reste de l'épreuve.

Respect de la spécification Le candidat doit respecter la spécification qui est donnée dans l'énoncé. C'est seulement dans un deuxième temps qu'il peut, s'il le souhaite, présenter un programme implémentant une autre spécification. Il devra alors expliquer pourquoi il le fait. Le fait que l'exercice proposé dans l'énoncé soit trivial ou inintéressant n'est évidemment pas une explication suffisante! Ces extensions sont alors considérées et évaluées comme des développements au choix du candidat. Par exemple, des simulations simples ont pu servir à exposer un développement. Elles doivent mettre en valeur d'autres capacités du candidat que sa *virtuosité* en programmation pure qui n'est absolument pas l'objectif de l'épreuve. Ces présentations complémentaires peuvent utiliser l'ensemble des outils présents sur le poste informatique, Maple et Matlab par exemple.

Chapitre 7

Épreuve : Agir en fonctionnaire de l'état et de façon éthique et responsable

Conformément à l'arrêté du 28 décembre 2009 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement des enseignants, une interrogation portant sur la compétence «Agir en fonctionnaire de façon éthique et responsable » est, à partir de la session 2011, insérée dans l'épreuve orale d'algèbre et géométrie pour les options A,B,C et dans l'épreuve orale de mathématiques pour l'informatique pour l'option D.

• Déroulement
Le candidat gère comme il le souhaite son temps de préparation pour cette épreuve dans l'enveloppe de temps globale de 3h30 . L'interrogation comporte deux phases : un exposé du candidat d'une durée maximale de dix minutes , suivi d'un entretien avec le jury d'une durée maximale de dix minutes.
L'exposé et l'entretien s'appuient sur le sujet remis au candidat à l'issue du tirage. Celui-ci comprend plusieurs extraits de textes officiels (de nature législative ou réglementaire) et deux ou trois suggestions de réflexion pouvant aider le candidat à structurer sa présentation et servir de support aux questions abordées lors de la phase de dialogue avec le jury. Le candidat n'est pas tenu de suivre ces suggestions.

• Objectif
L'objectif de l'interrogation est de vérifier des capacités de compréhension, de réflexion et d'analyse jugées indispensables pour un fonctionnaire de catégorie A.
• Compétences attendues
Lors de l'exposé, le jury attend du candidat qu'il dégage les objectifs principaux visés par ces extraits de textes, qu'il cerne leurs articulations ou leurs apparentes contradictions, qu'il en fasse une analyse scientifique et construise une argumentation contextuelle.
Ceci suppose que le candidat soit capable de traiter scientifiquement une question en se méfiant tant de ses propres préjugés que de certains lieux communs ou idées reçues. Ce processus de distanciation vis à vis de ses propres représentations est particulièrement nécessaire sur certaines thématiques pouvant le toucher dans ses convictions ou son histoire personnelle. Outre le contenu de l'exposé, la manière dont il est présenté en termes de structure et d'expression sont des éléments d'appréciation importants : en particulier, le registre de langue orale (tant au niveau syntaxique que lexical) doit être adapté aussi bien à la situation d'oral de concours qu'aux situations de communication auxquelles un enseignant est confronté dans sa pratique professionnelle.
• L'échange avec le jury qui fait suite à l'exposé porte aussi bien sur certains points évoqués par le candidat que sur des éléments figurant dans le document. Le jury n'attend a priori aucune prétendue bonne réponse, mais est sensible aux qualités d'écoute, de dialogue et d'ouverture d'esprit manifestées par le candidat. Le candidat pourra, s'il le souhaite illustrer sa présentation par des éléments tirés d'une expérience professionnelle. En revanche toute exposition uniquement basée sur des opinions ou convictions personnelles et non étayées ne saurait satisfaire le jury et la notation finale en tiendrait compte.

• Bilan des interrogations

Quelques rares candidats ont mal géré leur temps de préparation et se sont présentés devant le jury sans même avoir pris connaissance du sujet. La durée de leur exposé a été amputée du temps nécessaire à la lecture des textes qui s'est alors effectuée au début de l'interrogation ; dans ces conditions, leur prestation s'est souvent limitée à de la paraphrase, sans aucune émancipation par rapport aux textes proposés. À ces exceptions près, les candidats ont dans l'ensemble compris les règles de cet exercice d'un type nouveau : bon nombre d'entre eux ont fait preuve de qualités de réflexion, d'analyse et d'esprit critique, se positionnant clairement dans le cadre des principes éthiques de la fonction publique.

Chapitre 8

Annexe 1 : Leçons d'oral (options A, B et C) proposées en 2011

Leçons d'algèbre et géométrie

❁ ❁ ❁

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

---

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

---

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

109 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

110 Nombres premiers. Applications.

---

111 Anneaux principaux. Applications.

---

112 Corps finis. Applications.

---

113 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

---

114 Anneau des séries formelles. Applications.

---

115 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

---

116 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

117 Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.

---

118 Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.

---

119 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

120 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

121 Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

---

123 Déterminant. Exemples et applications.

---

124 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

125 Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

---

126 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

---

127 Exponentielle de matrices. Applications.

---

128 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

130 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

---

131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

133 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

135 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

---

136 Coniques. Applications.

---

137 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

---

139 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

140 Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

---

141 Utilisation des groupes en géométrie.

---

144 Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

---

145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

146 Résultant. Applications.

---

148 Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

---

149 Représentations de groupes finis de petit cardinal.

---

150 Racines d'un polynômes. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.

---

151 Extensions de corps. Exemples et applications.

Leçons d'analyse et probabilités

❁ ❁ ❁

201 Espaces de fonctions : exemples et applications.

---

202 Exemples de parties denses et applications.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

204 Connexité. Exemples et applications.

---

205 Espaces complets. Exemples et applications.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

216 Étude métrique des courbes. Exemples.

---

217 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

---

235 Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

238 Méthodes de calcul approché d'intégrales et de solutions d'équations différentielles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Transformation de FOURIER. Applications.

---

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

---

242 Utilisation en probabilités du produit de convolution et de la transformation de FOURIER ou de LAPLACE.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

---

249 Suites de variables de BERNOULLI indépendantes.

---

250 Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.

---

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

---

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

---

254 Espaces de SCHWARTZ et distributions tempérées.

---

255 Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications.

---

256 Transformation de FOURIER dans $S(\mathbf{R}^d)$ et $S^{'}(\mathbf{R}^d)$.

Chapitre 9

Annexe 2 : Leçons de mathématiques pour l'informatique et leçons d'informatique

Leçons de mathématiques pour l'informatique

❁ ❁ ❁

104 Groupes finis. Exemples et applications.

---

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

---

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

---

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

---

109 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

---

110 Nombres premiers. Applications.

---

112 Corps finis. Applications.

---

116 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

---

119 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

---

120 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

---

123 Déterminant. Exemples et applications.

---

124 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

---

128 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

---

131 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

---

132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

---

133 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

---

137 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

---

139 Applications des nombres complexes à la géométrie.

---

140 Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

---

141 Utilisation des groupes en géométrie.

---

145 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

---

203 Utilisation de la notion de compacité.

---

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

---

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

---

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

---

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

---

218 Applications des formules de TAYLOR.

---

219 Problèmes d'extremums.

---

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.

---

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

---

224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

---

226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

---

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

---

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

---

232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

---

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

---

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

---

240 Transformation de FOURIER. Applications.

---

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

---

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

---

252 Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

Leçons d'informatique

901 Structures de données : exemples et applications.

902 Diviser pour régner : exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Complexité.

904 Problèmes NP-complets : exemples.

906 Programmation dynamique : exemples et applications.

907 Algorithmique du texte : exemples et applications.

908 Automates finis. Exemples et applications.

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

910 Langages algébriques. Exemples et applications.

911 Automates à pile. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de Turing. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité : exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

919 Unification : algorithmes et applications.

920 Réécriture et formes normales. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

923 Analyses lexicale et syntaxique : applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Chapitre 10

Annexe 3 : Le programme 2011

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement à plusieurs endroits.

D'une façon générale, les candidats doivent connaître des applications qui illustrent les notions générales. Le programme en propose ainsi un certain nombre. Il ne s'agit que de simples suggestions d'applications possibles, qui peuvent être complétées ou remplacées par d'autres.

Dans les paragraphes 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés **K** en général) sont supposés commutatifs.

10.1 Algèbre linéaire

10.1.1 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Représentations linéaires d'un groupe et d'une algèbre. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

10.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $\mathbf{K}^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.
2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un **R**-espace vectoriel.
3. Matrices à coefficients dans un corps. Opérations matricielles. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Méthode du pivot de GAUSS. Notion de matrices échelonnées. Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

   Extension élémentaire de ces notions aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'un endomorphisme, polynôme minimal. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Diagonalisation, trigonalisation, applications. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de DUNFORD. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

10.2 Groupes et géométrie

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants seront illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polyèdre régulier en dimension 3.
2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.
3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.
4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire ; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal ; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.
5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
   Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Application : transformée de Fourier rapide.
   Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

10.3 Anneaux, corps, polynômes et fractions rationnelles

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau, anneaux quotients. Idéaux premiers, idéaux maximaux d'un anneau commutatif. Notion de module sur un anneau commutatif, d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.
2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

   Décomposition en polynômes homogènes. Tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
3. Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.
4. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Théorème de D'ALEMBERT-GAUSS.
5. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de BÉZOUT. Anneaux euclidiens. Algorithme d'EUCLIDE. Cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ et de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes sur le corps $\mathbf{K}$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $\mathbf{Q}[X]$, critère d'EISENSTEIN.

6. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de ses éléments inversibles. Théorème chinois et applications : multiplication, pivot de GAUSS, systèmes linéaires...
7. Racines d'un polynôme, multiplicité. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Extensions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis.
8. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de NEWTON. Résultant. Discriminant. Application à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes.
9. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe. Dérivée logarithmique d'un polynôme et applications.

10.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.
2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de SYLVESTER. Classification dans le cas de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Procédés d'orthogonalisation.
3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Norme. Bases orthonormales.
4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 : groupe des rotations ; produit mixte ; produit vectoriel.
5. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité.
6. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbf{C})$.

10.5 Géométries affine, projective et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

   Projection sur un convexe fermé.
2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.

3. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements et antidéplacements. Décomposition commutative en une translation et une isométrie à point fixe (forme dite réduite). Exemple de générateurs du groupe des isométries : décomposition en produit de réflexions.
4. Espace affine euclidien de dimension 2.
   Classification des isométries.
   Similitudes directes et indirectes.
   Groupe des isométries laissant stable une partie du plan. Polygones réguliers.
   Relations métriques dans le triangle.
   Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
5. Espace affine euclidien de dimension 3.
   Rotations. Vissages. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.
6. Coniques et quadriques. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.
   Classification des coniques.
   Intersection de quadriques et résultant.
   Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.

10.6 Analyse à une variable réelle

1. Nombres réels
   Le corps **R** des nombres réels. Topologie de **R**. Sous-groupes additifs de **R**. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de **R**. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Parties compactes de **R**. Parties connexes de **R**.
   Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de RIEMANN. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.
2. Fonctions définies sur une partie de **R** et à valeurs réelles
   (a) Continuité
      Limite, continuité à droite, à gauche, continuité.
      Opérations algébriques sur les fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.
   (b) Dérivabilité
      Dérivée en un point, dérivée à droite, à gauche. Fonctions dérivables. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivabilité d'une fonction réciproque.
      Théorèmes de ROLLE et des accroissements finis. Application au sens de variation d'une fonction.
      Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-LAGRANGE, formule de TAYLOR-YOUNG.
      Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

3. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux et calcul de primitives

   Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, positivité. Sommes de RIEMANN. Primitives d'une fonction continue. Changement de variable. Intégration par parties. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales.

4. Intégrales généralisées. Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi-convergentes.

5. Suites et séries de fonctions

   Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions : convergence normale.

   Théorèmes d'approximation de WEIERSTRASS polynomial et de WEIERSTRASS trigonométrique.

6. Fonctions usuelles

   Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

7. Convexité

   Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité.

8. Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Étude graphique. Points fixes attractifs. Points fixes répulsifs.

9. Polynôme d'interpolation de LAGRANGE.

10. Méthodes d'approximation

    Approximation quadratique : polynômes orthogonaux.

11. Méthodes de résolution approchée des équations $f(x) = 0$: dichotomie, méthode de PICARD, méthode de NEWTON. Estimation de l'erreur pour la méthode de NEWTON.

12. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.

10.7 Analyse à une variable complexe

1. Séries entières

   Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

   Fonctions analytiques sur un ouvert. Principe des zéros isolés. Opérations algébriques sur les fonctions analytiques. Composition.

   Exponentielle complexe ; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe.

   Développement en série entière des fonctions usuelles.

2. Fonctions d'une variable complexe

   Fonctions holomorphes. Conditions de CAUCHY-RIEMANN. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé. Déterminations du logarithme.

   Indice d'un chemin fermé $\mathscr{C}^1$ par morceaux par rapport à un point.

   Formules de CAUCHY. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

   Singularités isolées. Séries de LAURENT. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

   Suites et séries de fonctions holomorphes.

10.8 Calcul différentiel

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

   Parties ouvertes, fermées. Voisinages. Parties compactes. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

   Parties connexes. Normes usuelles. Limites. Applications continues. Complétude de $\mathbf{R}^n$.

2. Fonctions différentiables

   Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

   Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $\mathscr{C}^1$.

   Matrice jacobienne. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de TAYLOR avec reste intégral, formule de TAYLOR-YOUNG.

   Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbf{R}$. Développements limités. Recherche des extremums locaux.

   Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

3. Équations différentielles

   Équations différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de la forme $X' = f(t, X)$. Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Problème de l'existence globale. Dépendance par rapport aux conditions initiales.

   Portrait de phase, comportement qualitatif.

   Systèmes différentiels linéaires.

   Méthode de variation de la constante. Cas des coefficients constants. Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un.

10.9 Calcul intégral et probabilités

1. Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de LEBESGUE (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une fonction mesurable ; opérations élémentaires sur les fonctions mesurables.

2. Intégration

   Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée. Continuité, dérivabilité, holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$: inégalités de MINKOWSKI, HÖLDER et JENSEN. Théorème de FUBINI.

   Changement de variables dans une intégrale multiple. Calculs d'aires de domaines plans et de volumes.

   Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

3. Analyse de FOURIER

   Séries de FOURIER des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de RIEMANN-LEBESGUE. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de DIRICHLET et de FEJER. Théorie L^2 : convergence en moyenne quadratique, formule de PARSEVAL.

4. Probabilités.

   Définition d'un espace de probabilité. Variables aléatoires, lois de probabilité d'une variable aléatoire, fonction de répartition. Indépendance d'une famille d'événements, de tribus ou de variables aléatoires.

   Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles.

Exemples de lois : loi de BERNOULLI, loi binomiale, loi de POISSON, loi uniforme, loi normale, loi exponentielle.

Fonction caractéristique et transformée de LAPLACE, applications à la somme de variables aléatoires indépendantes, lien avec la convolution.

Probabilités conditionnelles : définition, théorème de BAYES.

Convergence de suites de variables aléatoires : en probabilité, dans L^p , presque partout, en loi.

Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAIMÉ-TCHEBYSCHEV. Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrale.

10.10 Analyse fonctionnelle

1. Topologie et espaces métriques

   Topologie d'un espace métrique. Topologie induite.

   Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

   Produit fini d'espaces métriques.

   Compacité. Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

   Propriétés métriques : applications lipschitziennes, applications uniformément continues.

   Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

2. Espaces vectoriels normés sur **R** ou **C**.

   Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Espaces de BANACH. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

   Applications linéaires continues, norme.

   Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace BANACH.

   Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de RIESZ ; théorème d'ASCOLI.

   Complétude des espaces L^p, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3. Espaces de HILBERT

   Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

   Dual d'un espace de HILBERT.

   Cas des espaces L^2.

   Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonométriques, polynômes orthogonaux.

   Exemples d'applications linéaires continues entre espaces de HILBERT.

4. Espace de Schwartz $S(\mathbf{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapides sur $\mathbf{R}^d$.

   Normes $N_p(f)$ (sup des normes uniformes des produits des dérivées partielles itérées d'ordre inférieur à p de f par les monômes de degré inférieur à p).

   Espace $S'(\mathbf{R}^d)$ des distributions tempérées.

   Dérivation des distributions tempérées ; formule des sauts en dimension 1 ; formule de Stokes pour un demi-espace en dimension d.

   Cas particulier des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^d$.

   Convolution de distributions dans le cas où l'une d'entre elles est à support compact.

   Transformation de Fourier dans S et dans S'.

   Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$.

10.11 Géométrie différentielle

Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient.

Tracé de courbes usuelles.

Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: position par rapport au plan tangent.

Définition de la divergence d'un champ de vecteurs.

Extremums locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multplicateurs de Lagrange.

ÉPREUVES ÉCRITES

Les épreuves écrites comportent deux épreuves :

A. Composition de mathématiques générales

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 11 ci-dessus.

B. Composition d'analyse et probabilités

Le programme de cette épreuve est constitué par les titres 1 à 11 ci-dessus.

ÉPREUVES ORALES

Les candidats ont le choix entre quatre options :
Option A : probabilité et statistiques
Option B : calcul scientifique
Option C : algèbre et calcul formel
Option D : informatique

Épreuves orales des options A, B, C

1re Épreuve : Épreuve d'Algèbre et Géométrie

2e Épreuve : Épreuve d'Analyse et Probabilités

Le programme de ces deux épreuves, communes aux options A, B et C, est constitué des titres 1 à 11 ci-dessus.

3e Épreuve : Épreuve de Modélisation

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

L'épreuve consiste en un exposé de modélisation mathématique construit en partant d'un texte proposé par le jury. Le programme définit un cadre de théories mathématiques et de techniques d'application adaptées pour l'épreuve. Ce programme comporte une partie commune aux options A, B et C et, pour chacune de ces options, une partie spécifique.

Modélisation : programme de la partie commune aux options A, B, C

Le corpus des logiciels disponibles est constitué de Maple, Mathematica, MuPAD, Matlab, Scilab, Octave, R, Maxima, Axiome, Giac/Xcas, Pari/GP, Gap.

À l'aide d'un ou plusieurs de ces logiciels, les candidats devront montrer leur capacité à :

– mettre en œuvre avec précision et rigueur les concepts et outils mathématiques au programme,
– distinguer les représentations exactes ou approchées des objets mathématiques
– estimer le coût et les limitations d'algorithmes simples : complexité, précision
– analyser la pertinence des modèles.

Le programme de cette partie comprend les méthodes numériques, probabilistes, statistiques et symboliques citées dans les programmes des épreuves écrites et celles citées dans les paragraphes suivants.

1. Calcul numérique et symbolique
   Utilisation des logiciels au programme : simulation, intégration, différentiation, calcul de sommes et d'intégrales, résolution d'équations algébriques et différentielles.
2. Probabilités discrètes : tirages uniformes ; échantillons.
3. Validation et précision des résultats
   Méthodes numériques : notion de conditionnement des systèmes linéaires.
   Précision du schéma numérique d'EULER explicite à pas constant.
   Moyenne et variance empiriques.
   Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calculs de volumes).
4. Moindres carrés linéaires (sans contrainte).

Programme spécifique de l'option A

1. Utilisation de lois usuelles (voir section 9. 4 , loi géométrique) pour modéliser certains phénomènes aléatoires. Exemples : temps d'attente ou durée de vie, erreurs de mesure, sondages . . .
2. Convergence presque sûre. Lemme de BOREL-CANTELLI. Loi forte des grands nombres.
3. Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états fini. Classification des états. Convergence vers une loi stationnaire (théorème ergodique et théorème de la limite centrale admis).
   Chaînes de MARKOV homogènes à espace d'états dénombrable, transience, récurrence positive ou nulle, exemple de la marche aléatoire simple.
   Espérance conditionnelle, définition des martingales, temps d'arrêt. Exemples d'utilisation, des théorèmes de convergence presque sûre et L^2, des martingales à temps discret.
4. Vecteurs gaussiens : définition, simulation en dimension 2, théorème de COCHRAN. Théorème de la limite centrale dans $\mathbf{R}^n$, Utilisation du lemme de SLUTSKY. Définition et calcul d'intervalles de confiance.
   Lois Gamma. Définition de l'estimation du maximum de vraisemblance.
5. Tests sur un paramètre. Tests du χ^2. Fonction de répartition empirique et tests de KOLMOGOROV-SMIRNOV (population de taille finie et comportement asymptotique). Exemples d'utilisation.
   Modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression simple ou multiple, exemples d'utilisation.
   Simulation de variables aléatoires.
   Fonctions génératrices. Processus de vie et de mort.

Programme spécifique de l'option B.

1. Résolution de systèmes d'équations linéaires ; définition du conditionnement. Factorisation LU.
   Méthode du gradient pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs.

Recherche des valeurs propres : méthode de la puissance.

Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de NEWTON : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.

2. Intégration numérique : méthode des trapèzes, de SIMPSON ; estimation de l'erreur.
3. Équations différentielles ordinaires. Espaces de phase. Étude qualitative. Stabilité des points critiques.

   Aspects numériques du problème de CAUCHY. Méthodes d'EULER explicite et implicite : consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de RUNGE-KUTTA 4.
4. Notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles classiques en dimension un.

   Équation de transport (advection) linéaire : méthode des caractéristiques.

   Équations des ondes et de la chaleur : résolution par transformée de FOURIER et séparation des variables. Aspects qualitatifs élémentaires.

   Équations elliptiques.

   Exemples de discrétisation de problèmes aux limites en dimension un par la méthode des différences finies : notions de consistance, stabilité, convergence, ordre.
5. Optimisation et approximation

   Interpolation de LAGRANGE.

   Extremums des fonctions réelles de n variables réelles : multiplicateurs de LAGRANGE. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant.

   Méthode des moindres carrés et applications.

Programme spécifique de l'option C.

1. Représentation et manipulation des entiers longs, flottants multiprécision, nombres complexes, polynômes, éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et des corps finis. Addition, multiplication, division, extraction de racine carrée.
2. Algorithmes algébriques élémentaires.

   Exponentiation ($n \mapsto a^n$, pour $n \in \mathbf{N}$), algorithme d'EUCLIDE étendu.

   Test de primalité de FERMAT.
3. Matrices à coefficients dans un corps.

   Méthode du pivot de GAUSS, décomposition LU. Calcul du rang, du déterminant.

   Exemples de codes correcteurs linéaires : codes de répétition, codes de HAMMING binaires.
4. Matrices à coefficients entiers.

   Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.
5. Polynômes à une indéterminée.

   Évaluation (schéma de HORNER), interpolation (LAGRANGE, différences finies).

   Localisation des racines dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$: majoration en fonction des coefficients.
6. Polynômes à plusieurs indéterminées.

   Résultants, élimination ; intersection ensembliste de courbes et de surfaces algébriques usuelles.
7. Estimation de la complexité des algorithmes précités dans le pire des cas. Aucune formalisation d'un modèle de calcul n'est exigée.

Épreuves de l'option D : informatique

1re Épreuve : Mathématiques

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 11 ci-dessus. Les candidats se verront proposer deux sujets, dans un corpus d'algèbre, de géométrie, d'analyse et de probabilités.

2e Épreuve : Informatique Fondamentale

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 4 ci-après.

3e Épreuve : Analyse de système informatique

Le programme de cette épreuve est constitué des titres 1 à 4 ci-après.

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat qui doit choisir l'un des deux. La compréhension de ces textes et leur exploitation dans cette épreuve requièrent les connaissances en informatique correspondant aux matières enseignées en L1-L2 de Maths-Info ou dans l'option informatique des classes préparatoires auxquelles s'ajoutent celles du programme.

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer la capacité des candidats à mettre en place un processus d'analyse d'un système informatique dans un contexte applicatif. Ce processus s'appuie sur les notions au programme.

Les langages informatiques C, Caml et Java seront disponibles pour cette épreuve et sa préparation. Le rapport du Jury précisera la nature de l'environnement logiciel.

Programme spécifique de l'option D.

L'ensemble du programme correspond à 250h de formation (cours et/ou TD et/ou TP) de niveau Licence et première année de Master, à partir des acquis des deux premières années de Licence ou de l'option informatique des classes préparatoires. L'objectif de cette option est de s'assurer que les candidats maîtrisent les fondements essentiels et structurants de la science informatique.

Le programme n'est pas rédigé comme un plan de cours, il décrit les notions que les candidats doivent maîtriser.

Le programme n'impose aucun langage de programmation particulier. Les candidats doivent maîtriser au moins un langage et son environnement de programmation parmi CAML, Java ou C.

10.12 Algorithmique fondamentale

Cette partie insiste sur les notions de preuve et de complexité des algorithmes. Elle est relativement indépendante de tout langage de programmation, mais le candidat doit être capable de mettre en oeuvre sur machine les structures de données et les algorithmes étudiés.

1. Structures de données. Types abstraits : définition des tableaux, listes, piles, files, arbres, graphes (orientés et non orientés), ensembles, dictionnaires, file de priorité. Interface abstraite et implantation (implémentation) concrète.
2. Schémas algorithmiques classiques : approche gloutonne, diviser pour régner, programmation dynamique. Exemples : algorithme de DIJKSTRA, tri-fusion, plus longue sous-séquence commune.
3. Complexité. Analyse des algorithmes : relations de comparaison O, Θ et Ω. Analyse dans le pire cas. Exemple d'analyse en moyenne : recherche d'un élément dans un tableau.
4. Preuve d'algorithmes : correction, terminaison. Méthodes de base : assertions, pré-post conditions, invariants et variants de boucles, logique de HOARE, induction structurelle.

5. Algorithmes de tri et de recherche. Méthodes de tri par comparaison (tri-fusion, tri-tas, tri rapide), arbre de décision et borne inférieure du tri par comparaisons. Méthodes de recherche séquentielle et dichotomique. Arbres binaires de recherche. Arbres équilibrés : définition, relation entre la taille et la hauteur, maintien de l'équilibre.
6. Algorithmes de graphes. Parcours de graphes : algorithmes de parcours en largeur, en profondeur, algorithme de DIJKSTRA. Arbres couvrants : algorithmes de PRIM et de KRUSKAL. Fermeture transitive.

10.13 Automates et langages

1. Automates finis. Langages reconnaissables. Lemme d'itération. Existence de langages non reconnaissables. Automates complets. Automates déterministes. Algorithme de déterminisation. Propriétés de clôture des langages reconnaissables.
2. Expressions rationnelles. Langages rationnels. Théorème de KLEENE.
3. Automate minimal. Résiduel d'un langage par un mot. Algorithme de minimisation.
4. Utilisation des automates finis : recherche de motifs, analyse lexicale.
5. Langages algébriques. Lemme d'OGDEN. Existence de langages non algébriques. Grammaires algébriques. Propriétés de clôture des langages algébriques.
6. Automates à pile. Langages reconnaissables par automates à pile.
7. Utilisation des automates à pile : analyse syntaxique. Grammaires LL(1).

10.14 Calculabilité, décidabilité et complexité

1. Définition des fonctions primitives récursives ; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives ; fonction d'ACKERMAN.
2. Définitions des machines de TURING. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet). Équivalence avec les fonctions récursives.
3. Universalité. décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de RICE. Réduction de TURING. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.
4. Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de TURING non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de COOK.

10.15 Logique et démonstration

1. Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies, formes normales, forme clausale. Théorème de complétude du calcul propositionnel.
2. Logique du premier ordre : aspects syntaxiques. Langages, termes, formules. Variables libres et variables liées, substitutions, capture de variables.
3. Réécriture : filtrage syntaxique du premier ordre, définition de l'unification syntaxique. Confluence, confluence locale, formes normales, paires critiques, lemme de NEWMAN, algorithme de complétion de KNUTH-BENDIX.
4. Logique du premier ordre : systèmes formels de preuve. Calcul des séquents, déduction naturelle. Algorithme d'unification des termes. Preuves par résolution.
5. Logique du premier ordre : aspects sémantiques. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité, satisfiabilité. Théories cohérentes, théories complètes. Théories décidables, indécidables. Exemples de théories : égalité, arithmétique de Peano. Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

Chapitre 11

Annexe 4 : La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques – Tome 1A - Topologie – Tome 1B - Fonctions numériques – Tome 2 - Suites et séries numériques – Tome 3 - Analyse fonctionnelle – Tome 5 - Algèbre générale, polynômes – Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie – Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
APPLE A.W.	Modern compiler implementation – in C – in Java – in ML	CAMBRIGDE

ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie – Tome I – Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques – 1. Algèbre – 2. Analyse – 3. Compléments d'analyse – 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EDISCIENCES
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GAUTHIER-VILLARS
ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée – Tome 1 – Tome 2	PUF
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	MASSON

AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	BELIN
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES
BASS J.	Cours de Mathématiques – Tome 1 – Tome 2	MASSON
BHATIA R.	Matrix Analysis	SPRINGER
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL

BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	ARMAND COLIN
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie – Index – 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs – 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères – 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes – 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques – 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIDEGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	SPRINGER
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	SPRINGER

BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique – Topologie générale, chapitres V à X – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII – Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III – Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	CASSINI
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BRIANE M. **PAGES G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	VUIBERT
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire – 1. Espaces vectoriels , Polynômes – 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN

CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN
CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	WILEY INTERSCIENCE
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	WILEY INTERSCIENCE
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 2 – Analyse 3	MASSON
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	– Algèbre 1 – Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON

COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	VUIBERT
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique – 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats – 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	DUNOD
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	DUNOD
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics – Volume 1 – Volume 2	JOHN WILEY
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	EDISCIENCE
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
COX D.A.	Galois Theory	WILEY INTERSCIENCE
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	– Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe – Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON

DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	VUIBERT
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	DUNOD
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	DUNOD
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	SPRINGER
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	JACQUES GABAY
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU GRENOBLE
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	ELLIPSES
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	CASSINI
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	SPRINGER
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF

DESCHAMPS WARUSFEL MOULIN, RUAUD MIQUEL, SIFRE	Mathématiques, cours et exercices corrigés – 1ère année MPSI, PCSI, PTSI – 2ème année MP, PC, PSI	DUNOD
DEVANZ C. ELHODAIBI M.	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	ELLIPSES
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	HERMANN
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. – Fondements de l'analyse moderne – Éléments d'Analyse Tome 2.	GAUTHIER-VILLARS
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle – Première année – Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DRAPPER N. SCHMITH H.	Applied regression analysis	WILEY
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	VUIBERT
DYM H. Mac KEAN H.P.	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EBBINGHAUS, HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE, MAINZER NEUKIRSCH, PRESTEL, REMMERT	Les Nombres	VUIBERT
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	CALVAGE ET MOUNET
EL HAJ LAAMRI	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	DUNOD

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes – Analyse. Volume 1 – Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques – Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles – Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse – Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	CALVAGE ET MOUNET
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications – Volume 1 – Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions – Tome 1 - Topologie – Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle – Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples – Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	CALVAGE ET MOUNET

FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	CAMBRIDGE
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices – Tome 1 – Tome 2	DUNOD
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	FREEMAN

GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GRANGON Y.	Informatique, algorithmes en Pascal et en langage C	DUNOD
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	ELLIPSES
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	MASSON
GODEMENT R.	Analyse – Tome 1 – Tome 2 – Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation – Topologie et Analyse fonctionnelle – Calcul différentiel	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales – Tome 1 - Algèbre – Tome 2 - Topologie et analyse réelle – Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel – Tome 4 - Géométrie affine et métrique – Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' – Algèbre – Analyse	ELLIPSES
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	ADISON-WESLEY

GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	WILEY
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	ELLIPSES
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	CASSINI
HAMMAD P.	Cours de probabilités	CUJAS
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	CUJAS
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	SPRINGER
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	OXFORD
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	OXFORD
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	ADDISON WESLEY
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	MASSON
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis – Volume 1 – Volume 2 – Volume 3	WILEY-INTERSCIENCE

HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	MASSON
HOCHART **SCIUTO**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	VUIBERT
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	ADDISON WESLEY
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	BELIN
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	SPRINGER VERLAG
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	VUIBERT-SPRINGER
ITARD J.	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra – Tome I – Tome II	FREEMAN AND CO
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	CASSINI
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	HERMANN
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	DUNOD
KNUTH D.E.	The art of computer programming – Volume 1 : Fundamental algorithms – Volume 2 : Seminumerical algorithms – Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography quantite1	
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES

de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	CAMBRIDGE
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	CASSSINI
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	EYROLLES
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON
LANG S.	Algèbre linéaire – Tome 1 – Tome 2	INTEREDITIONS
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES

LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	CASSINI
LEBOEUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	ELLIPSES
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	JACQUES GABAY
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	MASSON
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales – Tome 1 : Topologie – Tome 3 : Intégration et sommation – Tome 4 : Analyse en dimension finie – Tome 5 : Analyse fonctionnelle	MASSON
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS – Tome I - Algèbre 1 – Tome 2 - Algèbre et géométrie – Tome 3 - Analyse 1 – Tome 4 - Analyse 2	ELLIPSES
LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques – Tome 1 pour M-M' : Algèbre – Tome 1 pour A-A' : Algèbre – Tome 2 : Analyse – Tome 3 : Géométrie et cinématique – Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON

LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	VUIBERT
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	VUIBERT
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	CAMBRIDGE
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre – 1 : Structures fondamentales – 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	MASSON
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	– Using Matlab version 5 – Using Matlab version 6 – Statistics Toolbox – Using Matlab Graphics	
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	CALVAGE ET MOUNET
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES

MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle – Tome 2 : Exercices et corrigés – Tome 3 : Exercices et corrigés – Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES
MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONA S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC PRESS
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	SPRINGER
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	DUNOD
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	ELLIPSES
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés – Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	ELLIPSES
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	CAMBRIDGE
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	CASSINI
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	CALVAGE ET MOUNET

MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	HERMANN
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	ELLIPSES
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	ELLIPSES
MONIER J.M.	Cours de mathématiques – Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI – Analyse 3 MP, PSI, PC, PT – Analyse 4 MP, PSI, PC, PT – Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI – Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT – Exercices d'analyse MPSI – Exercices d'analyse MP – Exercice d'algèbre et géométrie MP	DUNOD
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique – Tome 1 – Tome 2	VUIBERT
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	SEUIL
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	MASSON
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	MASSON
NIVEN I.	Irrational numbers	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
NORRIS J.R.	Markov chains	CAMBRIDGE
OŔOURKE J.	Computational géométrie in C (second édition)	CAMBRIDGE
OPREA J.	Differential geometry	PRENTICE HALL

OUVRARD J.Y.	– Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	CASSINI
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	PEARSON EDUCATION
PAGES G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard … Les probabilités de tous les jours	VUIBERT
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	SPRINGER
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	DOVER
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	SPRINGER
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ELLIPSES
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	CASSINI
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	CASSINI
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	SPRINGER
PETROVŠEK **WILF** **ZEILBERGER**	A=B	A.K. PETERS
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT PRESS
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis – Volume I – Volume II	SPRINGER VERLAG
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	ELLIPSES

PRASOLOV V.	Polynomials	SPRINGER
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	CASSINI
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational géométrie - an introduction	SPRINGER
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	DUNOD
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales – 1- Algèbre – 2- Algèbre et applications à la géométrie – 3- Topologie et éléments d'analyse – 4- Séries et équations différentielles – 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions – Algèbre – Analyse 1 – Analyse 2	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER

RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation Analyse pour l'agrégation	VUIBERT
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	ELLIPSES
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON

SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	ELLIPSES
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	SPRINGER
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	ELLIPSES
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY
SCHWARTZ L.	Analyse – I Topologie générale et analyse fonctionnelle – II Calcul différentiel et équations différentielles	HERMANN
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse – Tome 1 – Tome 2	HERMANN
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	HERMANN
SEDGEWICK R.	Algorithms	ADDISON WESLEY
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	PEARSON EDUCATION
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	DUNOD
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	SPRINGER

SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	– Analyse 3 – Analyse 4	ELLIPSES
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	DOVER
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	THOMSON C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL
STROUSTRUP B	Le langage C++	PEARSON EDUCATION
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD
TAUVEL P.	Cours d'algè bre	DUNOD
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	SEUIL
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique – I Théorie des fonctions – II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	HERMANN
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE

WARUSFEL, ATTALI **COLLET, GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques – Analyse – Arithmétique – Géométrie – Probabilités	VUIBERT
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON