

Numéro d'ordre : 298

Numéro attribué par la bibliothèque : 04ENSL0 298

**THÈSE**  
**en vue d'obtenir le grade de**  
**Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon**  
**spécialité : Informatique**

**Laboratoire de l'informatique du parallélisme**  
école doctorale de : mathématiques et informatique fondamentale

présentée et soutenue publiquement le 10 décembre 2004

par Monsieur Nazim FATÈS

**Robustesse de la dynamique des systèmes  
discrets : le cas de l'asynchronisme dans les  
automates cellulaires**

Directeur de thèse : Michel MORVAN

Après avis de : Monsieur Jacques DEMONGEOT, membre et rapporteur  
Monsieur Eric GOLÈS, membre et rapporteur

Devant la commission formée de :

Monsieur Jacques DEMONGEOT, membre et rapporteur  
Monsieur Eric GOLÈS, membre et rapporteur  
Monsieur Gilles BERNOT, membre  
Monsieur Robert CORI, membre  
Monsieur Jean MAIRESSE, membre  
Monsieur Michel MORVAN, membre

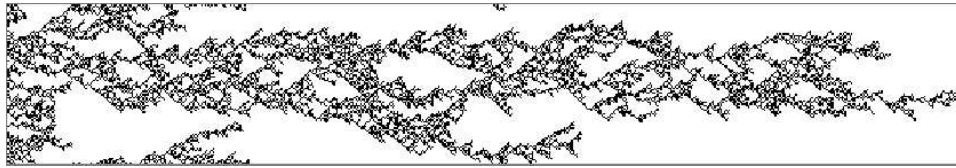
---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Automates cellulaires synchrones et asynchrones</b>	<b>16</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	16
1.2 Automates cellulaires synchrones . . . . .	17
1.3 Automates cellulaires asynchrones . . . . .	22
1.3.1 Asynchronisme . . . . .	22
1.3.2 Modélisation du processus probabiliste . . . . .	23
1.4 Sous-espaces d'automates cellulaires . . . . .	28
1.4.1 Propriétés remarquables des automates cellulaires . . . . .	28
1.4.2 Les automates cellulaires élémentaires . . . . .	30
1.4.3 Automates cellulaires élémentaires remarquables . . . . .	34
1.4.4 Restriction au cas fini binaire . . . . .	38
<b>2 État de l'art</b>	<b>39</b>
2.1 Le problème de la classification des automates cellulaires . . . . .	39
2.1.1 Travaux de Wolfram . . . . .	39
2.1.2 Les formalisations de la classification de Wolfram . . . . .	40
2.1.3 Une approche par les systèmes dynamiques . . . . .	43
2.1.4 L'approche expérimentale . . . . .	45
2.2 Le problème de la robustesse à l'asynchronisme . . . . .	50
2.3 Modifications de topologie . . . . .	53
2.4 Position de notre travail . . . . .	54
<b>3 Étude de la dynamique synchrone à l'aide du paramètre densité</b>	<b>56</b>
3.1 Construction d'un protocole expérimental . . . . .	56
3.1.1 Choix du domaine d'observation . . . . .	56
3.1.2 Le paramètre densité . . . . .	58
3.1.3 Choix des conditions initiales . . . . .	59
3.1.4 Définition du protocole expérimental . . . . .	60
3.2 Résultats et validation des choix . . . . .	62
3.2.1 Le cas automates cellulaires élémentaires . . . . .	62
3.2.2 Le cas des totalisants de rayon 2 . . . . .	71
3.3 Conclusion et perspectives . . . . .	73

<b>4</b>	<b>Étude expérimentale de la robustesse à l'asynchronisme</b>	<b>75</b>
4.1	Choix du paramètre macroscopique pour l'évaluation de la robustesse . . . . .	75
4.2	Protocole expérimental pour l'estimation de la robustesse . . . . .	77
4.2.1	Position du problème . . . . .	77
4.2.2	Définition du protocole expérimental . . . . .	81
4.2.3	Représentation sous forme de surface d'échantillonnage . . . . .	81
4.2.4	Estimation quantitative de la robustesse . . . . .	84
4.3	Présentation et analyse des résultats . . . . .	84
4.3.1	Répartition des automates cellulaires élémentaires dans l'espace $(r_a, r_b)$ . . . . .	84
4.3.2	Zone A (faible $r_a$ et faible $r_b$ ) . . . . .	85
4.3.3	Zone B (fort $r_a$ , faible $r_b$ ) . . . . .	90
4.3.4	Zone C (faible $r_a$ , fort $r_b$ ) . . . . .	94
4.3.5	Zone D (fort $r_a$ , fort $r_b$ ) . . . . .	98
4.4	Conclusion et perspectives . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Étude analytique des automates cellulaires élémentaires doublement quiescents</b>	<b>105</b>
5.1	Définitions . . . . .	106
5.2	Boîte à outils générale . . . . .	109
5.2.1	Quantités conservées . . . . .	109
5.2.2	Points fixes . . . . .	110
5.2.3	Comportement des zones . . . . .	110
5.3	Boîte à outils probabiliste . . . . .	112
5.3.1	Cas des configurations à une zone . . . . .	113
5.3.2	Convergence en temps quadratique . . . . .	114
5.3.3	Convergence en temps cubique . . . . .	115
5.4	Temps de convergence . . . . .	117
5.4.1	Règles de type "collectionneur de coupons" . . . . .	118
5.4.2	Règles quadratiques . . . . .	120
5.4.3	Règles cubiques . . . . .	123
5.4.4	Règle exponentielle . . . . .	128
5.4.5	Règles non convergentes . . . . .	130
5.5	Le cas de la dynamique asynchrone . . . . .	132
5.5.1	Règles de type "collectionneur de coupons" . . . . .	132
5.5.2	Règles linéaires . . . . .	134
5.5.3	Règles quadratiques . . . . .	135
5.6	Conclusion et perspectives . . . . .	137

<b>6</b>	<b>Phénomènes de transition de phase</b>	<b>139</b>
6.1	Transitions de phase des automates cellulaires élémentaires . . . . .	139
6.1.1	Classe d'universalité de la percolation dirigée . . . . .	142
6.1.2	Caractéristiques de la percolation dirigée . . . . .	143
6.1.3	Protocole expérimental . . . . .	144
6.1.4	Détermination des seuils critiques . . . . .	147
6.2	Transitions de phase du Jeu de la Vie . . . . .	151
6.2.1	Perturbations de topologie . . . . .	151
6.2.2	Premières observations . . . . .	152
6.2.3	Approche quantitative . . . . .	153
6.2.4	Analyse à l'aide des micro-configurations . . . . .	157
6.2.5	Des micro-configurations au comportement global . . . . .	158
6.3	Conclusion et perspectives . . . . .	159
	<b>Conclusion</b>	<b>162</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>164</b>



## Remerciements

Que soit d'abord remercié Michel Morvan à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance. La spontanéité avec laquelle il a accepté d'encadrer ce travail et l'enthousiasme dont il a su faire preuve tout au long de ces trois années de thèse ont fortement contribué à me passionner pour le sujet et à le mener à bien en donnant le meilleur de moi-même. Je lui sais gré pour ce que j'ai appris à son contact, tant sur le plan des connaissances scientifiques que d'un point de vue humain.

Jacques Demongeot et Eric Golès ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse alors qu'ils étaient pris par le temps. Je tiens à leur assurer ma sincère gratitude pour leurs efforts et leur disponibilité. Je souhaite aussi remercier vivement Gilles Bernot, Robert Cori et Jean Mairesse pour m'honorer de leur participation au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

Cette période de thèse a été l'occasion de m'intégrer à une équipe et de découvrir les différentes facettes du milieu de la recherche scientifique. A ce titre, je me dois de souligner l'accueil amical et chaleureux qui m'a été fait par les membres de l'équipe MC2 du LIP à l'ENS Lyon. Dans cette petite tribu sympathique, Marianne Delorme et Jacques Mazoyer ont constitué des interlocuteurs de choix et je tiens à leur dire combien leurs remarques et conseils m'ont été utiles pour m'orienter dans le monde pour le moins *complexe* des automates cellulaires.

J'adresse également une pensée amicale à Nicolas Schabanel et Éric Thierry : merci pour votre soutien et pour avoir donné de votre personne lors des séances de travail.

Je ne saurais oublier celles et ceux qui ont partagé mon quotidien au sein de l'équipe ou des bureaux. "Spéciale dédicace", donc, à Julio Aracena, Frédéric Chavanon, Magali Koutti, Emanuelle Lebhar, Bertrand Nouvel, Gilles Radenne, Guillaume Theyssier, Serge Torrès et à tous les amis du LIP et du LIAFA.

Une thèse se bâtit également sur des échanges avec "l'extérieur" ; qu'il me soit ici permis de remercier Martin Matamala et Ivan Rapaport pour leur accueil amical à l'université de Santiago du Chili ; Jean-Baptiste Yunès et Philippe Narbell, Laurent Vuillon et Jérôme Durand-Lose pour leurs coups de pouce ; Alain Prochiantz et Marco Dorigo pour leur ouverture d'esprit.

Je voudrais également adresser une pensée toute particulière à Jacques Dubucs, Jean Mosconi, Olivier Sigaud qui ont été des acteurs importants pour motiver mon intérêt en philosophie. Qu'ils voient dans le travail ici exposé, le tracé d'un itinéraire ouvert sur le terrain de "la pensée qui calcule" et aucunement un renoncement à explorer les chemins de la "pensée qui médite".

Je me dois de clore ces remerciements par un immense merci à ceux de mes proches, famille et amis, qui ont toujours été là pour me soutenir. Je sais qu'ils ne m'en voudront nullement de taire leur noms car ils savent, avec Héraclite, que "rien n'est plus propice à l'éclosion que le retrait".



« τὰ δὲ πάντα κεραυνὸς οἰακίζει »  
« C'est l'éclair qui conduit tout comme un pilote, jusqu'où il lui revient  
d'aller (trad. Jean Beaufret) »  
Héraclite

« Pour parler selon le vrai, pas de métaphores,  
Nous sommes les pièces d'un jeu, le Ciel est le joueur ;  
Nous jouons un petit jeu sur l'échiquier de l'existence,  
Puis, un par un, nous rentrons dans la boîte du néant. »  
Omar Khayyam

« Nous sommes ingouvernables. Le seul maître qui nous soit propice, c'est  
l'Eclair, qui tantôt nous illumine et tantôt nous pourfend. »  
René Char

---

# Introduction

Les recherches sur les systèmes dynamiques discrets ont connu un essor considérable avec le développement de l'informatique. De nombreux problèmes issus de ce domaine de recherche battent en brèche le lieu commun selon lequel les questions scientifiques difficiles s'énoncent nécessairement en des termes difficiles. A l'origine de cette idée se trouve le paradigme scientifique "cartésien" selon lequel un problème, qu'il soit d'origine mathématique ou physique, peut se résoudre par la méthode de l'analyse et de la synthèse : on décompose le problème en des sous-problèmes plus petits puis on cherche comment composer les solutions partielles obtenues. Si cette méthode a permis le progrès de nombreuses disciplines, en premier lieu celui de la physique, il semble qu'elle trouve ses limites dans l'analyse d'un certain nombre de systèmes que l'on désigne par l'expression de "systèmes complexes". On peut définir de tels systèmes comme des systèmes dont la compréhension ne s'obtient pas simplement par l'étude de chacun de des composants élémentaires (ou qui apparaissent comme tels).

Ce type de situations "indécomposables" apparaît dans de nombreuses disciplines scientifiques. En effet, il est courant de rencontrer une situation où des interactions locales entre composants simples produisent un comportement global complexe : en physique ce seront des interactions entre atomes dans un cristal, en chimie des interactions entre constituants, en biologie des interactions entre cellules, en économie des interactions entre agents ayant une connaissance partielle de l'état du marché, etc.

## Robustesse

Parmi les nombreuses propriétés qui caractérisent les systèmes complexes, la robustesse joue un rôle important. La robustesse peut se définir comme la qualité d'un système qui est peu sensible à la plupart des perturbations, qu'elles concernent l'état de ses composants ou les règles qui régissent sa dynamique. C'est l'étude de cette notion de robustesse, dans des conditions particulières, qui forme le coeur de ce travail.

Avant de détailler un peu plus les questions que nous allons aborder à propos de la notion de robustesse, nous allons montrer pourquoi elle revêt une importance particulière dans le contexte de la modélisation.



## Modélisation et Robustesse

Classiquement, les modèles qui décrivent de tels systèmes complexes mettent en jeu des composants qui interagissent de manière locale ; c'est-à-dire que les règles qui définissent les changements d'état des composants n'utilisent qu'une information partielle, limitée dans l'espace, de l'état du système. L'étude de ces modèles présente un double enjeu : elle a d'une part un intérêt intrinsèque en ce qu'elle constitue un champ de recherche stimulant ; d'autre part, elle devient nécessaire lorsque l'on cherche à comprendre des phénomènes "naturels" qui échappent à l'analyse classique.

Un modèle peut être utilisé pour décrire quantitativement un phénomène ou alors il peut fournir des bases de réflexion qualitative pour comprendre l'origine d'un phénomène. L'approche des "systèmes complexes" postule que des phénomènes *a priori* très différents peuvent se décrire avec un même type de modèle. Notre travail n'est pas un travail de modélisation mais nous l'avons effectué dans la perspective qu'il puisse servir au modélisateur.

Dans ce contexte, l'importance de la robustesse apparaît de nouveau. Il ne s'agit plus ici de la robustesse du système complexe lui-même mais de la robustesse du modèle que l'on va choisir. En effet, par définition, un modèle n'est pas une réplique exacte du système qu'il modélise mais en est une abstraction, une approximation. Par conséquent, s'il doit aider à comprendre le phénomène réel, il est important qu'il soit lui-même robuste à la plupart des perturbations, ou au moins que l'on connaisse dans quels contextes il ne l'est pas pour pouvoir évaluer s'il s'agit simplement d'une non-robustesse du modèle ou au contraire du système complexe modélisé.

Cette notion de robustesse nous invite donc à explorer le comportement des modèles sous un nouvel angle. Il ne s'agit plus seulement de découvrir les propriétés d'un modèle mais plutôt de déterminer pour quelles plages de valeurs on observe la stabilité et pour quelles plages on observe un grand écart de comportement.

## Perturber et en mesurer les effets

Nous allons donc dans ce travail nous intéresser aux effets des différentes perturbations que l'on peut appliquer à un système complexe (ou à un de ses modèles). Deux questions générales se posent à ce niveau. La première est celle de la mesure des effets des perturbations et la seconde celle du type de perturbations que nous voulons étudier. Nous pouvons déjà à ce stade en dire quelques mots.

En ce qui concerne la mesure des effets, cette perspective nous permet

d'emblée d'effectuer un certain nombre de choix. En effet, dans l'étude d'un phénomène, on peut rarement mesurer l'ensemble des états des constituants d'un système, comme dans le cas d'un gaz par exemple. Ceci implique que dans nos modèles, l'état d'un système évolue de façon déterministe à l'échelle microscopique mais qu'en revanche on s'interdira de mesurer l'état de chaque composant de façon indépendante. Ceci nous impose de ne prendre en compte que des propriétés statistiques des différentes configurations : c'est l'échelle macroscopique.

En ce qui concerne le type de perturbations, il existe de nombreuses façons de perturber un modèle :

- La première façon de procéder consiste à modifier l'état des composants, en ajoutant un bruit aléatoire par exemple, et observer quelle est l'ampleur du changement de comportement.
- On peut également perturber la façon dont les composants changent d'état en modifiant les règles qui agissent sur les composants.
- On peut également modifier les interactions entre composants (changement de topologie),
- Enfin, les moments où les composants changent d'état peuvent eux aussi être sujet à des perturbations (changement de temporisation ou synchronisme).

Une telle étude peut s'effectuer pour un ou plusieurs types de perturbations et on peut même se demander comment se composent ces perturbations lorsqu'elles sont appliquées simultanément. Idéalement, on souhaite énoncer des conditions nécessaires et suffisantes de robustesse qui soient valables pour une classe de modèles aussi grande que possible.

### **Les automates cellulaires**

Ces questions sont évidemment difficiles à traiter en toute généralité et il est nécessaire de limiter nos recherches à des questions plus précises. Nous avons choisi ici de nous intéresser aux automates cellulaires qui sont un modèle classique des systèmes complexes. Dans ce modèle, les composants élémentaires sont des cellules, qui sont disposées sur une grille régulière et qui changent leur état en fonction de l'état des cellules voisines. Ces changements d'états sont dictés par une unique règle, dite fonction de transition locale, qui, classiquement, est appliquée à toutes les cellules en même temps. Ce modèle se prête bien à l'exploration de la notion de robustesse car il permet de définir très simplement des règles au comportement varié, allant du comportement trivial à l'universalité (*i.e.*, une puissance de calcul équivalente à celle d'une machine de Turing).

Dans le cas des automates cellulaires, les questions préalables liées à l'étude de la robustesse se traduisent comme suit :

- Comment estimer quantitativement si un automate cellulaire a changé son comportement ?
- Comment définir formellement les différents types de perturbations (inhomogénéité, topologie, asynchronisme) ?

Pour la première question, nous avons choisi de nous limiter à la mesure d'un paramètre macroscopique très simple : la densité (*i.e.*, le ratio de cellules dans un état donné). Nous verrons que ce choix, malgré sa simplicité, permet déjà d'obtenir des résultats intéressants.

Pour la seconde question, nous avons choisi de focaliser sur l'effet des perturbations de synchronisme. Ce sont en effet des perturbations très naturelles (dans le contexte de la modélisation) et il est de plus facile de définir une notion de "petite" perturbation. Dans le cas des automates cellulaires bidimensionnels, nous avons étendu notre étude aux perturbations de topologie et à leurs influences croisées.

## **Simulation et théorie**

Nous avons aussi fait le choix d'aborder ces questions autant par l'angle de la théorie que de la simulation numérique. En effet, même lorsqu'une simulation numérique est rigoureuse et permet d'obtenir des résultats convaincants, il n'en reste pas moins qu'elle dépend souvent de très nombreux paramètres extérieurs au phénomène et que son domaine de validité est toujours limité. Une approche théorique, partant souvent des observations des simulations, permet, quand elle est possible, d'obtenir une connaissance plus fiable. Réciproquement, l'approche théorique est souvent difficile à mettre en oeuvre et, quand cela est fait, c'est souvent dans un champ de généralité assez restreint. Les simulations permettent alors d'élargir cette connaissance.

## **Plan de la thèse**

Le premier chapitre introduit les définitions et les notations formelles qui servent tout au long de cet exposé. Nous définissons les automates cellulaires synchrones de façon classique et nous introduisons une définition des automates cellulaires asynchrones à l'aide de fonctions probabilistes. Nous examinons ensuite des propriétés algébriques des automates cellulaires qui permettent d'isoler des sous-ensemble particuliers de règles ; en particulier, nous introduisons un nouveau code pour désigner les automates cellulaires élémentaires qui nous permet, dans certains cas, de saisir plus facilement le

comportement local d'une règle.

Le chapitre 2 a pour objectif de situer notre recherche par rapport aux travaux déjà existants. Dans un premier temps, nous découvrons les différentes approches qui ont été utilisées pour traiter le problème de la classification des automates. Ce problème est connu pour être un problème difficile et nous examinons un certain nombre de travaux qui traitent de la question. Partant de la classification empirique proposée par Wolfram, nous rappelons les résultats qui ont été obtenus sur le volet algébrique : des propriétés importantes sont indécidables, ce qui confirme le caractère difficile de l'étude du comportement des automates cellulaires et pose des limites en termes d'objectifs. Nous rappelons également les résultats issus du volet expérimental afin de pouvoir montrer clairement les difficultés de cette approche. Dans un second temps, nous parcourons les travaux qui ont été conduits autour des notions de robustesse à l'asynchronisme et aux modifications de topologie afin tenir compte des acquis des travaux antérieurs. Enfin, nous montrons les implications de ces études pour nos propres travaux : les approches théoriques permettent de poser des limites claires en termes d'objectif et les approches expérimentales nous permettent de guider nos choix pour proposer un protocole : nous devons d'abord disposer d'un "bon" paramètre pour capturer le comportement d'un automate et ensuite disposer d'une "bonne" méthode d'expérimentation afin que les résultats soient aussi représentatifs que possible.

Le chapitre 3 est le point de départ de nos travaux et un préalable à l'étude de la robustesse : nous cherchons à choisir un paramètre qui soit adéquat pour évaluer le comportement d'un automate cellulaire. Le calcul de ce paramètre doit être simple et rapide (nous devons classer un grand nombre d'automates) et il doit pouvoir donner des résultats pertinents même lorsqu'il est calculé sur des portions d'orbites de taille fixe avec des configurations finies. Nous montrons expérimentalement que l'utilisation du paramètre densité permet effectivement de classer les automates selon leur caractère "régulier" ou "chaotique". Le protocole expérimental s'appuie d'une part sur un échantillonnage des conditions initiales (on se ramène à des études statistiques), et d'autre part sur l'examen de portions fixes d'orbites (ce qui permet d'aller rapidement). La validation des résultats fournis par notre méthode de classification se fait par rapport aux travaux déjà existants et permet de montrer que les résultats obtenus sont cohérents.

Le chapitre 4 utilise les outils de classification fondés sur la densité qui ont été examinés dans le cas synchrone "classique". Nous les avons appliqués

sur les automates cellulaires asynchrones, définis par une application partielle des transitions à chaque pas de temps. Formellement, nous ajoutons à la définition classique la donnée d'une fonction probabiliste, dite fonction de mise-à-jour, qui à chaque pas de temps donne l'ensemble des cellules que l'on met à jour. Dans notre approche, ce choix se fait de façon aléatoire et la probabilité pour qu'une cellule effectue la transition est appelée *taux de synchronisme* : c'est le paramètre central qui va nous permettre de définir la notion de robustesse à l'asynchronisme. Le protocole expérimental que nous proposons se base sur l'obtention de surfaces dans un espace à trois dimensions où les axes des  $x$  et des  $y$  représentent respectivement la densité initiale des configurations et le taux de synchronisme et où l'axe des  $z$  représente la densité moyenne des orbites issues des configurations initiales choisies. Nous regroupons les automates en fonction du type de surface mesurée et nous examinons alors les automates groupe par groupe. Cet examen détaillé permet de mettre à jour différents comportements bien distincts :

- automates parfaitement robustes : leur comportement est invariant en fonction de la mise-à-jour,
- automates partiellement robustes : leur comportement change peu en fonction de la mise-à-jour,
- automates avec transition de phase du premier ordre : le comportement change brutalement lors de l'introduction d'une petite quantité d'asynchronisme puis reste stable,
- automates avec transition de phase du second ordre : le comportement reste constant pour certaines valeurs du taux d'asynchronisme et devient variable pour d'autres valeurs (la dérivée de la fonction qui quantifie le comportement est nulle sur un intervalle et devient "fortement" positive à partir d'une certaine valeur),
- automates non convergents : pour ces automates l'obtention de statistiques fiables est impossible au vu des temps de calcul mis en jeu.

La mise en évidence de ces différents comportements permet de dégager plusieurs axes de recherche vers lesquels nous avons orienté la suite de nos travaux :

- analyser expérimentalement les conditions qui expliquent pourquoi un automate est robuste (par exemple la présence de murs qui bloquent la transmission de l'information ou l'absence de corrélation spatiale dans le cas des automates "chaotiques"),
- justifier théoriquement la présence de transitions de phase du premier ordre (expliquer comment l'introduction d'une petite quantité d'asynchronisme peut conduire à une grande différence de comportement),
- analyser théoriquement, lorsque cela est possible, le temps de conver-

- gence et le type de diagramme espace-temps obtenus,
- vérifier que les transitions de phase du second ordre sont effectivement des transitions de phase et non des artefacts dûs à l’observation en taille finie ; éventuellement, donner la classe d’universalité de la transition de phase.

Le chapitre 5 permet d’aborder certains de ces problèmes analytiquement et d’y répondre en partie. Nous montrons ainsi que l’on peut estimer théoriquement certains aspects du comportement asynchrone séquentiel (*i.e.*, une seule transition est effectuée à chaque pas de temps) des automates cellulaires “élémentaires” (*i.e.*, automates cellulaires unidimensionnels de plus proches voisins à deux états) où les deux états 0 et 1 sont quiescents (*i.e.*, ces états ne permettent pas de transmission instantanée de l’information). Pour cela, nous introduisons un codage des automates cellulaires élémentaires qui permet de décrire aisément leur comportement. Cela permet, dans le cas des automates doublement quiescents, de nous attaquer au problème de la description du comportement global d’un automate cellulaire à partir de la donnée de sa fonction de transition locale. Ce problème peut ici être traité en exploitant la propriété de décroissance du nombre de zones de 0 et de 1 consécutifs. Nous montrons en particulier qu’il est suffisant de s’intéresser aux mouvements des frontières entre ces zones de 0 et de 1 pour prédire le temps de convergence d’un automate : celui-ci peut être nul (cas trivial), logarithmique, quadratique, cubique ou exponentiel (un seul cas). Ces temps de convergence sont calculés en couplant les automates à des processus aléatoires déjà étudiés en théorie des probabilités : problème du “coupon collector”, problèmes de ruine avec martingales, marches aléatoires avec fusion ou annihilation, équilibrées ou biaisées, etc. Nous observons que chaque couplage est lié à un comportement “type” de l’automate ce qui nous permet également de prédire la forme des diagrammes espace-temps ainsi que les différents attracteurs et la probabilité qu’ils soient atteints.

Le chapitre 6 est expérimental et nous y avons abordé la question de l’étude de certaines transitions de phase. Nous étudions d’abord l’effet de différents paramètres qui définissent une expérience (variations de taille des configurations, des conditions initiales, des temps de transitoire, etc.) puis nous montrons que l’on a une transition de phase du second ordre : les valeurs macroscopiques varient continuellement avec le taux de synchronisme mais leur dérivée est discontinue. Plus précisément, l’analyse de ces données permet d’établir que cette transition de phase appartient à la classe d’universalité de la percolation dirigée. Il est à noter que le phénomène de percolation dirigée

a déjà été observé sur les automates cellulaires dans d'autres contextes mais qu'il s'agit là de la première mise en évidence de ce type de transition de phase pour les automates cellulaires "élémentaires".

Nous continuons l'étude des transitions de phase dans le cas du "Jeu de la Vie" (il s'agit d'un automate cellulaire bidimensionnel, introduit par Conway, qui est universel au sens du Turing). Nous montrons, en utilisant les mêmes protocoles, que l'on peut observer deux changements brutaux de comportements et que ces changements sont de nature différente. Ainsi, le premier changement brutal observé en fonction de la densité initiale est un artefact de l'observation sur une grille de taille finie. Pour expliquer ce phénomène, nous émettons l'hypothèse que le changement de phase se fait à partir de germes localisés et que la stabilisation du changement de phase n'est que fonction de la probabilité d'apparaître d'un de ces germes. Par ailleurs, le second changement de comportement (en fonction du taux de synchronisme) est une vraie transition de phase, qui avait déjà été étudiée par d'autres auteurs. Nous avons souhaité aller plus loin en étudiant comment cette transition variait lorsque la topologie (*i.e.*, les liens entre cellules) était modifiée. Nous observons que le seuil de transition se "déplace" régulièrement lorsque les modifications de la topologie augmentent, et ce jusqu'à ce que la transition de phase ne soit plus possible (les germes ne peuvent plus se développer). Ceci peut s'interpréter en disant que dans une certaine mesure, la robustesse à l'asynchronisme du Jeu de la Vie est augmentée lorsque la topologie n'est plus régulière. On peut également formuler cette assertion dans l'autre sens : les mesures montrent que le Jeu de la Vie classique ne peut être pris comme modèle d'un phénomène biologique réel puisque son comportement dépend fortement des liens sous-jacents entre cellules ainsi que du degré de synchronisme de ses transitions <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Le travail décrit dans le chapitre 3 a fait l'objet d'une publication dans les actes de la conférence DMTCS'03 [Fat03].

Le travail décrit dans le chapitre 4 a fait l'objet d'un article co-écrit avec Michel Morvan et soumis à la revue Complex Systems [FM04a].

Le travail décrit dans le chapitre 5 a fait l'objet d'un article co-écrit avec Michel Morvan, Nicolas Schabanel et Éric Thierry et soumis à la conférence STACS'05 [FMST].

Les résultats exposés dans la première partie du chapitre 6 ont été obtenus lors d'un travail conjoint avec Alexis Ballier lors de son stage de première année.

Les résultats exposés dans la deuxième partie du chapitre 6 ont fait l'objet d'une publication dans les actes de la conférence ACRI'04 [FM04b].

---

# Chapitre 1 Automates cellulaires synchrones et asynchrones

Ce chapitre a pour objet la définition des automates cellulaires synchrones et des automates cellulaires asynchrones. Après avoir introduit le contexte global des systèmes dynamiques, nous reprenons les définitions classiques des automates cellulaires, puis nous les étendons au cas asynchrone. Nous décrivons ensuite quelques propriétés algébriques remarquables qui nous permettront par la suite de réduire l'ensemble des automates à étudier.

## 1.1 Systèmes dynamiques

Le cadre général dans lequel on peut situer les automates cellulaires est celui des *systèmes dynamiques*. Un système dynamique permet de décrire l'évolution temporelle d'un ensemble d'objets en interaction mutuelle et éventuellement en interaction avec un environnement (*i.e.*, l'extérieur de l'ensemble d'objets).

Dans le contexte de la modélisation, la construction d'un système dynamique est effectuée par un observateur qui isole les objets à étudier et décrit leurs interactions. Classiquement, les systèmes dynamiques sont séparés en deux catégories : les systèmes dynamiques à temps continu qui décrivent l'évolution temporelle avec des temps pris dans l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  (ou un de ses sous-ensembles) et les systèmes dynamiques à temps discret qui décrivent l'évolution temporelle avec des temps pris dans l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . À première vue, il peut sembler que la modélisation par temps "continu" soit la plus judicieuse puisque qu'elle correspond à l'idée intuitive que nous avons du temps. Cependant, il existe de nombreuses situations où la modélisation par temps discret est mieux adaptée : par exemple lorsque que le système évolue en fonction des tops d'une horloge (cas typique en informatique), ou lorsqu'on souhaite modéliser des changements d'états "brutaux" (des changements d'états de particules atomiques, par exemple) à des temps déterminés, le temps discret est alors couplé avec des états du système discret. C'est à cette dernière classe d'objets que nous nous intéressons



et nous ne discuterons plus dans la suite des rapports entre temps discret et temps continu ; on peut néanmoins noter qu'une grande partie des concepts utilisés (orbites, points fixes, convergence, périodicité, etc. ) ont été initialement définis dans le cas d'une évolution temporelle continue.

**Définition 1 (Système dynamique à temps discret).** *Un système dynamique (à temps) discret est un couple  $(X, \Phi)$ , consistant en un espace des états ou espace des phases  $X$  non vide et une fonction  $\Phi : X \times \mathbb{N} \rightarrow X$  appelée fonction d'itération.*

**Définition 2 (Orbite).** *Pour un système dynamique discret donné  $(X, \Phi)$ , l'orbite d'un point  $x$  est la suite de  $X^{\mathbb{N}}$ , notée  $\gamma_x = (x^t)_{t \in \mathbb{N}}$ , définie par :*

$$\begin{aligned} x^0 &= x \\ x^{t+1} &= \Phi(x^t, t). \end{aligned}$$

**Définition 3 (Condition d'autonomie).** *Un système dynamique sera dit autonome si sa fonction d'itération  $\Phi$  ne dépend pas explicitement du temps, i.e., s'il existe une fonction  $\phi$  qui vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \Phi(x, t) = \phi(x).$$

La condition d'autonomie est fondamentale pour un système dynamique puisqu'elle suppose que l'on dispose d'une description qui soit indépendante du temps initial où le phénomène se produit<sup>1</sup>.

## 1.2 Automates cellulaires synchrones

Un *automate cellulaire* (AC) est ici défini comme un cas particulier de système dynamique à temps discret autonome. De façon informelle, cet objet est un ensemble fini ou infini de cellules réparties dans l'espace et dont les états peuvent varier en fonction du temps. Une variation d'état est appelée une *transition* ; les transitions se définissent à l'aide d'une unique fonction, dite *fonction de transition* qui gouverne toutes les cellules. Dans un automate cellulaire les transitions sont effectuées en partant des hypothèses suivantes :

- les cellules sont régulièrement disposées dans l'espace,
- les transitions sont définies de façon locale (*i.e.*, en fonction de l'état des voisins),

---

<sup>1</sup>Par exemple, la chute d'un corps dans un champ de pesanteur est un phénomène qui peut être décrit par un système dynamique autonome puisque la trajectoire qu'il emprunte ne dépend pas du moment où l'on lâche l'objet.

- toutes les cellules sont gouvernées par une même fonction de transition (ou de façon équivalente d'un nombre *fini* de fonctions),
- toutes les transitions ont lieu de manière synchrone.

La suite de cette partie est consacrée à la définition formelle de chacune de ces hypothèses.

### Hypothèse de sommet transitivité

**Définition 4.** Une cellule est une variable qui prend ses valeurs dans  $Q$ , l'ensemble des états, on note  $q_c$  l'état d'une cellule  $c$ .

**Définition 5.** L'ensemble des cellules d'un automates cellulaire, noté  $\mathcal{U}$  (pour univers), est un sous ensemble de  $\mathbb{Z}^d$ , où  $d \in \mathbb{N}$  est appelée dimension de l'automate cellulaire.

Dans la suite, nous nous restreignons à l'étude des automates cellulaires définis en dimension 1 ou 2. Étant donnée la répartition régulière des cellules, on utilisera le terme *grille* pour désigner  $\mathcal{U}$ . Dans le cas général, on peut également envisager que  $\mathcal{U}$  soit un ensemble quelconque et que les cellules soient disposées sur les sommets d'un graphe *sommet transitif*<sup>2</sup> (i.e., pour lequel pour toutes cellules  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{U}$ , il existe un automorphisme de graphes  $f$  tel que  $f(x) = y$ ).

**Définition 6 (Configuration).** Une configuration  $x$  correspond à l'association d'un état à chaque cellule de la grille  $\mathcal{U}$ .

Les configurations sont des éléments de  $Q^{\mathcal{U}}$  l'espace des configurations, elles sont notées  $x = (x_c)_{c \in \mathcal{U}}$ . Dans le cas où  $d = 1$ , une configuration pourra également être vue comme un mot sur l'alphabet  $Q$ .

**Notation 1.** Soit  $x$  un vecteur de  $A^{\mathcal{U}}$  où  $A$  est un ensemble quelconque. On note  $|x|_u$  le nombre de positions de  $x$  égales à  $u$  :

$$|x|_u = |\{i, x_i = u\}|,$$

où  $|E|$  désigne le cardinal d'un ensemble  $E$ .

**Définition 7 (Densité).** On appelle densité de 1 d'une configuration  $x$  le nombre réel  $d(x) = \frac{|x|_1}{|x|}$  correspondant au ratio de 1 dans la configuration  $x$ .

---

<sup>2</sup>Cette façon de généraliser l'invariance par translation de la grille est usuellement utilisé dans le domaine de recherche des graphes d'automates. En ce qui concerne les automates cellulaires, signalons un article de Petrov [Pet96] qui présente un exemple intéressant de l'utilisation d'une grille régulière qui n'est pas un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d$ .

Dans le cas binaire  $Q = \{0, 1\}$ , on appelle simplement *densité* cette quantité.

**Notation 2 (Conjugaison).** Pour  $Q = \{0, 1\}$ ,  $q \rightarrow \bar{q} = 1 - q$  désigne l'opération de conjugaison qui permute 0 et 1. Pour une configuration  $x$  de  $Q^{\mathcal{U}}$ ,  $\bar{x}$  désigne la configuration conjuguée de  $x$  obtenue en application de l'opération de conjugaison à toutes les cellules de  $x$ .

### Hypothèse de localité des transitions et d'invariance par translation du voisinage

Une cellule change son état en fonction de l'état des cellules qui se trouvent dans un rayon borné.

**Définition 8.** Le voisinage d'une cellule  $c$ , noté  $V(c)$ , est une partie finie totalement ordonnée de  $\mathcal{U}$ . Il existe un entier  $r$ , appelé rayon du voisinage tel que pour toute cellule  $c \in \mathcal{U}$ , le voisinage  $V(c)$  est un sous-ensemble d'une boule de rayon  $r$  centrée sur  $c$ .

Il n'y a pas *a priori* de condition requise sur le type de distance permettant de définir les boules. On utilise usuellement les normes dites "norme 1" et "norme infinie" basées respectivement sur les distances  $d_1$  et  $d_\infty$  suivantes :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d, d_1(x, x') = \sum_{1 \leq i \leq d} |x'_i - x_i|,$$

$$\forall (x, x') \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d, d_\infty(x, x') = \max_{1 \leq i \leq d} |x'_i - x_i|.$$

Classiquement, les voisinages sont définis comme étant invariants par translation et on a alors :

$$\exists V_0 \subset \mathbb{Z}^d, \forall c \in \mathcal{U}, V(c) = V_0 + c,$$

où  $+$  désigne ici l'addition sur les vecteurs. Le voisinage sera alors dit *régulier* et on note  $\nu = |V(c)|$  son cardinal.

Sauf indication contraire, nous supposons désormais que le voisinage des automates cellulaires considérés est régulier; des automates cellulaires avec voisinages irréguliers seront explicitement définis dans le chapitre 6.

**Définition 9 (Voisinages de von Neumann / Moore).** Nous appelons voisinage de von Neumann, le voisinage de rayon  $r = 1$  pour la distance de la norme 1. Nous appelons voisinage de Moore, le voisinage de rayon  $r = 1$  pour la distance de la norme infinie.

## Hypothèse d'homogénéité spatiale

Chaque cellule met à jour son état en fonction d'une même règle  $f$  définie de  $Q^V$  dans  $Q$ , appelée *règle de transition locale*. On appelle *table de transition* la donnée exhaustive des couples de  $Q^V \times Q$  qui permettent de définir  $f$ .

Dans la suite nous utiliserons de façon indifférenciée les termes “automate (cellulaire)” et “règle”, étant entendu que le contexte fixe les données (dimension, voisinage, ensemble des états) qui permettent de définir l'automate cellulaire en fonction de la règle de transition locale.

**Définition 10 (État quiescent).** *Pour une règle de transition fixée, on dira qu'un état  $q$  est quiescent si  $f(q, \dots, q) = q$ .*

## Synchronie des transitions

Dans le cas classique où toutes les transitions sont effectuées de manière synchrone, il est utile de définir, à partir de la connaissance de la règle de transition locale qui agit individuellement sur les cellules, la fonction de transition globale qui agit sur les configurations.

**Définition 11 (Fonction de transition globale).** *La fonction de transition globale est la fonction  $F : Q^U \rightarrow Q^U$  qui associe à chaque configuration  $x = (x_c)_{c \in U}$ , la configuration  $y = (y_c)_{c \in U}$  telle que  $y_c = f[x_{v_1(c)}, \dots, x_{v_\nu(c)}]$  où  $V(c) = \{v_1(c), \dots, v_\nu(c)\}$ .*

## Systèmes dynamiques

Un automate cellulaire est donc un cas particulier de système dynamique à temps discret autonome défini pour un espace des phases égal à l'espace des configurations ( $X = Q^U$ ) et qui admet pour fonction définissant le système dynamique la fonction de transition globale de l'automate ( $\phi = F$ ).

**Définition 12 (Orbite).** *L'orbite d'une configuration  $x$ , notée  $\gamma_x$  est la suite de configurations de  $(Q^U)^{\mathbb{N}}$ , notée  $\gamma_x = (x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  obtenues par itération de  $F$  sur  $x$  selon :  $x^t = F^t(x)$ .*

Dans le cas unidimensionnel, les parties finies des orbites peuvent être représentées sous forme de *diagrammes espace-temps* où les configurations sont représentées horizontalement et le temps verticalement. On oriente le temps du bas vers le haut. Un exemple de diagramme espace-temps est représenté sur la figure 1.1.

L'ensemble des orbites d'un automate cellulaire donné peut être représenté par son *graphe de transitions* ou *portrait de phase* [MOW84, WL92] : c'est

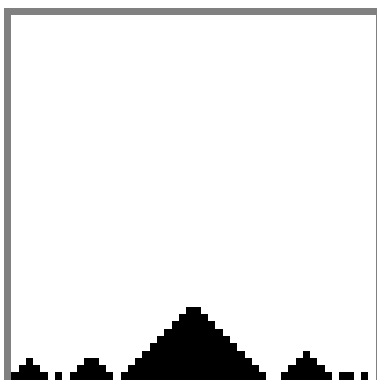


FIG. 1.1 – Un exemple de diagramme espace-temps pour l'automate cellulaire unidimensionnel de rayon  $r = 1$  défini par  $f(a, b, c) = 1$  si  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$  et  $f(a, b, c) = 0$  sinon. Les carrés blancs représentent une cellule à l'état 0 et les carrés noirs, une cellule à l'état 1. Les configurations sont périodiques aux bords (anneaux) et de taille  $n = 50$ . On représente ici les  $n$  premières générations de manière à avoir un diagramme carré. Ces conventions sont conservées par la suite.

un graphe orienté où un noeud représente une configuration et un lien entre deux noeuds représente le passage d'une configuration à une autre par une application de la règle de transition (globale). Comme chaque noeud a au plus un degré sortant de un, ce graphe est une collection d'arbres enracinés sur des cycles. En reprenant la terminologie de systèmes dynamiques, on désigne parfois ces cycles comme des *attracteurs* et l'ensemble des arbres enracinés sur un cycle constituent le *bassin d'attraction* de l'attracteur. Lorsque ces cycles sont dégénérés (*i.e.*, de longueur 1), on parle alors de point fixe.

**Définition 13.** Une configuration  $x$  est un point fixe (de  $F$ ) si  $F(x) = x$ .

En outre, il est clair que dans le cas fini, la longueur de tout cycle est bornée par  $|Q^{\mathcal{U}}| = 2^n$ . Dans cette représentation, les feuilles des arbres sont des *jardins d'éden*<sup>3</sup> : ce sont des configurations sans prédécesseur.

---

<sup>3</sup>Ce terme biblique fait référence à la Genèse et provient d'une suggestion de Tukey faite à Moore qui le publiera en 1962 [Moo62].

## Sous-configurations, frontières et domaines

Nous désignons par  $*0^*$  (resp.  $*1^*$ ) la configuration où l'état de toutes les cellules est à 0 (resp. 1).

**Définition 14.** *Dans le cas où  $d = 1$ , on appelle sous-configuration tout mot formé de la suite des états de cellules adjacentes. Une sous-configuration est un  $q$ -domaine si c'est un mot de la forme  $q^i, i \in \mathbb{N}^*$ . Une frontière désigne une sous-configuration  $ab$  telle que  $a \neq b$ . On parle de frontière 01 (resp. 10) si  $ab = 01$  (resp. si  $ab = 10$ ).*

## 1.3 Automates cellulaires asynchrones

Nous pouvons maintenant élargir la classe des automates cellulaires synchrones en abandonnant l'hypothèse de synchronie des transitions : désormais on ne suppose plus que toutes les cellules sont mises-à-jour simultanément et on introduit une fonction de mise-à-jour ou *dynamique* (“updating method” dans [SdR99]) qui donne, à chaque pas de temps, l'ensemble des cellules où la règle de transition est appliquée.

### 1.3.1 Asynchronisme

Pour modéliser l'asynchronisme, on utilise l'ensemble  $M = \{0, 1\}^{\mathcal{U}}$ , avec la convention que 1 représente une mise-à-jour d'une cellule et 0 une absence de mise-à-jour de cette cellule. Cet ensemble représente les différentes possibilités d'appliquer ou non la fonction de transition locale  $f$  sur l'ensemble des cellules de la grille  $\mathcal{U}$ .

On appelle donc *mise-à-jour* (globale), tout élément  $m = (m_i)_{i \in \mathcal{U}} \in M$ .

**Définition 15 (Fonction de transition globale asynchrone).** *La fonction de transition globale (asynchrone) est la fonction  $F : Q^{\mathcal{U}} \times M \rightarrow Q^{\mathcal{U}}$  qui associe à chaque configuration  $x = (x_c)_{c \in \mathcal{U}}$  et à chaque mise-à-jour  $m = (m_c)_{c \in \mathcal{U}}$ , la configuration  $y = (y_c)_{c \in \mathcal{U}}$  telle que :*

$$y_c = \begin{cases} f[x_{v_1(c)}, \dots, x_{v_\nu(c)}] & \text{si } m_c = 1, \\ x_c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous voyons qu'étant donné qu'une configuration possède potentiellement plusieurs successeurs, l'évolution du système dynamique dépend à tout moment du choix de la mise-à-jour. Si ce choix n'est pas effectué de manière déterministe, il n'est plus possible de parler de “cycles” au sens classique

du terme. Néanmoins, la définition de point fixe donnée dans le paragraphe précédent implique que si une configuration est un point fixe pour la dynamique synchrone, elle est aussi un point fixe pour toute dynamique non synchrone.

La notion d'orbite perd aussi son sens classique et pour la généraliser, il devient nécessaire d'associer à une configuration donnée la suite de mises-à-jour qui permettent de passer d'une configuration à une autre.

**Définition 16 (Histoire).** *On appelle histoire toute suite de mises-à-jour (globales)  $h = (h_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . On note  $H = M^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des histoires.*

**Définition 17 (Orbite asynchrone associée à une histoire).** *L'orbite d'une configuration  $x$  associée à l'histoire  $h = (h_t)_{t \in \mathbb{N}} \in H$  est la suite des configurations  $\gamma_{h,x} = (x^t)_{t \in \mathbb{N}}$  obtenues par itération récursive de  $F$  sur  $x$  selon :*

$$\begin{aligned} x^0 &= x \\ x^{t+1} &= F(x^t, h_t) \end{aligned}$$

Ces orbites asynchrones peuvent également être représentées sous forme de diagramme espace-temps ; il convient toutefois de noter que de tels diagrammes ne représentent qu'une possibilité donnée liée au choix particulier d'une histoire.

Le système dynamique perd alors la propriété d'autonomie puisqu'il dépend d'un facteur externe : la mise-à-jour. Dans toute la suite, nous supposons que la mise-à-jour d'une cellule n'est pas fixée par un agent extérieur mais par un processus probabiliste interne aux cellules. Il est donc plus approprié de parler de processus stochastique à temps discret pour qualifier le système dynamique résultant de ce choix. Les notions de probabilités permettant de modéliser ce problème sont introduites dans le paragraphe suivant.

### 1.3.2 Modélisation du processus probabiliste

#### Définitions de départ

En supposant que l'asynchronisme provient d'un processus non déterministe interne aux cellules, nous introduisons un ensemble abstrait  $\Omega_0$ , qui va représenter toutes les états possibles du processus interne. Chaque élément  $\omega$  de  $\Omega_0$  va donc représenter *la réalisation d'une épreuve, i.e.*, la donnée d'une suite d'états du processus interne qui permettra de déterminer quelles sont les cellules à mettre à jour à chaque pas de temps. Dans le cadre de ce travail, nous laisserons ce processus interne indéterminé. Dans le contexte de la

physique, on peut par exemple considérer que  $\Omega_0$  représente l'ensemble des états d'un atome instable observés à des temps discrets ; en informatique, on pourra se représenter  $\Omega_0$  comme un générateur de nombres pseudo-aléatoires produisant une suite infinie de nombres décimaux compris entre 0 et 1. Dans le vocabulaire de la théorie des probabilités, un élément de  $\Omega_0$  représente *la réalisation d'une épreuve, i.e.*, la donnée concrète de la suite des états du processus interne.

Dans la suite, nous souhaitons modéliser ce qu'il se produit pour des familles de réalisations d'épreuves. Ces familles de réalisations, ou *événements* vont être représentées sous forme d'ensembles d'éléments de  $\Omega$ , *i.e.* de parties de  $\Omega$ . Pour reprendre les deux exemples précédents, de tels événements peuvent se définir par des énoncés tels que " il n'y a pas eu de désintégration de l'atome durant les 1000 premiers pas de temps " ou " la série des nombres fournie par le générateur pseudo-aléatoire ne contient que des nombres supérieurs à 0.5".

Afin de permettre d'appliquer les règles élémentaires de logique, on exige que l'ensemble des événements soit muni d'une structure particulière appelée  *$\sigma$ -algèbre* ou *tribu*. Plus formellement :

**Définition 18 (Espace probabilisable).** *Soit  $\Omega$  un ensemble (fini ou infini) muni des opérations de complémentaire, d'union et d'intersection. Soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , l'ensemble des parties de  $\Omega$ . Le couple  $(\Omega, \mathcal{A})$  forme un espace probabilisable si  $\mathcal{A}$  est une tribu (*i.e.*, une famille de parties de  $\Omega$  qui contient  $\Omega$  et qui est stable par complémentaire et union dénombrable). Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés événements.*

Pour représenter le fait que les différents événements ont plus ou moins de chance de se produire, on utilise la notion de *mesure de probabilité* (ou simplement *mesure* ou *probabilité*). Une mesure de probabilité permet de représenter le "volume relatif" d'un événement par rapport à l'espace des possibles  $\Omega_0$ . Plus formellement :

**Définition 19 (Mesure de probabilité).** *Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable, une mesure de probabilité ou simplement probabilité est une fonction  $P$  définie sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $[0, 1]$  qui vérifie  $P(\Omega) = 1$  et qui vérifie la propriété de  $\sigma$ -additivité (*i.e.*, la probabilité d'une union dénombrable d'éléments disjoints de  $\mathcal{A}$  est égale à la somme des probabilités de ces éléments).*

On notera que dans le cas où  $\Omega$  est fini, la mesure  $P$  peut se caractériser par les valeurs qu'elle associe à tout singleton de  $\Omega$ .

Il nous reste à introduire l'outil qui va nous permettre de relier l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  à d'autres espaces mesurables représentant des grandeurs



concrètement observables sur les automates cellulaires asynchrones (par exemple une orbite asynchrone, la densité au temps  $t$ , etc.). Nous introduisons pour cela la notion de *fonction mesurable* :

**Définition 20 (Fonction mesurable).** *L'application réciproque  $X^{-1}$  d'une application  $X : E \rightarrow F$  est une fonction de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(F)$  qui à toute partie  $B$  de  $\mathcal{P}(F)$  associe l'ensemble  $X^{-1}(B)$  formé des éléments  $e$  de  $E$  tels que leur image soit dans  $B$ , i.e.,  $X^{-1}(B) = \{e \in E : X(e) \in B\}$ .*

*Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(F, \mathcal{F})$  deux espaces probabilisables, une fonction  $X : E \rightarrow F$  est dite mesurable si  $X^{-1}(\mathcal{F})$  est une sous-tribu de  $E$ .*

Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction mesurable représente un espace muni d'une probabilité, on parlera de *variable aléatoire*. Lorsque l'espace d'arrivée de la variable aléatoire est  $\mathbb{R}$  muni de la tribu des boréliens  $\mathcal{B}^1$  (i.e., la tribu engendrée par la classe des intervalles fermés bornés de  $\mathbb{R}$ ), on parlera de variable aléatoire *réelle*.

On peut remarquer que la donnée d'un espace probabilisé  $(E, \mathcal{E}, P)$  et d'une variable aléatoire définie sur  $(F, \mathcal{F})$  permet de construire une loi de probabilité sur  $(F, \mathcal{F})$  selon :

**Définition 21 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire).** *Soit  $(E, \mathcal{E}, P)$  un espace probabilisé et  $X : E \rightarrow F$  une variable aléatoire définie sur  $(F, \mathcal{F})$ , on appelle loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ , l'application  $P_X$  définie par :*

$$\forall B \in \mathcal{F}, P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Intuitivement, cette dernière définition nous indique que tirer aléatoirement dans un ensemble de départ avec une certaine loi de probabilité revient également, *via* la variable aléatoire, à tirer aléatoirement dans l'ensemble d'arrivée avec une autre loi de probabilité.

## Mesures particulières

Afin de munir l'espace des histoires d'une mesure, nous introduisons les définitions suivantes :

**Définition 22 (Mesure uniforme).** *Soit  $\Omega$  un ensemble fini et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  ; on appelle mesure uniforme la mesure  $\mu_{\text{uni}} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie :*

$$\forall w \in \Omega, \mu_{\text{uni}}\{w\} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Cette mesure sera utilisée pour tirer aléatoirement une cellule parmi  $n$ .

**Définition 23 (Mesure de Bernoulli élémentaire).** Soit  $\alpha \in [0, 1]$  un nombre réel,  $\Omega = \{0, 1\}$  et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ; on appelle mesure de Bernoulli de paramètre  $\alpha$  la mesure  $B_\alpha^1 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie :

$$\forall w \in \Omega, B_\alpha^1\{w\} = \begin{cases} \alpha & \text{si } \omega = 1, \\ 1 - \alpha & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

Cette mesure peut se généraliser sur les mots selon :

**Définition 24 (Mesure de Bernoulli sur les mots).** Soit  $\alpha \in [0, 1]$  un nombre réel,  $n$  un entier positif et  $\Omega = M = \{0, 1\}^n$  et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ; on appelle mesure de Bernoulli de paramètre  $\alpha$  la mesure  $B_\alpha^1 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie :

$$\forall w \in \Omega, B_\alpha^n\{w\} = \prod_{i=1}^n B_\alpha^1\{w_i\}.$$

Nous devons maintenant munir l'ensemble des histoires  $\Omega = M^\mathbb{N} = (\{0, 1\}^n)^\mathbb{N}$  d'une mesure.  $\Omega$  n'étant pas fini, l'ensemble de ses parties a la puissance du continu est il n'est plus possible de définir une mesure à partir des valeurs prises sur les singletons. Pour plus de simplicité, on associe à  $\Omega$  la tribu  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(M))^\mathbb{N}$  (et non l'ensemble de ses parties). De cette façon, il devient possible de définir une mesure en fonction de la valeur qu'elles associe aux *cylindres* (*i.e.*, à l'ensemble des histoires ayant un même début) :

**Définition 25 (Mesure uniforme sur les histoires).** Soit  $E$  un ensemble fini,  $\Omega = E^\mathbb{N}$  et  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(E))^\mathbb{N}$  une tribu de  $\Omega$ ; on appelle mesure uniforme la mesure  $\mu_{\text{uni}} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie :

$$\forall dw = (dw_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}, \mu_{\text{uni}}(dw) = \prod_{i=1}^n \mu_{\text{uni}}\{dw_i\}.$$

**Définition 26 (Mesure de Bernoulli sur les histoires).** Soit  $\alpha \in [0, 1]$  un nombre réel,  $n$  un entier positif,  $\Omega = M^\mathbb{N} = (\{0, 1\}^n)^\mathbb{N}$  et  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(M))^\mathbb{N}$  une tribu de  $\Omega$ ; on appelle mesure de Bernoulli de paramètre  $\alpha$  la mesure  $B_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie :

$$\forall dw = (dw_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}, B_\alpha(dw) = \prod_{i=1}^n B_\alpha^n\{dw_i\}.$$

On voit d'après cette définition que si  $dw$  n'est pas un cylindre (*i.e.*, si l'on n'a pas  $dw_i = M$  à partir d'un certain rang), la mesure associée à  $dw$  est nulle.

## Dynamiques

Nous appelons *dynamique* la mesure qui décrit la façon dont les cellules sont mises-à-jour à chaque pas de temps. Une telle définition reste très générale et elle n'interdit pas de mettre à jour les cellules selon un ordre prédéfini (cas dégénéré de l'utilisation d'une probabilité) ou de faire varier les tirages en fonction du temps. On pourrait par exemple imaginer que la quantité moyenne de cellules mises-à-jour décroît de façon exponentielle avec le temps. Dans la suite, nous excluons cette possibilité et nous supposons que la façon dont on tire les cellules ne dépend pas explicitement du temps. Par analogie avec la terminologie des systèmes dynamiques déterministes, nous dirons qu'une telle dynamique est *autonome*. Plus formellement :

**Définition 27 (Dynamique).** *On appelle dynamique toute variable aléatoire  $\Delta$  définie de  $\Omega_0$  dans  $M^{\mathbb{N}}$ . On note  $\Delta_t$  la variable aléatoire qui associe la  $t$ -ième coordonnée de  $\Delta$ . Une dynamique  $\Delta$  est autonome si les  $\Delta_t$  sont des variables aléatoires identiquement distribuées :*

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{N}, \Delta_{t_1} = \Delta_{t_2}.$$

En utilisant les mesures de probabilité définies ci-dessus, nous définissons deux types de dynamiques autonomes. La première dynamique, dite *dynamique asynchrone stochastique séquentielle*, consiste dans le cas où  $\mathcal{U}$  est fini, à tirer une unique cellule de façon uniforme dans  $\mathcal{U}$ . Plus formellement : La seconde dynamique, dite *dynamique asynchrone stochastique parallèle*, consiste à assigner à chaque cellule, de façon indépendante, une probabilité  $\alpha$  d'être mise-à-jour.

**Notation 3.** *On note  $M_{\text{seq}} = \{m \in M, |m|_1 = 1\}$  l'ensemble des mises-à-jour qui ne contiennent qu'un seul 1.*

**Définition 28 (Dynamique stochastique séquentielle).** *Pour  $\mathcal{U}$  fini, la dynamique (stochastique) séquentielle est la dynamique autonome, notée  $\Delta_{\text{seq}}$ , dont la loi de probabilité est la mesure uniforme sur  $M_{\text{seq}}^{\mathbb{N}}$ .*

**Définition 29 (Dynamique asynchrone stochastique parallèle).** *Nous désignons par dynamique asynchrone stochastique parallèle ou simplement dynamique asynchrone, la dynamique autonome  $\Delta_{\alpha}$  dont la loi de probabilité est une loi de Bernoulli de paramètre  $\alpha$ . Le paramètre  $\alpha$  est appelé taux de synchronisme et il représente l'espérance du nombre de mises-à-jour par unité de temps et par cellule.*

Il est à noter que ces deux dynamiques vérifient une condition d'échantillonnage équitable (“fair sampling condition” dans [BCV02]) : à savoir que toute cellule est mise-à-jour un nombre infini de fois avec une même probabilité <sup>4</sup>.

## 1.4 Sous-espaces d'automates cellulaires

Une des problématiques principales dans l'étude des automates cellulaires est la compréhension du comportement global d'un automate cellulaire à partir de la donnée de sa fonction de transition. Une telle compréhension peut se faire à l'aide d'outils analytiques ou à l'aide d'expériences numériques. Dans ce cas, l'ensemble des états ainsi que le voisinage sont fixés et on examine le comportement de toutes les règles de transitions locales qui peuvent être définies. Or, une règle de transition locale est une fonction  $f : Q^\nu \rightarrow Q$  et le nombre d'automates cellulaires définissables à  $Q$  et  $\nu$  donnés est donc donné par :  $\#_{AC}(|Q|, \nu) = |Q|^{|Q|^\nu}$ . Cette fonction étant doublement exponentielle, il devient rapidement impossible d'examiner expérimentalement toutes les règles possibles. On doit noter que, malgré la restriction au cas binaire  $|Q| = 2$ , cette fonction croît très rapidement. Par exemple, pour  $|Q| = 2, \nu = 5$ , on a :  $\#_{AC}(2, 5) \sim 4.10^9$  et pour  $|Q| = 2, \nu = 7$ , on a :  $\#_{AC}(2, 7) \sim 3.10^{38}$ .

Pour limiter le nombre d'automates cellulaires à examiner, on peut ne s'intéresser qu'à ceux qui vérifient certaines conditions. On peut par exemple exiger que (a) 0 soit un état quiescent, ou que (b) la règle soit symétrique par réflexion, ou que (a) et (b) soient simultanément vérifiées (on parle alors de règles “légalés” [Wol84]). Dans le cas bidimensionnel, il est possible d'ajouter des conditions de symétrie par rotation aux conditions de symétries axiales. Dans les paragraphes suivants, nous exposons des propriétés algébriques des règles de transitions qui permettent de définir des sous-espaces d'automates cellulaires de taille plus réduite.

### 1.4.1 Propriétés remarquables des automates cellulaires

Nous supposons dans la suite que les états des cellules sont représentés par des entiers ou par des entiers éléments d'un groupe fini (*i.e.*,  $Q$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$  ou de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ).

---

<sup>4</sup>Dans [BCV02], les définitions que prennent les auteurs pour la “fair sampling condition” ne requiert que la condition chaque cellule soit mise à jour un nombre infini de fois et non celle de l'équiprobabilité des tirages.

## Règles totalisantes et totalisantes-externes

**Définition 30 (Règles totalisantes et totalisantes-externes).** Une règle  $f$  est totalisante ("totalistic") si elle s'exprime en fonction de la somme des états du voisinage :

$$\exists f_{\text{TOT}} : \mathbb{N} \rightarrow Q, \forall c \in \mathcal{U}, f(q_1, \dots, q_\nu) = f_{\text{TOT}}\left(\sum_{i \in V(c)} q_i\right).$$

Une règle  $f$  est totalisante-externe ("outer-totalistic" ou "semi-totalistic" dans [Gar95]) si sa fonction de transition  $f$  peut s'exprimer en fonction de l'état de  $q_c$  de la cellule  $c$  et de la somme des états du voisinage sans  $c$  :

$$\exists f_{\text{O-TOT}} : Q \times \mathbb{N} \rightarrow Q, \forall c \in \mathcal{U}, f(q_1, \dots, q_\nu) = f_{\text{O-TOT}}\left(q_c, \sum_{i \in V(c)-c} q_i\right).$$

Pour  $Q = \{0, 1\}$ , on code les automates totalisants suivant [PW85] :

$$W(f_{\text{TOT}}) = \sum_{i=0}^V 2^i \cdot f_{\text{TOT}}(i),$$

et

$$W(f_{\text{O-TOT}}) = \sum_{i=0}^{V-1} \sum_{q \in \{0,1\}} 2^{2i+q} \cdot f_{\text{O-TOT}}(q_i).$$

Les automates cellulaires totalisants et totalisants-externes sont invariants par symétrie axiale (droite/gauche et haut/bas en 2D) et par rotation. On notera  $TR$  (resp.  $OTR$ ) une règle totalisante (resp. totalisante-externe) de code  $R$ .

## Règles additives

Le concept de règle additive a été introduit dans [MOW84], la monographie [CCNC97] présente en détail cet ensemble des automates cellulaires en mettant l'accent sur les applications potentielles.

**Définition 31.** Une règle  $f$  est additive si elle vérifie un "principe de superposition" [Wol84] qui s'écrit :

$$\forall (q_1, \dots, q_\nu) \in Q^\nu, f(q_1, \dots, q_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu} q_i \pmod{|Q|}.$$

Cette propriété implique que pour  $|Q| = 2$ , la fonction globale vérifie également un principe de superposition sur les configurations :

$$\forall (x, x') \in Q^{\mathcal{U}} \times Q^{\mathcal{U}}, F_{synch}(x \oplus x') = F_{synch}(x) \oplus F_{synch}(x').$$

où  $\oplus$  symbolise l'addition modulo 2 (ici étendue sur les configurations).

Pour ces règles, l'orbite obtenue en partant d'une configuration quelconque peut alors être connue à partir de l'orbite obtenue en partant d'une configuration comportant une unique cellule dans l'état 1. En effet, notons  $z_c$  avec  $c \in U$  la configuration où toutes les cellules de  $x$  sont à l'état 0 sauf la cellule  $c$  qui est à l'état 1. On a alors, en notant  $U_x = \{c \in \mathcal{U}, x_c = 1\}$  et en notant  $\bigoplus$  l'addition modulo 2 :

$$\forall x \in Q^{\mathcal{U}}, x = \bigoplus_{c \in U_x} z_c.$$

En appliquant le principe de superposition sur les configurations, il vient :

$$\begin{aligned} \forall x \in Q^{\mathcal{U}}, F(x) &= F\left(\bigoplus_{c \in U_x} z_c\right) \\ &= \bigoplus_{c \in U_x} F(z_c) \end{aligned}$$

Cette relation s'étend aux orbites par récurrence et on peut écrire le principe de superposition sur les orbites :  $\forall x \in Q^{\mathcal{U}}, \gamma_x = \bigoplus_{c \in U_x} \gamma_{z_c}$ . Comme les  $z_c$  sont toutes identiques à décalage près, on en déduit que la connaissance d'une seule orbite  $\gamma_{z_c}$  permet de connaître l'ensemble des orbites issues des différentes configurations de l'espace des phases  $Q^{\mathcal{U}}$ .

## 1.4.2 Les automates cellulaires élémentaires

### Définition et codage

**Définition 32 (Automate cellulaire élémentaire).** *On appellera automate cellulaire élémentaire (ACE), un automate cellulaire unidimensionnel à deux états de voisinage de plus proches voisins, i.e.,  $d = 1$ ,  $V(c) = \{c - 1, c, c + 1\}$  et  $f : Q^3 \rightarrow Q$ .*

Il y a  $\#_{AC}(2, 3) = 2^3 = 256$  automates cellulaires élémentaires et nous associons à chacun d'eux un nombre entier dans  $[0, 255]$  selon la convention introduite par Wolfram [Wol84]. Une règle  $f$  a pour code  $R(f)$  :

$$R(f) = f(0, 0, 0) \cdot 2^0 + f(0, 0, 1) \cdot 2^1 + \dots + f(1, 1, 0) \cdot 2^6 + f(1, 1, 1) \cdot 2^7$$

L	A	B	C	D	E	F	G	H
V	000	001	100	101	010	011	110	111
	1	1	1	1	0	0	0	0

TAB. 1.1 – Correspondance entre transitions et étiquettes.

**Notation 4 (Notation des automates cellulaires élémentaires).** *Dans la suite, on désigne par  $\mathbf{R}$  la règle associée au code  $R$ .*

Cette notation est utilisée de façon quasi-systématique dans la littérature consacrée aux automates cellulaires. L'inconvénient est que la donnée du nombre entier  $R(f)$  permet difficilement de connaître les propriétés d'une fonction de transition  $f$  puisqu'il faut d'abord traduire ce nombre en binaire puis associer une transition à chaque bit pour obtenir des informations sur  $f$ . A notre connaissance, la seule déduction directe que l'on peut effectuer partant du code de Wolfram  $W$  est que si  $W$  est pair alors l'état 0 est quiescent et si  $W$  est supérieur à 128 alors l'état 1 est quiescent. Ceci nous conduit à introduire une notation "par transitions" qui permet de saisir plus facilement l'effet de l'application de  $f$  sur une configuration quelconque. Nous associons un nouveau code à  $f$  selon le schéma suivant :

**Définition 33 (Étiquette).** *Pour une règle  $f$  donnée, une transition  $\begin{smallmatrix} abc \\ d \end{smallmatrix}$  est dite neutre si  $b = d$  et active si  $b \neq d$ . Soit  $L$  la bijection qui associe une lettre dans  $\{A, \dots, H\}$  à toutes les transitions actives selon la correspondance du tableau 1.1. La lettre  $L(V)$  est appelée étiquette de la transition  $V$ . Le code de transition d'un automate cellulaire élémentaire  $f$  est l'ensemble des étiquettes des transitions actives de  $f$ .*

On notera  $\emptyset$  l'ensemble vide ; dans notre codage des règles, il correspond au code de transition de la règle "identité" pour laquelle une cellule garde toujours son même état.

Le choix de la correspondance entre les lettres et les transitions est effectué de manière à faciliter l'interprétation du code de transitions. On peut en premier lieu remarquer que si le code de transition *ne contient pas* la lettre A (resp. H), l'état 0 (resp. 1) est quiescent. Par ailleurs, on remarquera que les transitions correspondant aux lettres A, B, C, D (resp. E, F, G, H) concernent les cellules qui se trouvent dans l'état 0 (resp. 1). Cela implique par exemple que si le code de transition d'une règle est un sous-mot de ABCD, le nombre de 1 ne peut qu'augmenter lors de l'évolution de l'automate. On peut également en déduire que si le code de transition d'une règle contient le sous-mot

ABCD (resp. E, F, G,H) alors toute cellule dans l'état 0 est "instable" dans le sens où elle changera d'état si la règle de transition lui est appliquée.

Pour donner un premier exemple d'utilisation de cette notation, considérons par exemple l'automate dont nous avons vu le diagramme espace-temps (cf. figure 1.1) et dont la fonction de transition s'écrit :  $f(a, b, c) = 1$  si  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$  et  $f(a, b, c) = 0$  sinon. Son code de Wolfram est **128** et son code de transition est **EFG**.

On peut remarquer d'ores et déjà les propriétés suivantes :

- Pour cette règle, les états 0 et 1 sont quiescents.
- La règle ne contient aucune lettre dans ABCD, les cellules à l'état 0 ne changent donc jamais d'état (elle sont stables).
- Dans le groupe EFGH, la règle contient les trois lettres EFG mais pas la lettre H, on en déduit qu'une cellule dans l'état 1 est instable sauf si elle est entourée de deux cellules dans l'état 1.

Nous voyons alors que la forme du diagramme espace-temps se comprend facilement : si une cellule est à l'état 0 au temps  $t$ , on peut en déduire que cette cellule, ainsi que ses deux voisines (droite et gauche) seront à l'état 0 au temps  $t + 1$ . Cet état est donc "envahissant" et finit par recouvrir l'ensemble de l'anneau, on atteint alors le point fixe  $*0*$ . Cet exemple est quelque peu simpliste et permet uniquement de se familiariser avec la notation. Nous verrons dans la suite d'autres justifications de l'emploi de cette notation, en particulier dans le chapitre 5 où les automates cellulaires asynchrones sont étudiés analytiquement.

## Symétries

A tout automate cellulaire élémentaire défini par sa fonction de transition  $f$ , on peut associer les automates cellulaires élémentaires suivants :

1.  $f_r$ , la règle réfléchie de  $f$  est la règle obtenue en appliquant la symétrie de réflexion droite/gauche selon :

$$\forall (a, b, c) \in Q^3, f_r(a, b, c) = f(c, b, a).$$

2.  $f_c$ , la règle conjuguée de  $f$  est la règle obtenue en appliquant la symétrie de conjugaison 0/1 selon :

$$\forall (a, b, c) \in Q^3, f_c(a, b, c) = \overline{f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}.$$

3.  $f_{rc}$ , la règle réfléchie conjuguée de  $f$  est la règle obtenue en composant les deux symétries précédentes selon :

$$\forall (a, b, c) \in Q^3, f_{rc}(a, b, c) = \overline{f(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})}.$$



L'obtention des règles réfléchie, conjuguée et réfléchie-conjuguée à partir de la connaissance de l'écriture binaire du code de Wolfram  $W(f) = b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$  se fait selon [LP90] :

$$\begin{aligned} W(f_r) &= b_0b_4b_2b_6b_1b_5b_3b_7 \\ W(f_c) &= \overline{b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0} \\ W(f_{rc}) &= \overline{b_7b_3b_5b_1b_6b_2b_4b_0} \end{aligned}$$

Partant du code de transitions, l'obtention des règles symétriques se fait en permutant des lettres. Le code de la règle réfléchie s'obtient en échangeant les lettres B et C (*i.e.*, en transformant les B en C et réciproquement) et en échangeant les lettres E et F; celui de la règle conjuguée s'obtient en échangeant les lettres A et H, B et G, C et F, D et E; celui de la règle réfléchie-conjuguée en combinant ces deux opérations (cf. figure 1.2). Par exemple, en partant de la règle EFG vue précédemment, on sait que sa règle réfléchie est EFG (*i.e.*, elle est invariante par réflexion), sa règle conjuguée est BCD et sa règle réfléchie-conjuguée est également BCD.

On vérifie aisément que les symétries définies au niveau des règles locales ci-dessus se conservent pour les fonctions de transitions globales associées. Il est donc inutile d'étudier deux règles différentes qui sont le symétrique l'une de l'autre. On définit alors des classes d'équivalence par ces trois symétries, ce qui permet de partitionner l'espace des automates cellulaires élémentaires en 88 classes d'équivalence. Nous dirons d'un automate cellulaire élémentaire qu'il est *représentatif minimal* ("minimal representative"), s'il porte le code de Wolfram le plus petit de sa classe d'équivalence. Par la suite, sauf mention contraire, nous ne considérerons que les représentatifs minimaux ce qui permet de diviser le nombre de règles à examiner par un facteur  $256/88 \sim 3$ .

### Automates totalement symétriques

Un automate cellulaire élémentaire peut être invariant par symétrie de réflexion et par symétrie de conjugaison, dans ce cas, on parlera d'automate *totalement symétrique*.

Les automates cellulaires élémentaires totalement symétriques sont au nombre de huit. Ceci s'explique facilement avec la notation du code de transition. En effet, si une règle est complètement symétrique, si elle contient une des deux lettres A ou H (resp. D ou E) alors elle contient nécessairement AH (resp. DE), et si elle contient une lettre dans BCFG alors elle contient les quatre lettres. Son code est donc invariant par toute permutation des trois sous-ensembles  $\{A, H\}$ ,  $\{B, C, F, G\}$ ,  $\{D, E\}$  et on a  $2^3 = 8$

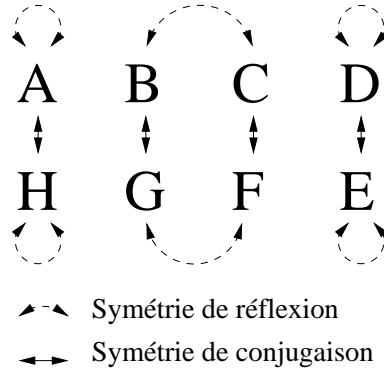


FIG. 1.2 – Effet des opérations de symétrie sur le code de transition.

possibilités pour construire une règle totalement symétrique. Les codes de transition respectifs de ces automates cellulaires élémentaires sont : **23** = ABCFGH, **51** = ABCDEFGH, **77** = AH, **105** = ADEH, **150** = BCFG, **178** = BCDEFG, **204** =  $\emptyset$ , **232** = DE. On peut également remarquer que l'on a :  $23 + 232 = 51 + 204 = 77 + 178 = 105 + 150 = 255$  et  $ABCFGH \cup DE = ABCDEFGH \cup \emptyset = AH \cup BCDEFG = ADEH \cup BCFG = ABCDEFGH$ . Ces relations peuvent s'expliquer en remarquant que ces couples de règles  $(f, f')$  sont associées deux à deux par une symétrie de “complémentation” :

$$\forall (a, b, c) \in Q^3, f'(a, b, c) = \overline{f(a, b, c)}.$$

On remarquera que contrairement à la relation de conjugaison, cette relation ne “passe pas” du niveau local au niveau global (dans le cas général) et ne permet pas de définir des classes d'équivalence qui soient pertinentes en termes de comportement (global) des règles.

### 1.4.3 Automates cellulaires élémentaires remarquables

Il est possible de déduire facilement le comportement global de certains automates cellulaires élémentaires à partir de la donnée de leur règle de transition locale. Nous examinons ici quelques-uns de ces automates.

#### Règles “triviales”

La règle Identité a pour code **204** =  $\emptyset$  et s'écrit :  $\forall (a, b, c) \in Q^3, f_{204}(a, b, c) = b$ . Son application locale consiste à ne rien changer dans une configuration et toutes les configurations sont donc des points fixes. Son effet global est donc de laisser les configurations invariantes.

La règle “nulle” a pour code  $\mathbf{0} = \text{EFGH}$  et s’écrit :  $\forall(a, b, c) \in Q^3$ ,  $f_0(a, b, c) = 0$ . Son application locale est de passer l’état de la cellule à 0 et la fonction globale conduit à la configuration nulle en un seul pas de temps.

La règle d’inversion a pour code  $\mathbf{51} = \text{ABCDEFGH}$  et s’écrit :  $\forall(a, b, c) \in Q^3$ ,  $f_{51}(a, b, c) = \bar{b}$ . Son effet local est d’inverser l’état d’une cellule indépendamment de l’état des voisines. La fonction globale associée inverse donc les configurations et conduit à des orbites cycliques de période 2.

Un peu moins trivialement, la règle  $\mathbf{170} = \text{BDEG}$  s’écrit :  $\forall(a, b, c) \in Q^3$ ,  $f_{170}(a, b, c) = c$ , et son application locale consiste à dupliquer l’état d’une cellule vers la gauche. On la désigne comme *le décalage* ou *shift* pour reprendre la terminologie anglo-saxonne et on la note  $\sigma$  en abrégé. La règle globale décale les configurations et les configuration étant cycliques, les orbites sont constituées de la répétition d’un cycle de longueur au plus égale à la taille de l’anneau.

Nous voyons donc que pour ces trois règles, le comportement global peut être obtenu par une composition triviale du comportement local. Il s’agit bien entendu de cas exceptionnels et nous verrons dans la suite que cette opération de composition simple est impossible dans le cas général.

### Règles additives

Les règles  $\mathbf{60}$ ,  $\mathbf{90}$  et  $\mathbf{150}$  sont additives et leurs règles locales s’écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}\forall(a, b, c) \in Q^3, f_{60}(a, b, c) &= a \oplus b, \\ \forall(a, b, c) \in Q^3, f_{90}(a, b, c) &= a \oplus c, \\ \forall(a, b, c) \in Q^3, f_{150}(a, b, c) &= a \oplus b \oplus c.\end{aligned}$$

La règle  $\mathbf{90}$  possède un comportement global intéressant. En effet, on montre par récurrence que l’évolution d’une orbite  $z_c$  (*i.e.*, partant d’une seule cellule à l’état 1) conduit à la formation du triangle de Pascal modulo 2. En utilisant le principe de superposition sur les configurations (cf. 1.4.1), on peut en déduire par un calcul simple que pour des anneaux de taille  $n = 2^i, i \in \mathbb{N}$ , toute configuration évolue jusqu’au point fixe  $*0^*$  en un nombre d’étapes inférieur ou égal à  $n/2$ . Néanmoins, pour des tailles de grille qui ne sont pas des puissances de 2, cette propriété de nilpotence n’est plus valable et on doit alors recourir à des outils algébriques plus puissants pour borner la taille des cycles (cf. [MOW84] pour une analyse plus précise). Ces différences de comportement sont illustrées sur la figure 1.3.

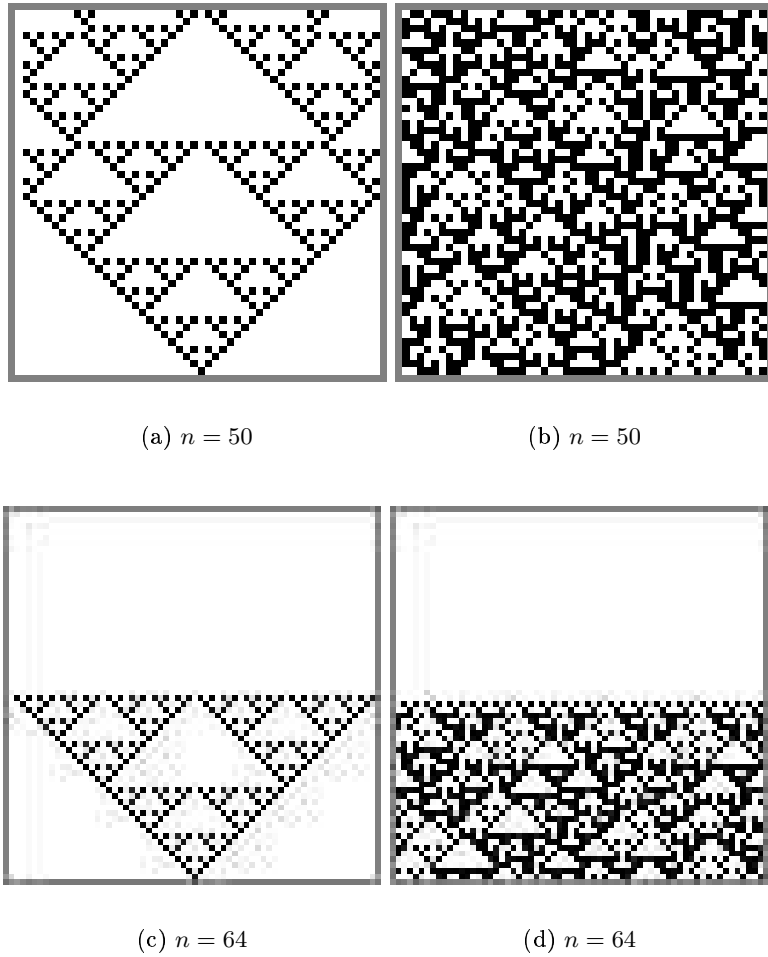


FIG. 1.3 – Diagrammes espace-temps de l'automate cellulaire élémentaire **90** en dynamique synchrone. Les diagrammes (a) et (b) sont obtenus pour  $n = 50$  et les diagrammes (c) et (d) pour  $n = 64 = 2^6$ . À gauche (a) et (c), la condition initiale comporte une unique cellule à l'état 1. À droite (b) et (d), la configuration initiale est aléatoire de densité initiale  $d_{ini} = 1/2$ . On voit que l'automate atteint le point fixe  $*0^*$  avec une condition initiale aléatoire (à droite) si il atteint  $*0^*$  pour une condition initiale "monogène" (à gauche).

W	code tr.	$f(a, b, c)$	sémantique
<b>0</b>	EFGH	0	tout converge vers *0*
<b>51</b>	ABCDEFGH	$\bar{b}$	inversion
<b>60</b>	CDGH	$a \oplus b$	règle additive
<b>90</b>	BCEH	$a \oplus c$	règle additive
<b>128</b>	EFG	$a.b.c$	règle à seuil
<b>136</b>	EG	$b.c$	règle à seuil
<b>150</b>	BCFG	$a \oplus b \oplus c$	règle additive
<b>160</b>	DEFG	$a.c$	identité
<b>232</b>	DE	$a.b + a.c + b.c$	majorité

TAB. 1.2 – Automates cellulaires élémentaires remarquables

Cette règle nous fournit donc un exemple pour lequel le comportement d'un automate cellulaire peut dépendre fortement de la taille de la grille et des conditions aux bords. Il sera important de tenir compte de cette remarque au moment où nous examinerons les limites des protocoles expérimentaux (cf. chapitres 3 et 4).

### Règles à seuil

Les règles à seuil peuvent être vues comme des cas particuliers de réseaux de neurones (cf. [GM91, Gar95] par exemple).

On dira qu'une règle  $f$  d'un automate cellulaire élémentaire est à *seuil* s'il existe quatre entiers  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\theta$  tels que :

$$\forall(a, b, c) \in Q^3, f(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha.a + \beta.b + \gamma.c \geq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque  $\alpha = \gamma$ , la règle est alors *symétrique* et on montre qu'elle converge nécessairement soit vers un point fixe soit vers un cycle d'ordre 2 [GM91].

La règle **128**=EFG est une règle à seuil, son application locale correspond à faire l'opération OU sur les trois cellules du voisinage. La règle **232**=DE est une autre règle à seuil, elle correspond à la règle du "vote de majorité" : la cellule prend l'état qui est majoritairement présent dans son voisinage.

Les résultats algébriques obtenus sur ces règles simples sont synthétisés dans le tableau 1.2.

Il existe d'autres automates cellulaires élémentaires qui ont des propriétés remarquables : citons par exemple le cas de l'automate cellulaire élémentaire **184** qui a la propriété de conserver le nombre de 1 au cours de son évolution (cf. par exemple [Mar01]). On peut également, pour quelques autres

automates cellulaires élémentaires, connaître le comportement global en travaillant par composition : pour l'automate cellulaire élémentaire **15**, par exemple, on obtient  $f(a, b, c) = \bar{a}$  et on voit aisément que le comportement de la règle **15** correspond à la composition (commutative) de la règle d'inversion et du shift <sup>5</sup>. Dans le chapitre suivant, nous verrons que le problème qui consiste à déduire le comportement global d'un automate cellulaire à partir de la connaissance du comportement local est difficile dans le cas général.

#### 1.4.4 Restriction au cas fini binaire

Classiquement, les automates cellulaires sont considérés comme évoluant sur des grilles infinies. Néanmoins, dans une approche où l'on cherche à connaître les propriétés des automates cellulaires par simulation, il devient nécessaire d'avoir un ensemble fini de cellules. Nous supposons donc dans la suite, sauf mention contraire explicite, que les grilles sont *finies*. Pour éviter les problèmes de bord, nous utiliserons la convention la plus couramment adoptée qui est la condition de périodicité aux bords : l'ensemble des cellules  $\mathcal{U}$  est pris dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  en dimension 1 (on a alors un anneau) et dans  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$  en dimension 2 (on a alors un tore) où  $n$  est la *taille* de l'anneau ou du tore.

Ce travail se concentre également sur le cas binaire où l'ensemble des états  $Q$  est pris égal à  $\{0, 1\}$ . Nous verrons dans le prochain chapitre que la restriction au cas binaire n'entrave en rien la richesse des comportements possibles d'un automate cellulaire. Le cas le plus surprenant est sans doute illustré par l'automate cellulaire élémentaire **110** dont il est montré qu'il était universel au sens de Turing [Wol02]. La description des travaux qui cherchent à expliquer le comportement global des automates cellulaires à partir de la connaissance de leur comportement local fait l'objet du prochain chapitre.

---

<sup>5</sup>Le lecteur désirant en savoir plus sur la composition d'automates cellulaires pourra se rapporter aux travaux relatifs au groupage [Oll02] ainsi qu'à l'ouvrage *Computational Analysis of One-Dimensional Cellular Automata* [Voo96], de Burton Voorhees dans lequel l'auteur développe des méthodes algébriques (matricielles) pour l'étude de la composition des automates cellulaires élémentaires.

Dans ce chapitre, nous rappelons les résultats importants en rapport avec nos travaux. Cependant, ce chapitre n'a pas vocation à être un état de l'art complet sur les automates cellulaires. Pour une revue plus large, nous renvoyons le lecteur à [Sar00] et [Pou85, Fat01] pour une présentation plus historique. Nous commençons par présenter le problème de la classification des automates cellulaires en exposant les classifications empiriques et théoriques du comportement des automates cellulaires. Ensuite, nous recensons quelques études numériques qui visent à mesurer des valeurs statistiques définies sur les automates cellulaires. Enfin, nous examinons les études où apparaissent une modification du cadre "classique" des automates cellulaires, en nous attachant plus particulièrement aux perturbations de synchronisme et de topologie qui seront celles que nous étudierons par la suite.

## 2.1 Le problème de la classification des automates cellulaires

### 2.1.1 Travaux de Wolfram

Le problème de la classification des automates cellulaires est posé par Wolfram en 1984 [Wol84]. Après avoir étudié les propriétés statistiques d'automates simples [Wol83], Wolfram propose de diviser les automates cellulaires selon quatre classes liées à l'observation empirique des diagrammes espaces-temps d'une règle donnée. Ces classes sont exposées sur le tableau 2.1.

Classe WI	Les diagrammes espace-temps évoluent vers un état final homogène
Classe WII	Les diagrammes espace-temps évoluent vers des points fixes ou vers des cycles
Classe WIII	Les diagrammes espace-temps évoluent de manière apériodique
Classe WIV	Les diagrammes espace-temps contiennent des structures localisées dans l'espace qui se déplacent sur un fond régulier

TAB. 2.1 – Classification informelle de Wolfram.

Un exemple de comportement de classe WI (première classe de Wolfram) a déjà été vu dans le chapitre précédent avec la règle **128=EFG** (cf. fig. 1.1 page 21). Des exemples typiques de comportements de type classe WII, WIII et WIV sont illustrés sur la figure 2.1.

Si l'examen visuel des diagrammes que nous présentons montre qu'effectivement des comportements bien distincts apparaissent, l'inconvénient de cette classification est qu'elle laisse de nombreux termes non définis. La première chose à préciser est ce que l'on désigne par "les diagrammes espace-temps" : Wolfram laisse entendre qu'il s'agit de "presque tous" ("almost all") les diagrammes mais sans donner de signification formelle à ce "presque tous". Il ne précise pas en outre le temps durant lequel ces diagrammes doivent être observés. Par ailleurs, la distinction entre diagrammes périodiques et apériodiques n'est pas non plus fondée théoriquement puisque les configurations sont de taille finie (cf. partie 1.2). Comme le suggèrent Li et Packard [LP90], le critère séparant les automates "périodiques" des automates "chaotiques" serait plutôt celui d'une périodicité "courte" ou "longue" : la périodicité "courte" serait une périodicité constante en fonction de la configuration initiale alors que la périodicité "longue" serait de type exponentielle en la taille des configurations. Dans la suite, lorsque nous utiliserons les termes de comportement "périodique" et "chaotique", nous l'entendrons au sens de ces critères empiriques définis par Wolfram, les guillemets étant là pour rappeler qu'il s'agit de notions informelles.

### 2.1.2 Les formalisations de la classification de Wolfram

Culik et Yu ont proposé une première formalisation de la classification de Wolfram [CY88]. Elles concernent les configurations "*q*-finies" : on se restreint à l'examen des automates ayant un état quiescent<sup>1</sup> *q* et on examine l'ensemble des configurations infinies ayant un nombre *fini* de cellules dans un état différent de *q* (on dit qu'une telle configuration est à *support fini*).

Les classes de Culik et Yu sont exposées dans le tableau 2.2 ; elles sont contenues les unes dans les autres et permettent de formaliser les classes de Wolfram selon le schéma  $WI = CY1$ ,  $WII = CY2 \setminus CY1$ ,  $WIII = CY3 \setminus CY2 \setminus CY1$ ,  $WIV = CY4 \setminus CY3 \setminus CY2 \setminus CY1$ . Nous renvoyons à [BS00, Mar01] pour une discussion approfondie de cette classification, en particulier pour savoir à quel point elle apparaît comme une "bonne" façon

---

<sup>1</sup>Cette hypothèse semble "raisonnable" dans la mesure où la présence d'un état quiescent peut s'interpréter comme l'existence d'un milieu neutre dans lequel l'information se propage avec une vitesse bornée. Cette vitesse est généralement appelée *vitesse de la lumière* par analogie avec la physique.



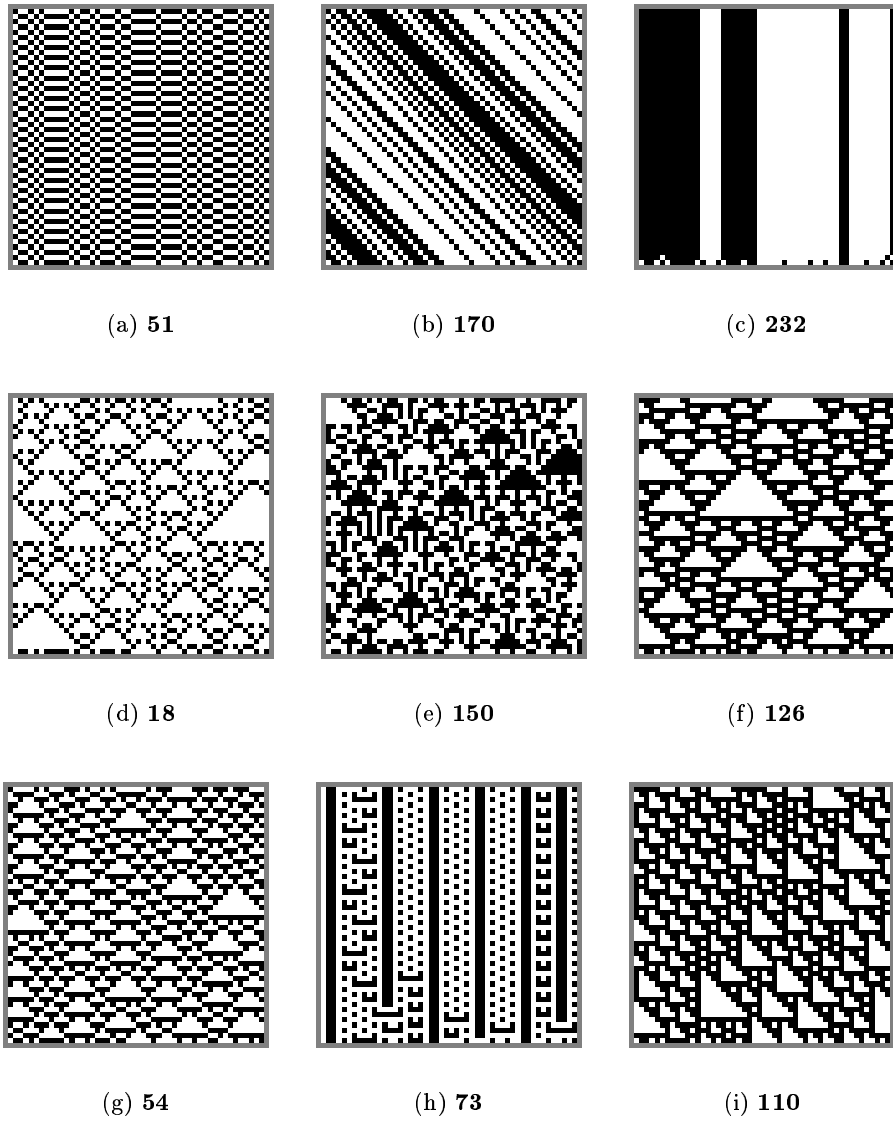


FIG. 2.1 – Diagrammes espace-temps  $n = 50$ . (a,b,c) : Exemples d’ACE “périodiques” (classe WII). (d,e,f) : Exemples d’ACE “chaotiques” (classe WIII). (g,h,i) : Exemples d’ACE “complexes” (classe WIV). Les automates utilisent une même configuration aléatoire de densité  $1/2$ .

classe	condition d'appartenance
CY1	règles telles que toutes les orbites évoluent vers une configuration homogène
CY2	règles telles que toutes les orbites évoluent vers un cycle
CY3	règles telles que étant donnés deux configurations à support fini $x$ et $y$ , il est décidable de savoir si $y$ appartient à l'orbite de $x$
CY4	toutes les règles

TAB. 2.2 – Classification de Culik et Yu.

de formaliser la classification de Wolfram. Le résultat principal des travaux de Culik et Yu est que le problème de la nilpotence (i.e., l'appartenance à la classe 1) est indécidable; il en est de même pour l'appartenance aux classes 2 et 3.

On pourrait penser que l'indécidabilité du problème tient au fait que les configurations sont infinies. Or, Sutner [Sut90] montre que le problème de savoir si toute configuration *circulaire*<sup>2</sup> évolue vers un point fixe est indécidable. Mazoyer et Rapaport [MR99], montrent, par une réduction à un problème de pavages, que le problème de savoir si toute les configurations circulaires évoluent vers un *même* point fixe unique (i.e., l'existence d'un attracteur global) est également indécidable.

Il existe de nombreux autres résultats d'indécidabilité sur les automates cellulaires et on peut même être tenté d'affirmer de manière informelle que toute propriété "intéressante" sur les automates cellulaires a de fortes chances d'être indécidable dans un cas général. Kari [Kar94] énonce, par réduction au problème de la nilpotence, que toute propriété non triviale portant sur les "ensembles limites" (i.e., l'ensemble des configurations qui ont des antécédents d'ordre non borné) des automates cellulaires est indécidable sur l'ensemble des automates cellulaires (ce théorème est analogue au théorème de Rice sur les fonctions récursives)<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>L'ensemble des configurations circulaires est infini.

<sup>3</sup>Il est à noter que des propriétés usuelles telles que l'injectivité ou la propriété de conserver la densité ne sont pas des propriétés qui portent sur "l'ensemble limite". Par ailleurs, le théorème énoncé par Kari, qui s'applique au cas unidimensionnel, ne s'applique plus dès que l'on restreint le nombre d'états. Les implications de ce théorème sont donc limitées ce qui n'empêche pas par ailleurs de continuer à affirmer que les résultats d'indécidabilité sont fréquents dès que l'on examine une propriété non triviale pour un ensemble d'automates cellulaires suffisamment "grand".

### 2.1.3 Une approche par les systèmes dynamiques

En dimension 1, lorsque l'ensemble des cellules considéré est infini, on peut munir l'ensemble des configurations d'une topologie<sup>4</sup> simple en utilisant la "topologie produit" aussi appelée "topologie de Cantor" ou "topologie de Tychonoff". La distance entre deux configurations se définit selon [CFM99] :

$$\forall x, y \in Q^{\mathbb{Z}}, d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|Q|^{|i|}} d_H(x_i, y_i)$$

où  $d_H$  désigne la distance discrète qui vaut 1 si les deux arguments sont égaux et 0 sinon. Cette approche permet de donner une caractérisation élégante des automates cellulaires : ce sont les fonctions continues (pour cette topologie) qui commutent avec le shift [Hed69] (dans certains cas, cette caractérisation est prise comme définition des automates cellulaires). On peut alors espérer transposer les résultats déjà connus sur les systèmes dynamiques continus aux cas des automates cellulaires. Le problème de cette transposition est qu'elle ne peut s'effectuer directement. En effet, il faut remarquer que cette topologie est *centrée* : elle distingue une cellule centrale à partir de laquelle les poids affectés à chaque cellule décroissent de façon exponentielle. Cela implique notamment que pour cette topologie le shift est sensible aux conditions initiales<sup>5</sup>. Il est donc nécessaire d'ajouter des notions plus fortes que la propriété la sensibilité aux conditions initiales pour définir un automate cellulaire chaotique : de telles propriétés peuvent porter sur des propriétés topologiques telles que la compacité ou la densité des orbites dans l'espace des phases. Plusieurs notions de chaos peuvent alors être définies. Par exemple [CFM99], un automate cellulaire est chaotique au sens de Devaney s'il est "régulier" (i.e., l'ensemble de ses points périodiques est dense dans l'espace des phases) et s'il est "transitif" (i.e., si en partant d'un ouvert quelconque de l'espace des phases, les images successives de cet ouvert remplissent tout l'espace des phases). Un automate cellulaire est chaotique au sens de Knudsen s'il est sensible aux conditions initiales et s'il possède une orbite qui est dense dans l'espace des phases. Le lecteur peut se reporter à [CFM99] pour avoir

---

<sup>4</sup>Noter que le mot "topologie" est ici utilisé dans le sens d'un ensemble structuré par une distance, dans la suite il est également utilisé pour désigner la répartition spatiale des cellules et leurs liens (le contexte fixe ici le sens sans équivoque).

<sup>5</sup>Ceci est surprenant puisque les diagrammes espace-temps du shift sont très réguliers. On peut néanmoins interpréter de la sensibilité aux conditions initiales du shift de la façon suivante : cette sensibilité rend compte du fait qu'une perturbation infiniment lointaine, donc insignifiante, peut se propager jusqu'à atteindre le centre de la configuration et donc devenir importante.

classe	condition d'appartenance
C1	$\forall x \in F_0, \lim_{n \rightarrow \infty} l(f^n(x)) = 0$
C2	$\forall x \in F_0, \sup_{n \in \mathbb{N}} l(f^n(x)) < \infty$
C3	$\forall x \in F_0, \sup_{n \in \mathbb{N}} l(f^n(x)) = \infty$

TAB. 2.3 – Classification en fonction de la croissance des motifs (Cattaneo et al.). Cette classification est raffinée dans des sous-classes.  $F_0$  représente l'ensemble des configurations à support fini pour 0.

plus de détails sur ces définitions. Le problème est qu'il devient alors difficile de dire en partant d'une table de transition, si un automate est chaotique ou non. A notre connaissance, les seules règles dont on peut prouver facilement le caractère chaotique sont les règles non trivialement additives (par exemple **60**, **90**, **150**). En effet, nous avons vu que dans ce cas, toute orbite pouvait être décrite comme la somme modulo 2 d'orbites partant d'une unique cellule à l'état 1 (cf. partie 1.4.3). Par conséquent, comme cette orbite "monogène" est de type "chaotique" (i.e., si elle vérifie les critères de chaotité en fonction de la densité des orbites, de la sensibilité aux conditions initiales, etc.), il en résulte que les orbites obtenues par des combinaisons linéaires des orbites monogènes vérifient également les conditions de chaotité.

Une autre approche a été proposée par Braga, Cattaneo, Flocchini et Quaranta Vogliotti [BCFQV95] qui proposent une classification basée sur l'étude de la "croissance" des configurations. Les auteurs choisissent 0 comme état quiescent par défaut et examinent l'évolution des configurations infinies à support fini (cf. paragraphe précédent). Soit une configuration qui s'écrit sous la forme  $(\dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{m-1}, x_m, 0, \dots)$ , sa *longueur* étant la quantité  $l(x) = m - n + 1$ , on étudie l'espace des configurations selon la métrique définie par :

$$d(x, x') = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x' \\ l(x) + l(x') & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette métrique permet de classer les automates cellulaires selon le tableau 2.3.

Le point fort de cette classification est que pour les automates cellulaires élémentaires, l'appartenance des automates dans C1, C2 \ C1, C3 peut être décidée uniquement à partir de la connaissance de la fonction de transition. Néanmoins, l'analyse des résultats montre que ces trois classes ne coïncident que partiellement avec les classes de Wolfram. Les auteurs doivent donc sous-diviser ces trois classes afin de parvenir à grouper les automates en des classes homogènes : dans le cas des 256 automates cellulaires élémentaires, la classification obtenue possède un nombre trop élevé de classes et celles-ci ne

sont même pas toutes homogènes en termes de type de diagramme espace-temps obtenu. En revanche, cette classification a le mérite d’être fondée théoriquement et d’être plus fine que celle de Wolfram. Nous nous appuyerons, dans le chapitre suivant, sur les données de cette classification (fournies dans la synthèse [CFM99]) pour valider nos propres résultats.

#### 2.1.4 L’approche expérimentale

Nous abordons maintenant les travaux qui utilisent les mesures statistiques comme moyen d’étude du comportement des automates cellulaires.

##### Premières mesures statistiques

Dans [Gra83], Grassberger étudie la règle **18** et montre que son comportement peut se réduire à la règle **90** sur des sous-ensembles de cellules dont la taille augmente avec le temps. Ces sous-ensembles sont constitués de domaines où il y a une alternance de 0 et de 1 et qui sont séparés par des “particules”<sup>6</sup> qui suivent une marche pseudo-aléatoire. Grassberger montre expérimentalement que le nombre de ces particules décroît en fonction du temps en une loi de puissance ( $t^{-1/2}$ ) caractéristique des marches aléatoires avec annihilation (“annihilating random walks”). Ce phénomène est étudié plus en détail par Crutchfield et Hanson [HC92] qui, en introduisant un transducteur sur les configurations pour repérer ces “particules”, expliquent en détail les trajectoires suivies par les particules et la façon dont se produisent les collisions.

##### Autour du “portrait de phase”

Nous avons vu (cf. partie 1.2) que la dynamique d’un automate cellulaire (de taille finie) était représentée par son “graphe de transition”, ou “portrait de phase”, qui est la donnée de l’ensemble des attracteurs (i.e., des cycles) et de leurs bassins d’attractions (i.e., des arbres enracinés sur les cycles). Dans [Wue99], Wuensche a proposé une classification automatique de la dynamique des automates cellulaires à partir de l’analyse statistique des propriétés de ce graphe. L’idée de cette classification est d’introduire une mesure permettant de corrélérer la forme du graphe avec l’aspect des diagrammes espace-temps produits par l’automate. Un automate dont les arbres sont très ramifiés et

---

<sup>6</sup>Ces particules sont dénommées “kinks” ou même “solitons” dans la littérature anglo-saxonne. Une large série de travaux leur est consacrée (cf. [HK95] pour une autre étude qui mentionne le cas de l’ACE **18**).

de faible longueur est “périodique” et on s’attend à ce qu’il converge rapidement sur un point fixe ou sur un cycle de faible taille. Un automate dont les arbres sont au contraire peu ramifiés est “chaotique” et on s’attend à ce qu’il converge “lentement”. Wuenche utilise le paramètre  $G$ , qui est la “densité de jardins d’édén” (cf. partie 1.2) comme moyen de discriminer les automates cellulaires “chaotiques” des automates cellulaires “périodiques” :  $G$  doit croître plus vite avec la taille des configurations dans le cas d’un automate périodique que dans le cas d’un automate “chaotique”. Le problème est que le calcul de  $G$  nécessite de savoir calculer de manière efficace tous les prédécesseurs d’une configuration jusqu’à atteindre un jardin d’édén. Wuenche propose alors un algorithme qui permet d’obtenir rapidement, cellule par cellule, tous les prédécesseurs d’une configuration. L’utilisation de cet algorithme lui permet d’introduire un second paramètre,  $Z$ , qui correspond à la probabilité qu’une cellule d’un prédécesseur soit entièrement déterminée lors de l’application de l’algorithme de recherche des prédécesseurs. Les résultats présentés semblent probants puisque pour des tailles de grilles  $n = 40$  (pour les périodiques) et  $n = 50$  (pour les règles chaotiques), les données produites par l’auteur semblent confirmer que les paramètres  $G$  et  $Z$  permettent de classer les automates cellulaires.

Cependant, on peut remarquer que les critères de validation des résultats de ce travail sont assez restreints. D’une part, l’auteur ne valide (visuellement) ses résultats que sur un petit nombre de règles et d’autre part, les données statistiques sont obtenues sur un faible nombre d’échantillons (cinq conditions initiales). Le résultat principal de ce travail est que l’on peut identifier les règles “complexes” comme étant celles dont les paramètres statistiques prennent des valeurs qui sont entre les valeurs obtenues pour les règles “chaotiques” et les règles “périodiques”. Nous retrouvons donc d’une certaine façon l’idée que les règles complexes se situent (statistiquement) dans une transition entre “l’ordre” et “le chaos”.

Une autre étude expérimentale qui nous a parue importante est celle conduite par Sinha et al. [SJ89], où les auteurs examinent six règles des soixante-quatre règles totalisantes examinées par Wolfram dans [Wol84]. Les règles choisies sont classées “chaotiques” ou “complexes” par Wolfram et l’examen des statistiques qu’ils obtiennent permet de dégager trois résultats essentiels :

- (a) L’examen exhaustif de paramètres tels que longueurs de cycles et temps de transition pour toutes les conditions initiales et pour  $n \leq 20$  ne permet pas de discriminer les automates.
- (b) Les propriétés statistiques des automates cellulaires examinés sont

convergentes pour  $n$  tendant vers l'infini.

- (c) Pour les règles chaotiques, les temps de transition varient exponentiellement (par exemple pour la règle **T42** on mesure  $T_{\text{tr}} \sim \exp(n/N_c)$  avec  $N_c \approx 5.6$ ).

Les auteurs proposent également d'examiner la valeur de la *corrélation spatiale*, qui est un paramètre statistique donné par :

$$G(j) = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^t \cdot x_{i+j}^t - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^t \right)^2 \right]$$

Cette fonction quantifie la corrélation moyenne (i.e., le caractère “non aléatoire”) des états de deux cellules situées à une distance  $j$ . Les calculs sont effectués avec  $n = 50000$ ,  $t_0 = 200$  et  $T = 400$ . Un résultat intéressant est que pour la règle **T42**, on observe que la corrélation spatiale est nulle pour toute valeur (non-nulle) de  $j$ . Ceci peut être interprété en disant que cette règle n'introduit pas d'ordre lors de son évolution : partant d'une configuration aléatoire on reste sur des configurations aléatoires (à la différence d'une règle nilpotente par exemple).

### Études exhaustives

En ce qui concerne les études exhaustives dans lesquelles on examine *toutes* les orbites issues de configurations initiales de taille fixe, le travail de Markus [MHK97] indique qu'il est possible de prendre cette approche pour des tailles d'anneau  $n \leq 30$  (en dimension 1). Il utilise le paramètre “HIP” (pour “high periods”) qui mesure le ratio de configurations dont les orbites ont une période de longueur supérieure à 1. Les résultats présentés semblent concluants mais très partiels (sept automates parmi les règles totalisantes de rayon 2) et il reste nécessaire d'analyser un plus grand nombre d'automates pour juger de la fiabilité de la méthode proposée.

Dans [Kan86], Kaneko réalise également des études exhaustives sur les portraits de phase pour des tailles d'anneaux  $n < 20$ . Sa problématique se situe dans le domaine de la théorie de l'information et consiste à évaluer les capacités des automates cellulaires à stocker de l'information. L'information est ici représentée sous la forme d'un attracteur et l'auteur examine les capacités d'une règle à résister à l'ajout de bruit, en l'occurrence à rester dans le même attracteur. Cette étude permet d'introduire une mesure de complexité  $C_B$  quantifiant la complexité de la distribution des bassins d'attraction :  $C_B = - \sum b_i \ln b_i$  où  $b_i$  est le ratio du nombre de configurations de l'attracteur  $i$  sur le nombre total d'attracteurs. Kaneko introduit d'autres

mesures de complexité similaires à  $C_B$  basées sur les sauts entre attracteurs dûs au bruit et il montre alors que :

- (i) Pour les règles de classe WI, les mesures de complexité tendent rapidement vers 0 (avec  $n \rightarrow \infty$ ).
- (ii) Pour les règles de classe WII, les mesures de complexité varient de manière linéaire.
- (iii) Pour les règles de classe WIII, les mesures de complexité augmentent “lentement” et de manière irrégulière.
- (iv) Pour les règles de classe WIV, les mesures de complexité augmentent “rapidement” et de manière irrégulière.

Ainsi, les règles de la classe WIV semblent exhiber un comportement “hybride” : elles possèdent des traits communs à chaque classe et on observe notamment que la taille du bassin d’attraction de  $*0^*$  (pour les règles 0-quiéscentes) est importante relativement aux autres attracteurs. Nous reviendrons sur cette observation au moment d’analyser nos résultats concernant la dynamique synchrone (cf. partie 3.2.1).

Langton a tenté de relier cette classification à un paramètre calculé à partir de la table de transition, le paramètre  $\lambda$ , qui est le ratio de transitions qui ne mènent pas à un état quiescent donné. En fixant  $\lambda$  et en choisissant des règles construites de façon aléatoire (à  $\lambda$  fixé), Langton remarque que la classe de Wolfram change en fonction de  $\lambda$  [LPL90] : on remarque qu’au fur à mesure que  $\lambda$  augmente, les règles choisies ont tendance à être WI puis WII (périodicité), passent par un comportement de type WIV, puis deviennent WIII (chaotiques). Langton émet ainsi l’hypothèse que les règles complexes sont, dans un espace des règles paramétré par  $\lambda$  et éventuellement d’autres paramètres, à la frontière entre le comportement “ordonné” et le comportement “chaotique”. Cette évolution est décrite dans le tableau 2.4, obtenu par Illachinski pour des automates cellulaires définis avec un nombre d’états  $|Q| = 4$ , un voisinage de rayon  $r = 4$  et une taille des configurations  $n = 128$ . Malheureusement, les études détaillées automate par automate montrent que ce paramètre ne se révèle que partiellement pertinent pour étayer la thèse du “bord du chaos” (“edge of chaos”) selon laquelle les règles complexes sont celles qui se situent à la frontière entre l’ordre et le chaos [Lan90]. Plusieurs auteurs tenteront de compléter la description des changements de phase dans l’espace des automates cellulaires en ajoutant au paramètre  $\lambda$  d’autres paramètres (cf. par exemple [SKS04]) sans pour autant parvenir à des résultats probants. Dubacq, Durand et Formenti [DDF01] montrent que tout paramètre de classification récursif ne saurait être “optimal”, au sens où, asymptotiquement, toutes les règles classées comme complexes pour ce paramètre le sont aussi pour les autres paramètres. La conséquence est qu’un paramètre récursif



$\lambda$	comportement
$\leq 0.10$	un point fixe homogène est atteint en quelques pas de temps
$\sim 0.20$	le temps de transition augmente et des structures périodiques apparaissent
$\sim 0.25$	les temps de transition continuent à augmenter, les attracteurs atteints sont des cycles ou des points fixes selon la condition initiale
$\sim 0.35$	les temps de transition augmentent de manière significative, des structures périodiques plus complexes apparaissent
$\sim 0.45$	le temps de transition augmente et le comportement de l'automate devient de plus en plus complexe
$\sim 0.55$	les temps de transition deviennent tellement longs que le système semble atteindre un état stationnaire "chaotique" dans lequel les configurations changent mais les caractéristiques statistiques restent constantes
$\geq 0.70$	l'état stationnaire chaotique est atteint après quelques pas

### Travaux de Langton

TAB. 2.4 – Description qualitative du comportement d'un automate cellulaire en fonction de  $\lambda$ . Les résultats obtenus correspondent à une expérience menée avec un nombre d'états  $|Q| = 4$ , un voisinage de rayon  $r = 4$  et une taille des configurations  $n = 128$  (d'après [Ill01]).

possède nécessairement un ensemble de règles sur lequel sa classification est “erronée”.

Dans [LP90], les auteurs utilisent une classification en cinq catégories : nilpotents, points fixes, périodiques, “localement chaotiques” (**26, 73, 154**), chaotiques. Cette classification est raffinée dans [Li92] où la classe des périodiques est subdivisée selon la périodicité (les règles périodiques de période supérieure ou égale à 3 sont les ACE **26, 41, 73, 62, 94, 154**).

## Transitoires

On trouve peu d’études portant sur les transitoires. Gutowitz [Gut91], en se limitant à quatre règles (ACE **22, 30, 54** et **T20**) et à des tailles d’anneau  $n$  maximales de 33, 87, 185, 700 a mesuré des temps de transition égaux à  $2 \cdot 10^6$ ,  $8 \cdot 10^6$ ,  $4 \cdot 10^5$ ,  $7 \cdot 10^4$ . En faisant varier la taille des configurations, il constate que les longueurs des transitoires varient de façon exponentielle pour les trois règles chaotiques **22, 30, 54** et comme une loi de puissance (“power-law”) pour la règle **T20**. Les statistiques sont réalisées avec 150 conditions initiales et Gutowitz remarque qu’il y a un compromis entre la taille de l’anneau et le nombre de conditions initiales que l’on peut considérer.

Il est à noter que ces temps de transitoire correspondent aux longueurs des arbres dans les portraits de phase ; en ce qui concerne les quantités statistiques (la densité par exemple) les temps de transitoire sont en général bien plus courts. Cette distinction entre les deux transitoires apparaît de façon claire dans [GH90], couplée avec l’idée importante qu’il est nécessaire de choisir les configurations initiales en fonction de leur densité.

Nous voyons donc que l’étude expérimentale du comportement des automates cellulaires est en général difficile. Pour des raisons pratiques, il est important de restreindre son domaine d’étude : on doit décider si l’on examine une règle, quelques règles ou tout un ensemble de règles. Par ailleurs, il faut également choisir quelles sont les conditions initiales (étude exhaustive ou tirage aléatoire). Enfin, la difficulté essentielle réside dans le choix des paramètres que l’on mesure lors de l’évolution de l’automate.

## 2.2 Le problème de la robustesse à l’asynchronisme

L’objet de cette partie est d’examiner les travaux qui ont été conduits autour du concept “robustesse à l’asynchronisme” d’un automate cellulaire.

La première étude sur cette question est, à notre connaissance, effectué par Ingerson et Buvel en 1984 dans [T.E84] :

“ (...) Cellular automata exhibit such remarkable self-organization that it is certainly tempting to consider the possibility that they may be a valid model for real-world systems, such as the growth of biological organisms, crystals, snowflakes, etc. However, one commonly made assumption about these systems is that the cells iterate synchronously. We wanted to estimate how much of the interesting behavior of cellular automata comes from synchronous modeling and how much is intrinsic to the iteration process.”<sup>7</sup>

Les auteurs réalisent des expériences numériques sur les automates cellulaires élémentaires et montrent qu’en faisant varier le processus d’itération, on observe pour certaines règles des changements de comportement importants alors qu’il existe d’autres règles dont le comportement est peu affecté. L’étude est néanmoins purement qualitative et les auteurs ne proposent pas de méthode systématique pour évaluer les changements de comportement.

En 1993, Huberman et Glance relancent la question de l’étude de la robustesse en étudiant une variante spatiale de modèle du “dilemme du prisonnier” [HG93]. Dans cette variante de l’exemple paradigmatique de la théorie des jeux, les joueurs sont disposés sur une grille carrée et jouent “sans mémoire ni stratégie” [NM92]. Les auteurs de cette étude critiquent les résultats obtenus avec le modèle classique en arguant du fait que le modèle spatial ne peut être réaliste puisqu’il suppose que les joueurs mettent à jour leur état de façon synchrone. Ils montrent que si cette hypothèse est relâchée, les observations premières ne se retrouvent plus.

### Études en rapport avec la biologie

En 1994, Bersini et Detours étudient une version asynchrone du Jeu de la Vie [BD94]. Cet article est fondamental puisqu’il montre clairement un changement de phase (même si le mot n’est pas employé) qui survient avec la modification dynamique synchrone / dynamique asynchrone. Les auteurs partent du constat que deux modèles aux règles dévolution très similaires, à savoir de Jeu de la Vie et l’Immune Network Model (INM), peuvent produire des dynamiques radicalement différents. Pour comprendre ce changement, les

---

<sup>7</sup>Les automates cellulaires font apparaître des propriétés d’auto-organisation si remarquables qu’il est certainement tentant de considérer la possibilité pour qu’ils soient un modèle valable pour des systèmes issus du monde réel, tels que ceux qui décrivent la croissance d’organismes biologiques, des cristaux, des flocons de neige, etc. Cependant, une hypothèse communément admise pour ces systèmes est que les cellules sont itérées de façon synchrone. Nous avons voulu estimer dans quelle mesure le comportement intéressant des automates cellulaires provient de la modélisation synchrone et dans quelle mesure il provient du comportement intrinsèque du modèle. (traduction personnelle)

auteurs se demandent quelle est le facteur clé qui expliquerait la différence entre les deux modèles : le voisinage gaussien, la non-localité de la fonction de transition ou l'asynchronisme dans la mise-à-jour. Ils étudient alors différentes versions du Jeu de la Vie et observent que le passage d'un comportement de type classe WIV (caractérisé par de longues transitoires) à un comportement de type classe WI se fait au moment du changement du type de mise-à-jour. Ils concluent leur article sur l'importance à donner à ce type d'études : si tous les automates cellulaires intéressants (type classe WIV) sont non robustes alors on est en droit de s'interroger sur la validité des modèles.

Des questions similaires seront évoquées dans le travail de Stark et Hugues qui mettent en relation la question du comportement "réel" des tissus biologiques et leurs descriptions possibles par des automates synchrones et asynchrones [SH00]. Ils considèrent un problème fondamental dans l'étude de la morphogenèse qui est celui de l'explication du développement de motifs réguliers dans un milieu de cellules. Turing, en 1952 [Tur52], avait proposé une solution mettant en jeu la diffusion et la réaction de morphogènes dans un milieu continu mais ce modèle peut être critiqué à juste titre sur le fait que les milieux biologiques réels ne sont pas continus et sont constituées de cellules qui évoluent de manière asynchrone. Aussi proposent-ils un automate cellulaire asynchrone qui résout ce "problème des taches de léopard de Turing", à savoir l'obtention d'une structure spatialement périodique par des mécanismes de réaction-diffusion.

### Études quantitatives

Nous trouvons une des premières études quantitatives de la robustesse par rapport à la dynamique de mise-à-jour dans le travail de Schönfish et de Roos effectué en 1999 [SdR99]. Les auteurs étudient différents types de fonctions de mise-à-jour et montrent qu'une des données clés pour comprendre le type de dépendance par rapport à la mise-à-jour est la corrélation entre l'arrangement spatial des cellules et l'ordre de mise-à-jour des cellules. Un exemple typique est fourni par la mise-à-jour en ligne des cellules : il est clair que ce type de mise-à-jour introduit des comportements non représentatifs de l'évolution synchrone (ou asynchrone aléatoire) d'un automate. Les auteurs montrent que la seule façon d'éviter ces corrélations est d'utiliser des fonctions de mise-à-jour qui n'utilisent pas l'information de position des cellules. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce travail.

Pour compléter ce tour d'horizon relatif à l'asynchronisme, notons que les automates cellulaires asynchrones peuvent être placés dans le cadre plus

général des automates cellulaires probabilistes. Dans ce dernier modèle, les transitions sont toutes des fonctions aléatoires, ce qui permet de modéliser autant la notion d’asynchronisme que la notion de bruit, voire de grouper les deux (cf. [Kan94, RZ02] par exemple). Le cadre des automates cellulaires probabilistes permet de poser des problèmes différents : on se demande par exemple s’il existe des distributions stationnaires (cf. [Lou02]) ou si des propriétés existantes dans les automates cellulaires classiques se retrouvent encore dans les modèles probabilistes (cf. [Gác03, Fuk04, APL04]).

## 2.3 Modifications de topologie

En ce qui concerne les modifications de topologie dans les automates cellulaires, il existe à notre connaissance très peu de travaux qui abordent cette question sous l’angle de la robustesse. Schönfisch [Sch97] a étudié comment des motifs isotropes se développent dans des automates cellulaires bidimensionnels définis avec des règles à seuil. Elle montre que la meilleure façon d’obtenir une propagation isotrope d’un motif consiste à utiliser des graphes définis en plaçant les cellules de façon aléatoire (uniforme) dans une portion de plan euclidien en évitant que deux cellules soient à une distance  $d$  fixée arbitrairement. Le voisinage d’une cellule est alors défini comme l’ensemble des cellules situées à une distance  $\delta > d$  et  $\delta$  est choisi de manière à ce que la taille moyenne des voisinages soit égale à 9 pour comparer avec les voisinage de Moore <sup>8</sup>.

On trouvera également des modifications de topologie dans la notion “d’automate cellulaire structurellement dynamique” (“structurally dynamic cellular automata” qui a été développée par Halpern et Illachinski [Maj94, IH87, Ill01]). Dans ce modèle, le graphe sous-jacent de l’automate cellulaire évolue en fonction d’une méta-règle qui utilise l’état des cellules et de leur voisinage.

On trouve également dans la monographie d’Illachinski [Ill01] des pistes de recherche prometteuses sur les automates cellulaires avec topologie perturbée. Pour des automates cellulaires binaires unidimensionnels, l’auteur utilise des “combinaisons linéaires stochastiques” de voisinages de rayon  $r$  et  $r + 1$  afin de définir des voisinages à rayon non entier. De façon assez surprenante, il montre qu’il est possible d’isoler des règles qui ont un comportement “simple” (i.e., “chaotique” ou “périodique”) pour des valeurs de

---

<sup>8</sup>Cette façon de construire un graphe non régulier est très proche du protocole défini par Markus dans les travaux sur la réaction-diffusion [MH90, MS92]. Néanmoins, l’auteure affirme que les manipulations mathématiques sont plus aisées avec sa méthode.

rayon  $r$  entières et un comportement “plus complexe” pour des rayons non entiers.

Enfin, citons également les travaux de Serra et Villani [SV02] qui ont défini leur étude comme un problème de robustesse : ils étudient la règle de majorité avec un graphe qui est perturbé en fonction d’un algorithme de type “petit monde” : on parcourt le graphe des liaisons entre cellules et on redirige un lien d’une cellule vers sa voisine sur une autre cellule choisie aléatoirement. Les auteurs montrent que le comportement d’un automate varie fortement en fonction de la probabilité avec laquelle les liens sont redirigés : en particulier ils notent que les temps de transitoires vers un point fixe s’allongent considérablement alors que le nombre d’attracteurs que le système peut atteindre se réduit fortement.

## 2.4 Position de notre travail

Cet aperçu des travaux existants sur les automates cellulaires nous permet de définir les limites dans lesquelles se situe notre travail.

Dans un premier temps nous privilégierons une approche expérimentale. En effet, les travaux théoriques (Culik, Yu, Kari, Sutner, Mazoyer, Rapaport et al.) qui ont été conduits dans le cadre de la théorie de la complexité algorithmique permettent de bien montrer que des problèmes simples tels que l’arrêt de l’automate sur un point fixe, homogène ou non, pour des configurations infinies ou circulaires (de taille non bornée), sont indécidables. Quant aux travaux théoriques conduits dans le cadre de la théorie topologique des systèmes dynamiques (Cattaneo et al.), nous avons vu que le principal inconvénient résidait dans l’emploi d’une topologie centrée qui obligeait à raffiner la notion de chaos et ne permettait pas à notre sens de décider simplement si un automate était chaotique ou non. Il nous paraît donc préférable d’aborder notre étude de la robustesse sous un angle expérimental, afin de disposer d’une première classification qui, bien qu’empirique, nous permette de commencer à travailler sur ce problème.

Pour que nos expériences soient aussi fiables que possible, nous les conduirons sur des échantillons aussi grands que possible. Nous verrons en particulier que nos protocoles seront appliqués à l’ensemble des automates cellulaires élémentaires (cas synchrone et asynchrone) et à toutes les règles totalisantes de rayon  $r = 2$  qui sont 0-quiescentes (cas synchrone). Ceci permettra d’éviter de “choisir” uniquement les règles qui valident les résultats.

En ce qui concerne les conditions initiales, nous avons préféré tirer aléatoirement un nombre restreint de configurations plutôt que d’examiner ex-

haustivement l'ensemble des conditions initiales. En effet, l'approche exhaustive ne peut être utilisée que pour des grilles de faible taille et risque de produire des résultats qui ne représentent pas le comportement "limite" qu'on attend pour des tailles de plus en plus grandes. Pour varier le type de condition initiale, nous choisirons de les tirer avec des densités initiales différentes.

Dans la suite, nous choisirons toujours l'approche statistique pour étudier les configurations et la notion de "comportement" sera définie dans un sens macroscopique. Ceci sera vrai pour la définition des "transitoires" : nous avons vu que la notion de "comportement transitoire" peut s'entendre soit comme le temps pris pour un automate pour entrer dans un cycle, soit comme le temps qu'il met pour atteindre un état stationnaire (où les valeurs des paramètres macroscopiques ne varient pas). Notre choix de paramètre macroscopique s'est porté sur l'utilisation de la densité. L'idée première pour son utilisation est qu'il s'agit là d'un paramètre très simple dont le calcul demande peu de temps pour une machine. Bien qu'il soit intéressant de croiser les données obtenues avec la densité avec celles qui sont obtenues avec d'autres paramètres, nous nous avons préféré, pour des raisons de cohérence, nous limiter à la seule étude de la densité tout au long de ce travail.

Lorsque nous aborderons la question de l'étude expérimentale de l'asynchronisme, nous utiliserons une approche similaire à celle adoptée par les auteurs cités (Ingerson, Buvel, Bersini, Detours et al.). Néanmoins, nous ne nous limiterons pas à la seule description des phénomènes que nous observons et nous en donnerons, lorsque cela est possible, une explication plus détaillée.

Une condition préalable à l'étude des changements de comportement d'un automate cellulaire est, bien entendu, de savoir évaluer ce comportement. Le chapitre précédent nous a montré toutes les difficultés de cette entreprise. Nous avons vu en particulier que plusieurs approches expérimentales butaient sur le problème de la validation des résultats : cette validation s'effectue généralement sur un petit nombre de règles et devient vite impraticable sur un grand nombre de règles en raison de temps de calcul trop longs.

Nous présentons dans ce chapitre une façon d'aborder ce problème qui se base sur l'étude des variations statistiques du paramètre densité. La première partie décrit le protocole expérimental que nous utilisons et la seconde partie est consacrée à la présentation des résultats et à leur vérification. Nous nous limitons ici à l'étude du cas de la dynamique synchrone qui a été le plus largement étudié, l'étude du cas de la dynamique asynchrone faisant l'objet du prochain chapitre.

### **3.1 Construction d'un protocole expérimental**

Nous commençons tout d'abord par examiner des différentes possibilités qui s'offrent à nous pour procéder à une analyse expérimentale du comportement d'un automate cellulaire. Ensuite, nous exposons protocole de classification du comportement synchrone d'un automate cellulaire.

#### **3.1.1 Choix du domaine d'observation**

##### **Choix de la taille des configurations**

Nous avons vu dans la partie 1.2 que l'ensemble des orbites d'un automate cellulaire peut être entièrement caractérisé par son "graphe de transition" (ou "portrait de phase"). Cependant, le calcul exhaustif de ce graphe



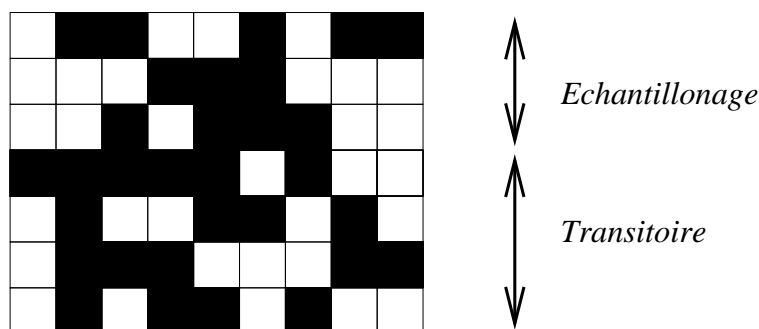


FIG. 3.1 – Temps de transitoire  $T_{tr}$  et d'échantillonnage  $T_{ech}$ .

à  $2^n$  sommets devient vite impraticable pour des tailles  $n > 30$ . Les études dont nous disposons qui ont été conduites sur des tailles inférieures à  $n = 30$  (cf. partie 2.1.4) aboutissent à des résultats contradictoires : certains auteurs laissent penser que l'on peut tirer des conclusions sur le comportement asymptotique d'une règle pour des faibles tailles de grille (cf. les travaux de Wolfram, Wuenche, Markus et al. [Wol83, Wol84, WL92, Wue99, MHK97]) alors que d'autres travaux disent explicitement le contraire (cf. [SJ89] par exemple).

Par prudence, il nous semble préférable de travailler sur des tailles de grille qui soient au moins supérieures à  $n = 50$ . L'examen exhaustif de toutes les conditions initiales étant trop long, on contourne le problème en réalisant un échantillonnage des conditions initiales. On part alors d'une configuration initiale choisie au hasard et on calcule entièrement l'orbite générée par cette configuration. Le problème est que la longueur d'une orbite pouvant être elle-même de taille exponentielle, l'opération d'échantillonnage peut alors ne pas être suffisante. De plus, il faut noter que notre objectif n'est pas de connaître les tailles des cycles et le temps pour entrer dans un cycle comme c'est souvent le cas, mais d'obtenir une condition bien plus faible qui est de savoir si l'automate a atteint un état stationnaire pour lequel les valeurs statistiques ne varient plus (cf. la discussion à la fin du chapitre précédent).

### Choix des constantes $T_{tr}$ et $T_{ech}$

Dans ce cas, il peut être intéressant de se limiter à l'examen d'une portion fixe des orbites : cette portion est obtenue en faisant évoluer l'automate durant un temps  $T_{tr}$  appelé *temps de transitoire* ; et en mesurant la valeur d'un ou plusieurs paramètres durant un temps  $T_{ech}$ , dit *temps d'échantillon-*

*nage* (cf. fig. 3.1). Il est à noter que le “temps de transitoire” tel que nous le définissons ici, correspond à une constante fixe du protocole et ne correspond pas nécessairement au temps réel que met l’automate pour atteindre un état stationnaire. Pour que les observations soient représentative, on doit donc choisir une valeur de  $T_{tr}$  telle que l’automate atteigne effectivement un état stationnaire et une valeur de  $T_{ech}$  qui permette d’avoir une mesure représentative de cet état stationnaire.

En toute rigueur, il conviendrait même d’adapter les valeurs de  $T_{tr}$  et  $T_{ech}$  à chaque règle analysée. Le problème est que l’on ne dispose que de très peu de données théoriques ou expérimentales concernant les valeurs attendues des transitoires *réelles* d’un automate cellulaire. Aussi, pour plus de simplicité dans l’application de nos algorithmes, nous prendrons une unique valeur de ces deux paramètres pour toutes les règles examinées. Ces valeurs seront déterminées expérimentalement de manière à assurer la stabilité des résultats.

### 3.1.2 Le paramètre densité

L’analyse des orbites étant restreinte à des portions fixes, nous proposons d’estimer la “variabilité” existant au sein de cette portion comme moyen de classer les orbites selon un critère “régulier” ou “chaotique”. On s’attend en effet à ce que, sur un temps d’échantillonnage donné, une orbite de type “périodique” contienne un faible nombre de configurations différentes, et qu’à l’inverse, une orbite de type “chaotique” contienne un grand nombre de configurations différentes. Pour estimer cette “variabilité” au sein d’une orbite, on doit disposer d’une distance entre configurations qui permette de quantifier à quel point un ensemble de configurations contient des éléments “éloignés” les uns des autres.

Une première possibilité pour quantifier la différence entre configurations consiste à prendre les configurations deux à deux et à compter le nombre de cellules ayant un état différent. Ceci correspond, dans le cas de configurations unidimensionnelles infinies à l’utilisation de la pseudo-distance de Besicovitch définie dans [Cer02] :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, d_B(x, y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_h(x_{-n:n}, y_{-n:n})}{2n + 1}$$

où  $x_{-n:n}$  désigne la sous-configuration de  $x$  comprise entre les indices  $-n$  et  $n$  et où  $\Delta_h$  désigne la distance de Hamming entre deux sous-configurations (*i.e.*, le nombre d’indices pour lesquels les valeurs des cellules diffèrent).

D'un point de vue macroscopique, cette distance ne pourra ici convenir puisqu'elle conduit à associer une distance non-nulle à une configuration  $x$  et sa configuration décalée  $\sigma(x)$  alors que l'on souhaite dire que ces deux configurations sont à distance nulle.

Une seconde possibilité consiste à quotienter la distance par décalage comme il a été proposé par Flocchini et Geurts [GF96] mais on remarquera que d'un point de vue pratique, cette opération nécessite un temps de calcul non négligeable; et que d'un point de vue théorique, elle peut paraître totalement *ad hoc*.

C'est ce qui nous a amené à proposer de comparer les différentes *densités* contenues dans un ensemble de configurations pour estimer la "variabilité" de cet ensemble. On appelle ainsi *d-spectre* le nombre de densités différentes atteintes dans une portion d'orbite. L'avantage principal de ce paramètre est d'une part qu'il est invariant par décalage et que d'autre part le temps de calcul nécessaire pour l'évaluer est linéaire en fonction de la taille des configurations et sur un nombre de configurations à examiner.

Il est clair que la densité étant une *moyenne*, son utilisation ne fournit qu'une première approximation de la variabilité réelle existant au sein d'une portion d'orbite. Dans la suite, par souci de rapidité et de simplicité, nous nous limiterons à l'utilisation de ce seul paramètre pour réaliser nos expériences numériques. On remarquera que dans les cas où l'utilisation de la densité est insuffisante, les mesures peuvent se raffiner en comptant non pas seulement le nombre de 1 mais en dénombrant le nombre de tous les sous-mots de longueur 2 (00, 01, 10, 11); voire de tous les sous-mots de longueur  $k$  quelconque. Cette démarche est nécessaire dans le cas des règles où la densité est conservée : le *d-spectre* de toute orbite est alors toujours égal à 1 et aucune information en peut être obtenue sur le comportement réel de l'automate. Il est à noter que la propriété de conservation de la densité est décidable (cf. [Mor03, MBG04]). Pour le sous-ensemble des automates cellulaires élémentaires, il correspond aux classes d'équivalence des règles **204** (identité), **170** (le shift) et de **184** dont la dynamique est connue et correspondent effectivement (par chance) à des règles où tous les *d-spectres* sont égaux à 1. Nous allons donc par la suite examiner si l'étude de la densité pour les règles qui ne conservent pas la densité permet effectivement de discriminer les comportements de type "périodique" ou "chaotique".

### 3.1.3 Choix des conditions initiales

Le choix du paramètre de mesure étant effectué, il nous reste à déterminer comment échantillonner les conditions initiales.

**Définition 34 (densité initiale).** Soit  $d_{\text{ini}} \in [0, 1]$  un réel ; on appelle obtention de configuration initiale de densité  $d_{\text{ini}}$ , l'opération qui consiste à échantillonner une configuration dans  $Q^{\mathcal{U}}$  avec une loi de Bernoulli de paramètre  $d_{\text{ini}}$ .

Le choix le plus simple consiste à prendre la mesure uniforme  $\mu_{\text{uni}}$  qui associe la même probabilité d'être tirée à toutes les configurations de  $Q^{\mathcal{U}}$ . Néanmoins, la mesure uniforme peut ne pas être représentative du point de vue des densités. En effet, la distribution des densités est une courbe binomiale qui tend vers une gaussienne centrée sur  $d = 1/2$  pour des grandes tailles de grille  $n$ . La majorité des configurations échantillonnées aura donc une densité proche de  $d = 1/2$  et l'on peut dire que "visuellement", elles seront quasiment toutes semblables.

On peut donc ne pas vouloir choisir uniformément dans l'ensemble des configurations mais uniformément dans un intervalle donné de densités  $D$ . Dans ce cas, on contruit l'ensemble des conditions initiales, en découpant l'intervalle  $D$  par pas réguliers en un ensemble discret  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  et en associant à chaque élément  $d_i$  de  $D$  une configuration initiale de densité  $d_i$ .

Si  $D$  est assez grand, on obtient des configurations plus variées que celles d'un échantillonnage uniforme (du point de vue de la densité) et on peut ainsi estimer le comportement de la règle étudiée de façon plus précise.

L'algorithme de classification que nous proposons est donc caractérisé par trois choix :

- L'examen de *portions d'orbites* ;
- l'utilisation du paramètre  $d$ -spectre, qui utilise la densité des configurations ;
- l'échantillonnage d'un nombre restreint de configurations initiales.

La question que nous examinons maintenant est de savoir si ces choix, qui sont tous générateurs d'une perte d'information, conduisent à des résultats qui peuvent se valider en fonction des travaux déjà existants.

### 3.1.4 Définition du protocole expérimental

**Notation 5.** On notera  $[x_{\min}, x_{\max}](x_{\text{stp}})$  l'intervalle discret correspondant à l'ensemble  $\{x_{\min}, x_{\min} + x_{\text{stp}}, \dots, x_{\max}\}$ . Dans la suite,  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  et  $x_{\text{stp}}$  représentent respectivement les valeurs minimale, maximale et le pas de variation d'un paramètre donné.

Dans tout ce chapitre, afin de ne pas surcharger les notations, on supposera que la règle  $f$  à étudier, ainsi que les valeurs de  $n$ ,  $T_{\text{tr}}$  et  $T_{\text{ech}}$ , sont fixées.

**Définition 35 (*d*-spectre).** Pour toute configuration  $x$  de  $E$ , on appelle *d*-spectre de  $x$  le nombre  $\tilde{\tau}(x)$  défini par :

$$\tilde{\tau}(x) = |\{d(x), x \in \gamma_x([T_{\text{tr}}, T_{\text{tr}} + T_{\text{ech}}])\}|,$$

où  $d(x)$  désigne la densité d'une configuration  $x$  (cf. définition 7).

**Définition 36 (Distribution et intervalle spectraux).** L'ensemble  $T_I = \{\tilde{\tau}(c_i), c_i \in I\}$  composé des *d*-spectres des éléments de  $I$ , est appelé distribution spectrale de l'automate et nous appelons intervalle spectral le plus petit intervalle qui contient la distribution spectrale.

L'idée centrale de notre classification est que, contrairement à un automate "chaotique", un automate "régulier" ne doit pas être capable de générer des orbites aux périodes arbitrairement longues. On espère pouvoir discriminer ces deux types d'automates selon les valeurs de leur intervalle spectral. La discrimination pourra avoir lieu si pour un automate "régulier" toutes les orbites examinées ont un *d*-spectre qui ne dépasse pas une valeur  $K_p$  (*i.e.*, que les intervalles spectraux soient compris dans  $[1, K_p]$ ) et si pour un automate "chaotique" toutes les orbites examinées ont un *d*-spectre qui soit supérieur à une constante  $K_c$  (avec  $K_c$  supérieur à  $K_p$  pour éviter le recouvrement des intervalles  $[1, K_p]$  et  $[K_c, \infty]$ ).

Le choix de la taille de la grille est effectué en remarquant que la valeur du *d*-spectre ne peut excéder  $n + 1$ . La taille de grille  $n$  doit donc être supérieure à  $K_c$  (en pratique bien supérieure) si l'on veut pouvoir classer un automate comme chaotique. Expérimentalement, nous remarquons qu'il devient possible d'effectuer une discrimination à partir de  $n = 50$ .

## Classification

On note  $I_D$  l'ensemble des conditions initiales. On construit  $I_D$  en prenant une condition initiale pour chaque densité  $d$  de l'intervalle discret  $[d_{\min}, d_{\max}](d_{\text{stp}})$ . On évalue alors le *d*-spectre des éléments de  $I_D$  selon l'algorithme 1.

La classe d'un automate est déterminée en fonction des valeurs de l'intervalle spectral  $T_I$  :

- la classe P contient les automates pour lesquels  $T_I \subset [1, K_p]$ ,
- la classe C contient les automates pour lesquels  $T_I \subset [K_c, \infty[$ ,
- la classe H contient les automates qui ne sont ni dans P ni dans C.

La classe H désigne une classe "hybride" pour laquelle les caractères "réguliers" ou "périodiques" ne sont pas détectés.

On jugera donc de la pertinence de l'algorithme de classification selon deux critères :

---

**Algorithme 1** : Estimation numérique du spectre de densité

---

**pour chaque**  $d_{val} = d_{min}$  à  $d_{max}$  *par pas de*  $d_{stp}$  **faire**  
     $x_{ini}(d_{val}) \leftarrow$  condition initiale aléatoire de densité ( $d_{val}$ ) H est un  
    tableau d'entiers indexés dans  $\{0, \dots, n\}$  initialisé à 0  
    **pour chaque**  $t = 1$  à  $T_{tr}$  **faire**  
         $x \leftarrow F(x)$   
    **pour chaque**  $t = 1$  à  $T_{ech}$  **faire**  
         $x \leftarrow F(x)$   
         $H(d(x).n) \leftarrow H(d(x).n) + 1$   
    **pour chaque**  $t = 1$  à  $n$  **faire**  
        Si  $H(i) > 0$  alors  $\tilde{\tau}(x) \leftarrow \tilde{\tau}(x) + 1$

---

- (a) La possibilité de séparer la classe P et la classe C par un choix des valeurs de  $K_p$  et  $K_c$ .
- (b) La pertinence de la classification obtenue eu égard aux classifications déjà existantes.

Les résultats numériques sont donnés dans la section suivante. Les résultats concernant les automates cellulaires élémentaires sont validés en comparant nos données à celles fournies par Martin dans sa thèse de doctorat [Mar01] et par Cattaneo, Formenti et Margara dans [CFM99]. Les résultats concernant les règles totalisantes de rayon 2 sont comparés à ceux fournis par Wolfram dans [Wol84].

## 3.2 Résultats et validation des choix

### 3.2.1 Le cas automates cellulaires élémentaires

Le tableau 3.1 présente les résultats de la classification pour les 88 règles représentatives minimales. Ils ont été obtenus pour les valeurs numériques suivantes :  $n = 100$ ,  $T_{tr} = 5000$ ,  $T_{ech} = 1000$  et pour un intervalle de densité  $D = [0.30, 0.70](0.01)$  (40 conditions initiales pour chaque automate). À la mesure de l'intervalle spectral décrite dans le paragraphe précédent, nous avons ajouté la mesure de *l'activité finale*. Ce paramètre représente le ratio de cellules qui changent d'état lors de la dernière itération (*i.e.*, au temps  $T_{tr} + T_{ech}$ ). La dernière colonne du tableau indique le maximum de l'activité finale mesurée sur l'ensemble des conditions initiales, et lorsque ce nombre est égal à zéro on en déduit que l'automate a convergé vers un point fixe pour toutes les conditions initiales échantillonnées.

W	Isp	Cl	A	W	Isp	Cl	A	W	Isp	Cl	A
<b>0</b>	1 :1	N	0	<b>35</b>	1 :2	P	83	<b>108</b>	1 :2	P	16
<b>1</b>	2 :2	P	100	<b>36</b>	1 :1	F	0	<b>110</b>	2 :19	H	50
<b>2</b>	1 :1	P	38	<b>37</b>	1 :2	P	84	<b>122</b>	11 :32	C	62
<b>3</b>	2 :2	P	97	<b>38</b>	1 :2	P	51	<b>126</b>	10 :34	C	64
<b>4</b>	1 :1	F	0	<b>40</b>	1 :1	N	0	<b>128</b>	1 :1	N	0
<b>5</b>	2 :2	P	83	<b>41</b>	2 :4	H	73	<b>130</b>	1 :1	P	44
<b>6</b>	1 :2	P	45	<b>42</b>	1 :1	P	60	<b>132</b>	1 :1	F	0
<b>7</b>	2 :2	P	99	<b>43</b>	1 :2	P	66	<b>134</b>	1 :2	P	64
<b>8</b>	1 :1	N	0	<b>44</b>	1 :1	F	0	<b>136</b>	1 :1	N	0
<b>9</b>	1 :2	P	72	<b>45</b>	26 :34	C	59	<b>138</b>	1 :1	P	42
<b>10</b>	1 :1	P	44	<b>46</b>	1 :1	P	44	<b>140</b>	1 :1	F	0
<b>11</b>	1 :2	P	74	<b>50</b>	1 :2	P	100	<b>142</b>	1 :2	P	50
<b>12</b>	1 :1	F	0	<b>51</b>	1 :2	P	100	<b>146</b>	9 :14	C	62
<b>13</b>	1 :1	F	0	<b>54</b>	4 :52	H	99	<b>150</b>	15 :20	C	62
<b>14</b>	1 :2	P	50	<b>56</b>	1 :1	P	94	<b>152</b>	1 :1	P	44
<b>15</b>	1 :2	P	66	<b>57</b>	1 :1	P	100	<b>154</b>	2 :12	H	63
<b>18</b>	9 :14	C	60	<b>58</b>	1 :2	P	88	<b>156</b>	1 :2	P	18
<b>19</b>	2 :2	P	100	<b>60</b>	14 :20	C	62	<b>160</b>	1 :1	N	0
<b>22</b>	36 :44	C	65	<b>62</b>	1 :3	P	70	<b>162</b>	1 :1	P	86
<b>23</b>	2 :2	P	100	<b>72</b>	1 :1	F	0	<b>164</b>	1 :1	F	0
<b>24</b>	1 :1	P	44	<b>73</b>	5 :37	H	50	<b>168</b>	1 :1	N	0
<b>25</b>	1 :3	P	73	<b>74</b>	1 :1	P	36	<b>170</b>	1 :1	P	60
<b>26</b>	3 :12	H	68	<b>76</b>	1 :1	F	0	<b>172</b>	1 :1	F	0
<b>27</b>	2 :2	P	95	<b>77</b>	1 :1	F	0	<b>178</b>	1 :2	P	100
<b>28</b>	1 :2	P	18	<b>78</b>	1 :1	F	0	<b>184</b>	1 :1	P	100
<b>29</b>	1 :2	P	56	<b>90</b>	15 :20	C	60	<b>200</b>	1 :1	F	0
<b>30</b>	28 :36	C	57	<b>94</b>	1 :6	H	22	<b>204</b>	1 :1	F	0
<b>32</b>	1 :1	N	0	<b>104</b>	1 :1	F	0	<b>232</b>	1 :1	F	0
<b>33</b>	2 :2	P	86	<b>105</b>	14 :20	C	68				
<b>34</b>	1 :1	P	56	<b>106</b>	27 :35	C	62				

TAB. 3.1 – Classification par  $d$ -spectre des 88 automates cellulaires élémentaires minimaux. W représente le code de Wolfram, Isp l'intervalle spectral, Cl la classe et A l'activité finale (cf. texte page 62 pour les conditions expérimentales).

Une analyse des valeurs numériques montre qu'on trouve un grand nombre de règles pour lesquelles le spectre est compris dans un intervalle  $T_I \subseteq [1, 3]$ ; l'examen de ces automates montre qu'ils sont tous "réguliers" et l'on prend donc  $K_p = 3$ . De même, l'examen des intervalles spectraux des automates dont on sait qu'ils sont "chaotiques" (par exemple les ACE **30**, **45**, **90**, **150** cf. partie 1.4.1) montre que l'on peut prendre  $K_c = 7$ .

Dans ces conditions, on obtient des tailles de classe suivantes :  $|C| = 12$ ,  $|H| = 7$ ,  $|P| = 69$ . On s'aperçoit que de nombreux automates sont classés P ce qui nous amène subdiviser cette classe en plusieurs sous-classes :

- La classe N est la classe des règles de  $P$  "nilpotentes", *i.e.*, les règles pour lesquels l'ensemble des conditions initiales atteint la configuration nulle  $*0^*$ .
- La classe F est la classe des règles de  $P \setminus N$  dont toutes les conditions initiales évoluent vers un point fixe.
- La classe P1 est la classe des règles de  $P \setminus N \setminus F$  qui ont un intervalle spectral égal à  $[1, 1]$ .
- La classe P2 est la classe des règles de  $P \setminus N \setminus F \setminus P1$  qui ont un intervalle spectral compris dans  $[1, 2]$ .
- La classe P3 est la classe des règles de  $P \setminus N \setminus F \setminus P1 \setminus P2$  qui ont un intervalle spectral compris dans  $[1, 3]$ .

Il est à noter que ce raffinement de P est *ad hoc* et a pour seul but de mieux caractériser le type de régularité des règles. Par exemple, on s'attend à ce que la classe P1 soit composée des règles qui réalisent un décalage sur un sous-ensemble des configurations puisque les automates de cette classe ont un  $d$ -spectre égal à 1 et ne convergent pas vers un point fixe.

On obtient alors la classification du tableau 3.2. Vérifions maintenant ces résultats en fonction de ce que l'on connaît de ces règles, soit par la compréhension de leurs propriétés, soit à l'aide des résultats de la classification de Cattaneo et al.

### Vérification des règles remarquables

Ces règles ont été vues dans la partie 1.4.3. Elles vont nous servir à vérifier que les résultats numériques ne sont pas trivialement faux :

- Dans N, on trouve les règles **0**, **136**, **160** et **128** qui sont des règles à seuil et dont on peut prouver qu'elles sont bien nilpotentes.
- Dans F, on trouve l'identité **204** et **232** qui est la règle de majorité.
- Le shift **170** est dans P1, conformément à ce qui est attendu ; de même pour la règle d'inversion **51** qui est bien dans P2.
- Les règles (non-trivialement) additives **60**, **90**, **150** sont bien dans C.



N	0, 8, 32, 40, 128, 136, 160, 168
F	4, 12, 13, 36, 44, 72, 76, 77, 78, 104, 132, 140, 164, 172, 200, 204, 232
P1	2, 10, 24, 34, 42, 46, 56, 57, 58, 74, 130, 138, 142, 152, 162, 170, 184
P2	1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 15, 19, 23, 27, 28, 29, 33, 35, 37, 38, 43, 50, 51, 108, 134, 156, 178
P3	25, 62
H	26, 41, 54, 73, 94, 110, 154
C	18, 22, 30, 45, 60, 90, 105, 106, 122, 126, 146, 150

TAB. 3.2 – Classification des automates cellulaires élémentaires en fonction du  $d$ -spectre. Seules les règles représentatives minimales (cf. partie 1.4.2 page 33) sont examinées.

On voit que ces premières règles sont “bien classées” et que nous pouvons continuer à porter notre examen sur les règles moins triviales.

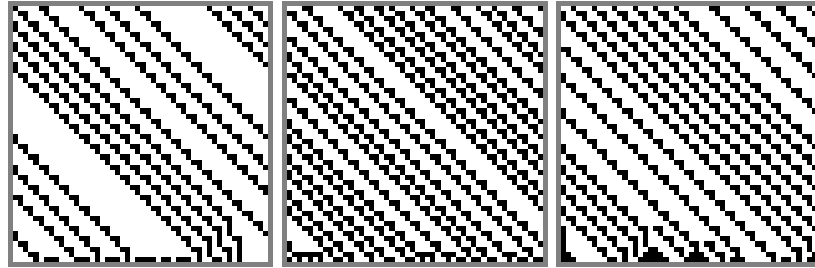
### Classe P1

Les règles classées dans P1 sont toutes classées “sous-shift” (*i.e.*, comportement identique à un shift après une transitoire) par Cattaneo et al. à l’exception des règles **57** (cette règle n’est pas classée ces auteurs car aucun des deux états n’est quiescent) et **58** qui est classé “Per2” (*i.e.*, aboutit à des cycles de période 2). L’examen détaillé de la règle **58** montre que pour des configurations initiales aléatoires, cette règle semble bien converger vers un comportement de type “sous-shift”. Il est à noter que Packard et Li [LP90] classifient également cette règle comme sous-shift.

### Classe P2

Dans cette classification, les règles **6**, **38** et **134** sont des règles classées “double-subshift”, ce qui signifie que les parties périodiques de leurs orbites sont constituées de deux configurations qui alternent et se décalent (cf. figure 3.2). Ces règles sont donc logiquement retrouvées dans P2.

L’ACE **14** pose problème puisque étant classé “sous-shift” par Cattaneo et al., il devrait apparaître P1 dans notre classification. L’observation de diagrammes espace-temps de cette règle (cf. figure 3.3) montre qu’en effet le comportement global de la règle tend rapidement à ressembler à celui d’un shift où des sous-configurations qui ne comportent ni 0 isolé ni 1 isolé sont

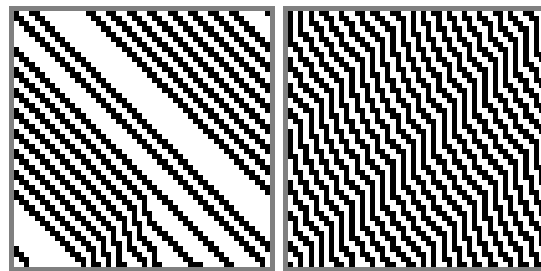


(a) ACE **6**

(b) ACE **38**

(c) ACE **134**

FIG. 3.2 – Diagrammes espace-temps pour des règles “double sous-shift”.



(a) ACE **14**

(b) ACE **14**

FIG. 3.3 – Diagrammes espace-temps de la règle **14**

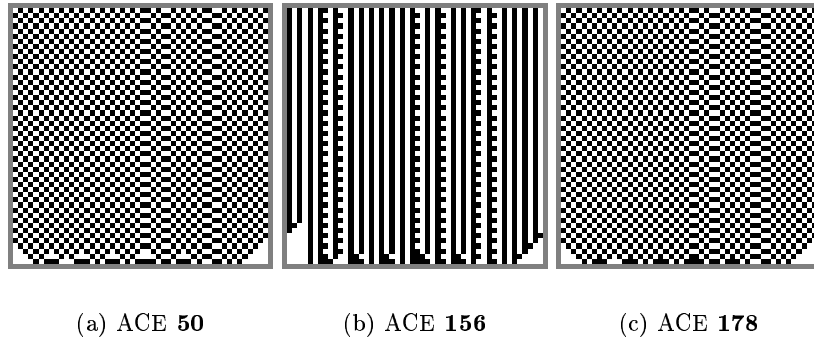


FIG. 3.4 – Diagrammes espace-temps de règles P2.

“correctement” décalées (vers la gauche). En revanche, on voit que dans les parties des configurations où apparaissent des 1 isolés, il existe un motif qui est décalé en sens inverse (vers la droite). Ces motifs, caractérisés par la présence de 1 isolés, se propagent en sens inverse du décalage tant qu’ils rencontrent des sous-mots 0011. La rétro-propagation s’achève lorsqu’ils rencontrent des sous-mots  $0^n$  avec  $n \geq 3$  (cf. figure 3.3.a) et l’orbite a alors un  $d$ -spectre égal à 1. Dans le cas où ils ne rencontrent pas de tels sous-mots, le motif 010 se propage de façon infinie grâce aux conditions aux bords cycliques (cf. figure 3.3.b) et l’orbite a un  $d$ -spectre égal à 2. On peut donc en déduire que la différence (mineure) de classification tient au choix des conditions aux bords : la propagation des 1 isolés est finie dans le cas des configurations infinies puisque les 1 isolés finissent toujours par rencontrer des sous-mots 000 alors que sur des anneaux finis cette condition n’est plus assurée.

Les règles **28**, **50**, **108**, **156**, **178** sont C3 dans la classification de Cattaneo et al. Cela traduit le fait que sur une ligne infinie, les configurations s’étendent à l’infini. En revanche, cela ne permet pas de déduire le comportement de ces règles sur un anneau. Nous trouvons que les règles **50** et **178** sont P2 dans notre classification. L’examen des orbites de ces deux règles montre qu’elles ont la forme de damiers (cf. figure 3.4), ce qui confirme le classement de ces règles. En ce qui concerne les ACE **28**, **108** et **156**, leurs orbites sont des cycles de période 2 dans lesquels un nombre restreint de cellules change d’état (cf. figure 3.4)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> **108** est dans la classe “Periodic configurations” de Cattaneo et al. et les parties qui alternent sont des sous-mots 111 qui alternent avec des sous-mots 101

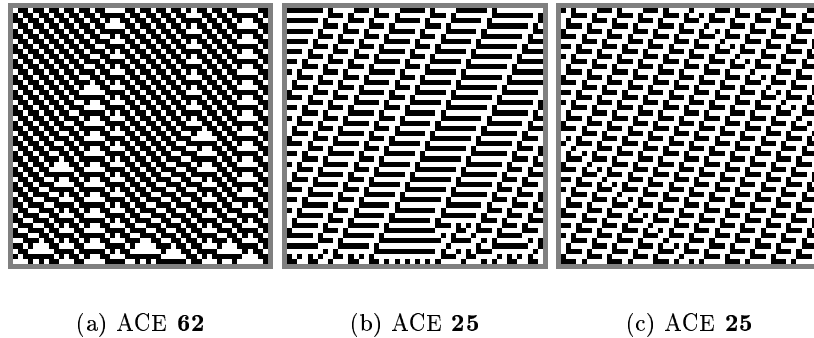


FIG. 3.5 – Diagrammes espace-temps de règles P3.

### Classe P3

Dans P3, l'examen de l'ACE **62** montre bien que les orbites convergent sur des cycles de longueur 3 en raison (de la présence de particules persistantes de période 3). Cette donnée est confirmée dans la classification de Cattaneo et al. bien que les auteurs indiquent que le résultat est obtenu empiriquement. En revanche, l'examen détaillé des orbites produites par l'ACE **25** montre que des portions d'orbites de  $d$ -spectre égal à 3 sont très rarement observées. L'explication de la différence de classement de cette règle est donc similaire à celui de l'ACE **14** : l'apparition de particules se propageant en sens inverse du sens de propagation du "fond" peut conduire à un changement de valeur du  $d$ -spectre. Nous laisserons ouverte la question de savoir si la proportion d'orbites de  $d$ -spectre égal à 3 tend vers zéro quand la taille de l'anneau tend vers l'infini.

### Classe H

Des diagrammes espace-temps des règles de la classe H sont montrés sur la figure 3.6. La classe H contient les ACE **54**, **110** et **73** qui sont les trois règles les plus "complexes" (cf. chapitre 2). On trouve également **26** et **154** qui sont classées "sous-shift généralisé" ("generalized subshift") par Cattaneo. L'examen détaillé des orbites produites par les ACE **41** et **94** montrent que ces deux règles sont "périodiques" : le large  $d$ -spectre observé pour **41** traduit la possibilité pour cette règle d'avoir de longues transitoires. Quant à la règle **94**, elle produit des orbites qui aboutissent à des cycles de longueur au plus égale à 6 (en raison de la présence concomitantes de particules de période 2 et de période 3) ; on peut donc la classer comme périodique en prenant

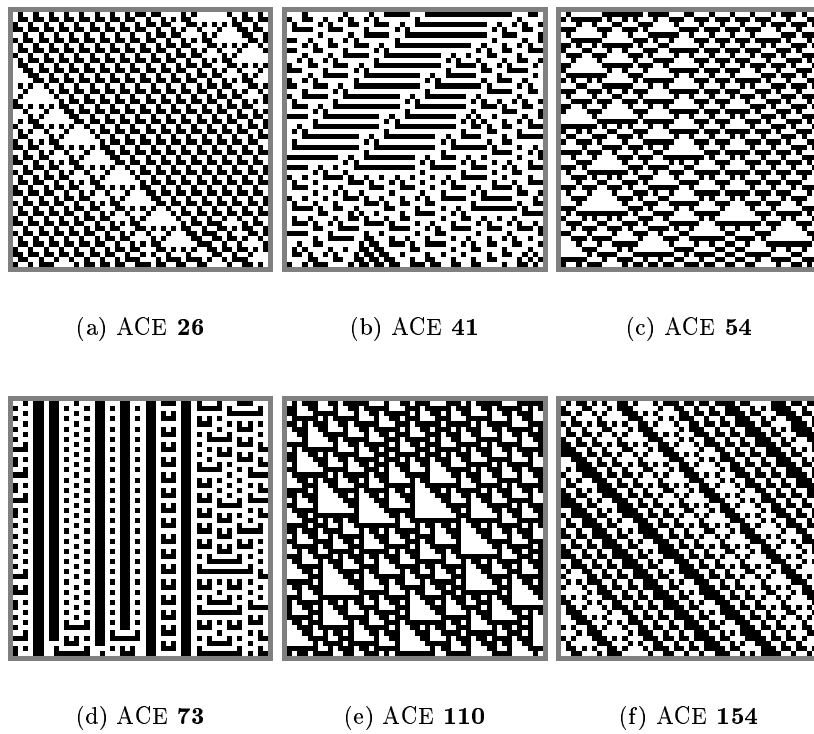
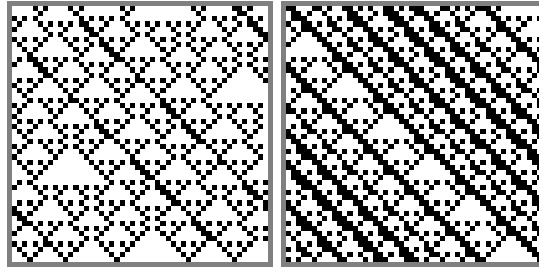


FIG. 3.6 – Diagrammes espace-temps obtenus de règles “hybrides” : 26, 41, 54, 73, 110, 154



(a) ACE **154**

(b) ACE **154**

FIG. 3.7 – Diagrammes espace-temps de l’ACE **154** pour différentes conditions initiales.

$K_p = 6$ .

La classe des “sous-shift généralisés” correspond aux automates qui produisent des diagrammes espace-temps avec un décalage tous les  $p$  pas de temps (cf. figure 3.6) et pour lesquels la périodicité du décalage  $p$  est fonction de la condition initiale. Une étude détaillée de comportement de **154** (qualifié “d’étrange” ou de “pathologique” par Cattaneo et al.) a été effectuée dans [CM98] : les auteurs prouvent d’une part l’assertion concernant l’existence d’une périodicité  $p$  pour toutes les configurations initiales et montrent d’autre part que le type de diagrammes espace-temps “périodique” ou “chaotique” observé pour cette règle dépend fortement de la condition initiale. En effet, pour une condition initiale où il n’y a que des 0 isolés, il est possible d’observer une orbite “chaotique” alors que pour tout autre condition initiale contenant le motif 00, on obtient un comportement de type “périodique” (cf. figure 3.7).

Le large écart constaté pour les valeurs de l’intervalle spectral des règles de la classe H peut être expliqué en partie par les observations qualitatives de Kaneko [Kan86] relatives aux bassins d’attractions (cf. partie 2.1.4) : les automates “complexes” ont un nombre d’attracteurs qui augmente fortement avec  $n$  mais en même temps, ils possèdent certains attracteurs qui ont un grand bassin d’attraction (ici les attracteurs de faible  $d$ -spectre). Une autre façon d’interpréter ce résultat consiste à décrire les règles complexes comme celles qui font apparaître de manière spontanée des “particules” qui évoluent sur un “fond”, ces particules peuvent subsister longtemps et créer une dynamique complexe de grande période ou alors disparaître par suite de collisions et créer une dynamique périodique simple.

## Classe C

Dans notre classe C, nous retrouvons les douze règles qui sont généralement classées comme chaotiques selon différentes méthodes. Par exemple, on retrouve le même classement dans la thèse de Martin [Mar01], classement qui s'effectue sur la base de la mesure de "l'entropie apparente". On remarquera par ailleurs que les exposants de Lyapunov calculés par Grassberger et présentés dans les tables [Gra86] permettent également de repérer ces mêmes règles <sup>2</sup>.

Les règles **60**, **90**, **150** sont additives, ce qui explique leur caractère chaotique (cf. partie 2.1.3). Les règles **30** et **45** ont été étudiées comme générateurs de nombres aléatoires par Wolfram [Wol86], ce qui confirme leur caractère chaotique. Par ailleurs, **18** a été étudiée en détail par Grassberger [Gra83] qui a montré que son comportement était asymptotiquement similaire à celui de **90** ce qui confirme également le bon classement de cette règle.

### 3.2.2 Le cas des totalisants de rayon 2

Afin de vérifier que notre algorithme de classification peut être directement étendu à d'autres types de règles, nous l'appliquons aux automates unidimensionnels totalisants de rayon  $r = 2$  (cf. partie 1.4.1) de code pair. L'avantage de ce sous-ensemble est qu'il est de taille réduite ( $2^5 = 32$  membres) et que l'ensemble des règles paires a été étudié par Wolfram ([Wol84]), lors du premier exposé de sa classification empirique<sup>3</sup>.

## Résultats

Le tableau 3.3 montre les résultats obtenus pour  $T_{tr} = 50$ ,  $T_{ech} = 1000$ ,  $n = 100$ . Le choix d'une faible valeur pour  $T_{tr}$  est effectué de manière à se rapprocher des conditions expérimentales prises par Wolfram dans son étude [Wol84]. En reprenant les mêmes classes que dans la section précédente, on obtient la classification du tableau 3.4.

---

<sup>2</sup>Ces tables sont en outre intéressantes car elles montrent aussi les directions selon lesquelles un automate cellulaire peut transmettre de l'information. En particulier on notera que les ACE **14**, **43**, **57**, **142**, **184** sont des règles qui ont la particularité de pouvoir faire alterner le sens de transmission de l'information selon l'existence ou non de particules.

<sup>3</sup>Il est à noter que le choix de prendre les règles de code pair est arbitraire (l'état 0 est quiescent). En effet, la règle conjuguée d'une règle totalisante de code pair n'est pas nécessairement une règle de code impair. Les couples de règles paires associées par conjugaison sont (34,46) (44,50) (40,58) (32,62) (36,54) et (48,60).

W	Isp	Cl	A	W	Isp	Cl	A
<b>0</b>	1 : 1	N	0	<b>32</b>	1 : 1	N	0
<b>2</b>	1 : 53	H	62	<b>34</b>	39 : 58	C	65
<b>4</b>	1 : 1	N	0	<b>36</b>	1 : 1	N	0
<b>6</b>	25 : 64	C	74	<b>38</b>	10 : 45	C	64
<b>8</b>	1 : 1	F	0	<b>40</b>	1 : 1	F	0
<b>10</b>	30 : 40	C	67	<b>42</b>	14 : 19	C	60
<b>12</b>	9 : 36	C	69	<b>44</b>	40 : 50	C	54
<b>14</b>	17 : 64	C	76	<b>46</b>	26 : 54	C	66
<b>16</b>	1 : 1	N	0	<b>48</b>	1 : 1	N	0
<b>18</b>	36 : 46	C	60	<b>50</b>	39 : 50	C	51
<b>20</b>	1 : 24	H	18	<b>52</b>	1 : 95	H	14
<b>22</b>	33 : 44	C	72	<b>54</b>	1 : 1	N	0
<b>24</b>	1 : 1	F	0	<b>56</b>	1 : 1	F	0
<b>26</b>	39 : 53	C	67	<b>58</b>	1 : 1	F	0
<b>28</b>	44 : 62	C	65	<b>60</b>	1 : 1	N	0
<b>30</b>	1 : 47	H	80	<b>62</b>	1 : 1	N	0

TAB. 3.3 – Classification par  $d$ -spectre des 32 règles totalisantes de rayon  $r = 2$  qui sont 0-quiescentes. W représente le code de la règle, Isp l'intervalle spectral, Cl la classe et A l'activité finale (cf. texte page 71 pour les conditions expérimentales).

classe	code de la règle totalisante
N	<b>0, 4, 16, 32, 36, 48, 54, 60, 62</b>
F	<b>8, 24, 40, 56, 58</b>
C	<b>6, 10, 12, 14, 18, 22, 26, 28, 34, 38, 42, 44, 46, 50</b>
H	<b>2, 20 30, 52</b>

TAB. 3.4 – Synthèse de la classification sur les automates totalisants de rayon 2.



## Analyse

Pour ce sous-ensemble de règles, on remarque qu'il n'y a pas de règles périodiques. Nous ne savons pas si cette propriété s'étend pour des voisinages plus grands ou si elle est propre aux automates de rayon  $r = 2$ .

La règle nulle **T0** et la règle à seuil **T32** dont on peut prouver qu'elle est nilpotente, se retrouvent bien dans N. La règle **T56** est la règle de majorité dont on peut prouver la convergence sur un point fixe de toutes les configurations initiales différentes de  $*01^* = (01)^{n/2}$  (cas où  $n$  est pair). Elle est donc bien dans F.

La règle **T42** est non trivialement additive, elle est bien dans C.

On vérifie également que les règles **T20** et **T52** classées ici dans H, correspondent aux observations de Wolfram qui a pris ces deux règles comme premiers exemples de règles unidimensionnelles "complexes". En revanche, notre classification fait apparaître plus de règles hybrides : **T2**, **T30** sont également classées H. Expérimentalement, on remarque que la majorité des orbites de ces règles sont chaotiques mais que pour quelques conditions initiales, les orbites convergent vers un état uniforme.

Nous avons donc une bonne adéquation entre la classification empirique de Wolfram et la classification produite par notre algorithme.

## 3.3 Conclusion et perspectives

Nous avons montré à travers l'étude de deux sous-espaces de règles qu'au vu des résultats obtenus, la densité paraît être un bon paramètre, en première approximation, pour estimer le caractère "régulier" ou "chaotique" d'un automate cellulaire. C'est désormais sur cette mesure que s'appuiera la suite de notre étude sur la robustesse des automates cellulaires.

Par ailleurs, la classe "des hybrides", pour lesquels notre algorithme ne parvient pas à classer un automate dans l'une ou l'autre des catégories "régulier" ou "chaotique" est une source d'intérêt en elle-même puisqu'elle semble identifier les règles qui ont un comportement "complexe". Ceci semble confirmer l'idée intuitive que des automates "réguliers" vont rapidement atteindre un cycle de faible longueur, que les automates "chaotiques" vont rapidement atteindre un état stationnaire; lorsqu'aucune de ces deux conditions n'est vérifiée, on s'attend à être en présence d'une règle "complexe". Cette hypothèse pourrait être testée en continuant à élargir la classe des automates étudiés, en examinant par exemple la classe des automates bidimensionnels qui généralisent le Jeu de la Vie ("larger than Life" [Eva96]).

On pourrait également extraire plus d'informations des données expérimentales. Nous avons choisi de n'extraire de la série des  $d$ -spectres que deux informations qui sont les minima et maxima mais on peut aussi se demander quelle est la forme de la distribution des  $d$ -spectres mesurés. Une autre façon de raffiner le protocole consisterait à croiser les résultats fournis en utilisant la densité avec d'autres paramètres tels que la corrélation spatiale, la distribution des motifs de taille supérieure, etc.

A partir de ces résultats, nous pouvons maintenant nous interroger sur ce qu'il se produit lorsque toutes les cellules ne sont plus mises à jour simultanément et aborder l'étude des automates cellulaires en dynamique asynchrone, ce qui fait l'objet des chapitres suivants.

---

# Chapitre 4 Étude expérimentale de la robustesse à l'asynchronisme

Le chapitre précédent nous a permis de mettre en évidence toute la richesse du comportement des automates cellulaires lorsqu'ils évoluent avec une dynamique synchrone. La question que nous abordons maintenant est de comprendre comment évoluent ces comportements lorsque le synchronisme des transitions n'est plus respecté.

Tout comme pour l'étude de la dynamique synchrone, nous cherchons à définir des protocoles expérimentaux effectifs et rapides qui puissent permettre de discriminer les automates "robustes" pour lesquels le comportement global n'est pas affecté par l'ajout d'asynchronisme, des automates "non-robustes" qui verraient leur comportement changer de manière significative.

Nous commençons par définir le paramètre qui sert à mesurer quantitativement les changements de comportement. Ensuite, nous discutons des différentes façons d'utiliser ce paramètre et nous introduisons la notion de "surface d'échantillonnage" qui permet d'avoir une première estimation de la robustesse d'un automate puis nous définissons deux paramètres à partir de cette surface. Nous examinons ensuite les automates en fonction des valeurs de ces deux paramètres et nous proposons, pour chaque classe de comportement, une discussion pour expliquer d'où vient ce comportement ou pour ouvrir de nouvelles questions.

## 4.1 Choix du paramètre macroscopique pour l'évaluation de la robustesse

On rappelle que  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{U}}$  désigne l'espace de probabilité modélisant l'asynchronisme des mises-à-jour (cf. partie 1.3). Un vecteur de  $\Omega$  est une mise-à-jour (globale) dans laquelle un 1 (resp. un 0) représente une application (resp. une absence d'application) de la fonction de transition locale. On désigne par  $H$  l'ensemble des suites de mises-à-jour  $\Omega^{\mathbb{N}}$ , appelé ensemble des histoires. La fonction  $F(x, \omega)$  est la fonction de transition globale associée à une mise-à-jour donnée  $\omega$ .  $\Delta$  désigne une dynamique, qui est une mesure de

probabilité sur  $\Omega$ .

**Notation 6 (Fonction indicatrice pour les prédicats).** *Soit  $P$  un prédicat, on note  $\mathbf{1}(P)$  la fonction qui vaut 1 si  $P$  est vrai et 0 si  $P$  est faux.*

Pour représenter l'évolution du système asynchrone (non déterministe) mis à jour avec une dynamique  $\Delta$ , nous pouvons utiliser un graphe où les noeuds sont les configurations et où un lien orienté et valué  $(x, x', p_{x,x'})$  désigne la probabilité de passer de  $x$  à  $x'$ . Cette probabilité peut se calculer selon :

$$p_{x,x'} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{1}[F(x, \omega) = x'] \Delta(\omega).$$

Un tel graphe est difficilement représentable en pratique même pour des faibles tailles de grille, car outre le nombre de noeuds qui est égal à  $|E| = 2^n$ , le nombre de liens issus de chaque noeud est uniquement borné par  $2^n$  puisque *a priori* il faut considérer l'ensemble de transitions possibles. Ne disposant pas d'un moyen analytique pour calculer ce graphe, nous devons trouver un algorithme rapide et effectif permettant de quantifier le changement de comportement d'un automate cellulaire lorsque l'on passe d'une dynamique synchrone à une dynamique asynchrone.

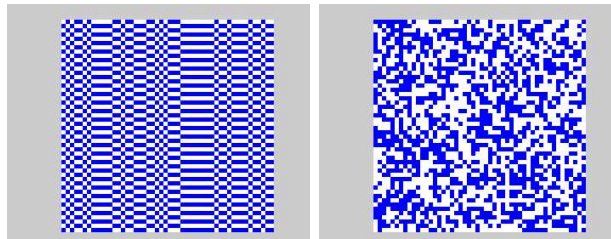


FIG. 4.1 – Diagramme espace-temps de l'ACE **51** (règle d'inversion) : (gauche)  $\alpha = 1$  (droite)  $\alpha = 0.50$ .

La première façon de procéder pour quantifier les changements de comportement serait, comme dans le chapitre précédent, d'utiliser le  $d$ -spectre en comptant le nombre de densités atteintes. Néanmoins un tel choix conduirait à déclarer la majorité des règles comme *non-robustes*. Par exemple, dans le cas de la règle d'inversion, l'ajout d'asynchronisme va permettre à l'orbite de passer d'un cycle de longueur 2 à une suite de configurations apériodique. Cela va conduire le  $d$ -spectre à passer de 2 pour le mode synchrone à sa valeur maximale (égale à  $n + 1$ ) en mode asynchrone.

La figure 4.1 montre l'évolution synchrone et asynchrone de cette règle. Du point de vue microscopique où l'on connaît l'état de chaque cellule avec précision, on voit qu'effectivement on a eu un changement de "comportement" mais cela ne répond pas à la question de savoir si ce comportement a varié d'un point de vue *macroscopique*.

Nous voyons qu'il est possible de définir deux types de robustesse : un premier type "microscopique", qui exige que l'asynchronisme ne modifie pas les orbites ; un second type "macroscopique" ou "statistique" qui exige que certaines données statistiques ne soient pas modifiées. Dans la suite, c'est cette seconde possibilité que nous choisissons.

La mesure macroscopique  $\mu$  que nous utilisons pour mesurer la différence statistique entre deux orbites est la *densité moyenne* mesurée sur des portions d'orbites :

**Définition 37 (paramètre de quantification du comportement).** Soit  $h \in H$  une histoire et  $x \in Q^{\mathcal{U}}$  une configuration, on note  $\tilde{\rho}(x, h)$  la moyenne de la densité sur la partie finie d'orbite  $[T_{\text{tr}} + 1, T_{\text{ech}} + T_{\text{tr}}]$  :

$$\tilde{\rho}(x, h) = \frac{1}{T_{\text{ech}}} \sum_{t=T_{\text{tr}}+1}^{t=T_{\text{tr}}+T_{\text{ech}}} d(\gamma_{x,h}(t)).$$

Il est important de noter que l'utilisation de  $\tilde{\rho}(x, h)$  permet d'avoir un paramètre invariant par décalage :

$$\forall x \in Q^{\mathcal{U}}, \forall h \in H, \tilde{\rho}(x, h) - \tilde{\rho}(\sigma(x), h) = 0.$$

## 4.2 Protocole expérimental pour l'estimation de la robustesse

### 4.2.1 Position du problème

Pour estimer la robustesse à l'asynchronisme, on doit être en mesure d'estimer la variation du comportement d'un automate en fonction du taux de synchronisme  $\alpha$ . Nous avons choisi le paramètre macroscopique qui mesure un aspect du comportement mais il nous reste à définir comment l'utiliser pour quantifier la robustesse d'une règle. Il existe bien entendu de nombreuses façons de procéder et nous examinons ici quelques unes de ces possibilités.

(a) Le premier paramètre,  $R_1$ , permet d'estimer la robustesse "locale" pour une configuration initiale  $x$  et un taux de synchronisme donnés. Ce type

de robustesse peut se mesurer en prenant le second moment de la variable aléatoire  $\tilde{\rho}(x, \alpha)$  :

$$R_1(x, \alpha) = \int_{h_1 \in H} \int_{h_2 \in H} |\rho(x, h_1) - \rho(x, h_2)| B_{\alpha_1}(dh_1) B_{\alpha_2}(dh_2)$$

La valeur de  $R_1$  traduit l'incertitude sur la valeur de  $\rho$  vis-à-vis du type de mise-à-jour. La fonction  $R_1(x, \alpha)$  nous donne la différence moyenne que l'on s'attend à avoir entre deux mesures effectuées en partant de la même condition initiale  $x$  mais avec deux histoires  $h_1$  et  $h_2$  obtenues avec un même taux de synchronisme  $\alpha$ .

Dans le cas où l'on a  $R_1 = 0$ , on peut affirmer que pour la configuration  $x$ , le comportement observé ne dépend pas de la mise-à-jour. On peut également noter que le cas synchrone est un cas dégénéré et il vient immédiatement que

$$\forall x \in Q^U, R_1(x, \alpha = 1) = 0.$$

Cette première fonction permet de quantifier la robustesse de façon "ponctuelle" car elle donne une mesure pour chaque couple  $(x, \alpha)$ . Elle est donc insuffisante si nous voulons quantifier le changement de comportement d'un automate lorsque le taux de synchronisme  $\alpha$  *varie*.

(b) Pour estimer la robustesse d'un automate entre deux points  $(x, \alpha_1)$  et  $(x, \alpha_2)$ , on peut utiliser la fonction  $R_2$  :

$$R_2(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{h_1 \in H} \int_{h_2 \in H} |\rho(x, h_1) - \rho(x, h_2)| B_{\alpha_1}(dh_1) B_{\alpha_2}(dh_2).$$

La fonction  $R_2(x, \alpha_1, \alpha_2)$  nous donne la différence moyenne que l'on s'attend à avoir entre deux mesures effectuées en partant de la même condition initiale  $x$  mais avec deux histoires  $h_1$  et  $h_2$  obtenues avec des taux de synchronismes différents  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

(c) Dans le cas où la condition initiale  $x$  est choisie aléatoirement en fonction d'une densité initiale  $d_{\text{ini}}$ , on est conduit à tenir compte de l'incertitude sur l'obtention de  $x$ ; nous introduisons donc le quantificateur  $R_3$  :

$$R_3(d_{\text{ini}}, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{x \in Q^U} R_2(x, \alpha_1, \alpha_2) B_{d_{\text{ini}}}(x).$$

Il est à noter que pour échantillonner une valeur de  $R_3$ , on doit d'abord choisir une condition initiale  $x$  aléatoirement puis calculer les orbites partant

de cette *même* condition initiale<sup>1</sup>.

(d) Il nous reste à utiliser la fonction  $R_3$  pour savoir ce qu'il se produit lorsque l'on passe du cas synchrone au cas asynchrone. Nous fixons donc la valeur du cas synchrone  $\alpha_1 = 1$  comme valeur de référence et nous faisons varier  $\alpha_2$  dans un intervalle  $A = [\alpha_{\min}, 1]$ . Un quantificateur de la robustesse à  $d_{\text{ini}}$  fixé entre la dynamique synchrone et la dynamique asynchrone de taux de synchronisme  $\alpha$  est donné par :

$$R_4(d_{\text{ini}}, \alpha) = R_3(d_{\text{ini}}, 1.0, \alpha_2).$$

(e) La robustesse d'un automate à  $d_{\text{ini}}$  donné est donc évaluée par la fonction  $R_4(d_{\text{ini}}, \alpha)$  : plus la valeur de cette fonction est élevée et moins l'automate est robuste. La dépendance de ce paramètre en fonction de  $d_{\text{ini}}$  traduit que la robustesse dépend du type d'échantillonnage des conditions initiales.

Dans le cas où l'on souhaite avoir un échantillonnage uniforme des conditions initiales (i.e. on tire chaque configuration avec une probabilité égale), on prend  $d_{\text{ini}} = 1/2$  et l'estimation de la robustesse "moyenne" est donnée par la valeur  $R_4(1/2, \alpha)$ . Si, comme dans le chapitre précédent, on souhaite donner le même poids aux *densités*, et échantillonner avec une *densité uniforme* dans un intervalle  $D$ , on prend alors la valeur moyenne de  $R_4$  sur  $D$  comme représentant la robustesse "moyenne" :

$$R_D(\alpha) = \int_{\delta=d_{\min}}^{\delta=d_{\max}} R_4(d, \alpha) d\delta.$$

C'est cette dernière possibilité que nous choisissons pour définir de notre protocole expérimental.

(f) Nous disposons maintenant d'une façon d'estimer quantitativement la robustesse d'une règle à l'aide d'une unique fonction  $R_D(\alpha)$ . Pour pouvoir classer automatiquement les différentes règles, nous extrayons des paramètres à valeurs réelles de ces fonctions.

Une première possibilité, pour obtenir ces paramètres, consisterait à prendre le maximum de  $R_D(\alpha)$  sur un intervalle  $A$ . Cependant, l'examen détaillé du comportement des automates cellulaires asynchrones montre qu'il est préférable de considérer séparément la valeur de  $R_D(\alpha)$  au voisinage de  $\alpha = 1$

---

<sup>1</sup> Cela est différent de choisir deux conditions initiales différentes puis de calculer leurs orbites avec des histoires différentes. En effet, dans le cas de la règle identité ceci conduirait à une valeur du quantificateur non nulle ce qui est paradoxal puisque nous souhaitons que l'identité soit parfaitement robuste puisque c'est une règle dont le comportement est parfaitement indépendant de la mise-à-jour.

et les valeurs  $R_D(\alpha)$  sur un intervalle  $A \subset ]0, 1[$  que nous appelons *domaine asynchrone*. En effet, on imagine aisément qu'il existe certaines règles pour lesquelles l'introduction d'une faible quantité d'asynchronisme change totalement le comportement mais que pour les valeurs  $\alpha$  du domaine asynchrone, ce comportement reste constant. Afin de mieux discriminer les différentes possibilités, nous choisissons d'extraire deux paramètres de la fonction  $R_D(\alpha)$  :

- Notre premier paramètre,  $R_a$ , est le quantificateur de robustesse au passage synchrone/asynchrone qui évalue la valeur de la discontinuité créée par l'introduction d'asynchronisme (i.e., pour  $\alpha \rightarrow 1$ ) de  $R_D(\alpha)$ .

$$R_a = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \lim_{T_{tr}, T_{ech} \rightarrow \infty} R_D(\alpha).$$

- Le second paramètre qui est utilisé vise à quantifier le plus grand écart de comportement se trouvant dans le domaine asynchrone  $A$ . L'indicateur de robustesse de domaine asynchrone,  $R_b$  est donné par :

$$R_b = \max_{\{\alpha \in A\}} \{R_D(\alpha)\}.$$

On remarquera que les deux limites utilisées dans la définition de  $R_a$  ne commutent pas : il n'est pas équivalent de fixer les temps de transitoire et d'échantillonnage  $T_{tr}$  et  $T_{ech}$  puis de faire tendre  $\alpha$  vers 1 ou de fixer  $\alpha$  puis d'observer le comportement sur des portions d'orbites de plus en plus longues ( $T_{tr}, T_{ech} \rightarrow \infty$ ). En effet, dans le premier cas, le nombre de pas de calcul est fini et la valeur de  $\tilde{\rho}$  tend vers la valeur du comportement synchrone. Dans le second cas, on s'autorise à faire tendre le nombre de pas de calcul vers l'infini ce qui peut produire un changement de comportement qualitatif (par exemple le fait d'atteindre le point fixe  $*0^*$ ) quelle que soit la valeur prise par  $\alpha$  (un traitement théorique détaillé de cette question sera effectué dans le chapitre 5).

(g) Nous sommes désormais en mesure d'associer à chaque automate un couple de réels  $(R_a, R_b) \in \mathbb{R}^2$  pour quantifier sa robustesse : celui-ci est d'autant plus robuste à l'introduction d'une "petite" quantité d'asynchronisme que  $R_a$  est petit. Dans le domaine asynchrone, le comportement s'écarte d'autant moins du comportement synchrone que  $R_b$  est petit.

Les paramètres  $(R_a, R_b)$  sont loin de contenir toute l'information concernant la robustesse à l'asynchronisme d'un automate. Il doivent plutôt être considérés comme une première approximation qui établit une projection entre l'espace des orbites (asynchrones) sur  $\mathbb{R}^2$  et permet ainsi d'identifier les automates *non robustes*.

En effet, si l'on montre qu'une perturbation de synchronisme entraîne une modification de la fonction  $\rho$ , alors nous sommes autorisés à affirmer que



nous sommes en présence d'un changement de comportement. En revanche, la réciproque n'est pas vraie puisqu'on imagine facilement que des changements de comportements réels puissent avoir lieu sans que ceux-ci soient capturés par la façon dont on observe le phénomène.

Nous allons maintenant décrire le protocole que nous employons pour échantillonner  $\rho(d_{\text{ini}}, \alpha)$  et pour estimer les valeurs de  $R_a$  et  $R_b$ .

#### 4.2.2 Définition du protocole expérimental

**Définition 38 (Moyenne quadratique d'un vecteur).** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\langle x \rangle_2 = [\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i^2]^{1/2}$  la moyenne quadratique des coordonnées de  $x$ .

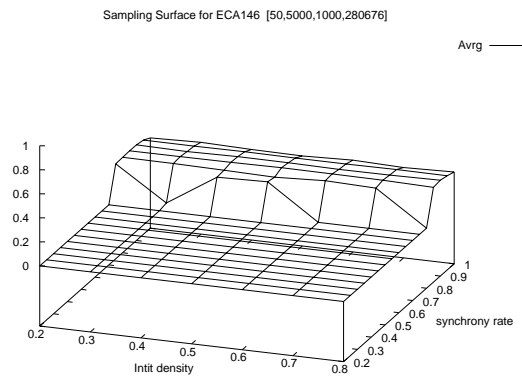
Pour échantillonner la variable aléatoire  $\rho(d_{\text{ini}}, \alpha)$ , on choisit un intervalle de densités discret  $D = [d_{\text{min}}, d_{\text{max}}](d_{\text{stp}})$  d'où l'on tire un ensemble de configurations initiales  $I = \{x_1, \dots, x_{|D|}\}$  obtenues comme des réalisations de lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $d \in D$ . De façon similaire, on choisit un intervalle de taux de synchronisme  $A = [\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}](\alpha_{\text{stp}})$  discret d'où l'on tire un ensemble d'histoires  $\mathcal{H} = \{\langle_{\infty}, \dots, \langle_{|\mathcal{A}|}\rangle\}$  obtenues comme des réalisations de dynamiques asynchrones de taux de synchronisme  $\{\alpha_{\text{min}}, \dots, \alpha_{\text{max}}\}$ .

Il est important de noter que le protocole associe à toute valeur de  $d_{\text{ini}}$  une *unique* configuration obtenue par tirage aléatoire et que c'est cette même configuration qui sera réutilisée avec différentes valeurs de taux de synchronisme. En effet, il faut se rappeler que ce qu'on cherche à estimer est la variation de comportement que l'on peut attendre partant d'une même configuration en utilisant des histoires différentes. Symétriquement, notre protocole associe une *unique* histoire à différentes conditions initiales. Ce dernier point n'est pas essentiel mais permettra par la suite de mettre en évidence des phénomènes où le choix de l'histoire compte plus dans l'évolution du système que le choix de la condition initiale (cf. partie 4.3.5).

#### 4.2.3 Représentation sous forme de surface d'échantillonnage

**Notation 7.** On note  $\rho_{\text{exp}}(d_{\text{ini}}, \alpha)$  le résultat d'un échantillonnage de la variable aléatoire  $\rho(d_{\text{ini}}, \alpha)$ .

**Définition 39 (Surface d'échantillonnage).** L'opération d'échantillonnage produit un ensemble de points  $\rho_{\text{exp}}(d_{\text{ini}}, \alpha)$  où  $d_{\text{ini}} \in D$  et  $\alpha \in A$ . Nous appelons surface d'échantillonnage la surface obtenue par la représentation tridimensionnelle de l'ensemble de points  $\rho_{\text{exp}}$  (cf. figure 4.2).



(a)

FIG. 4.2 – Un exemple de surface d'échantillonnage : ACE **18** obtenu pour  $D = [0.2, 0.8](0.1)$  et  $A = [0.2, 1](0.1)$ . On a  $r_a = 0.03$  ce qui traduit qu'il y a peu de changements autour de  $\alpha \sim 1$  et  $r_b = 0.19$ , ce qui indique un changement important dans le domaine asynchrone  $\alpha < 1$ ). Les paramètres  $r_a$  et  $r_b$  sont des estimateurs (au sens informel) des paramètres  $Ra$  et  $Rb$ ; leur définition se trouve dans la partie 4.2.4 page 84.

L'examen d'une surface d'échantillonnage nous fournit des renseignements sur le comportement d'un AC lorsqu'il est soumis à des perturbations de synchronisme. Pour ce faire, nous pouvons examiner les points suivants :

- À une valeur de  $d_{ini}$  fixée, la hauteur de la surface varie-t-elle lorsque  $\alpha$  varie ? Si oui, on en déduit que la comportement de l'automate *n'est pas* robuste pour cette valeur de  $d_{ini}$ .
- À une valeur de  $\alpha$  fixée, la hauteur de la surface reste-t-elle constante lorsque  $d_{ini}$  varie ? Si oui, le comportement de la règle semble indépendant des conditions initiales ; ceci peut s'interpréter comme un "oubli" des conditions initiales.

Bien entendu, si l'on veut pouvoir affirmer qu'une surface d'échantillonnage représente fidèlement le comportement de l'automate, nous devons vérifier que son aspect est "stable" : sa forme doit rester la même lorsque les paramètres de l'expérience deviennent suffisamment grands. Or, l'obtention d'une surface d'échantillonnage dépend des paramètres suivants :

- l'intervalle de variation de  $d_{ini}$ ,
- l'intervalle de variation du taux de synchronisme  $\alpha$ ,
- la taille de la grille  $n$ ,
- le temps de transitoire  $T_{tr}$ ,
- le temps d'échantillonnage  $T_{ech}$ .

Pour fixer les temps  $T_{tr}$  et  $T_{ech}$ , nous reprendrons pour plus de simplicité les mêmes temps que ceux que l'on a utilisé pour le cas synchrone.

L'invariance des résultats en fonction de la taille de la grille  $n$  ("passage à l'échelle"), sera étudiée expérimentalement en testant les valeurs produites pour un petit nombre de valeurs  $n$  (cf. figure 4.3 page 86). Il est à noter que les remarques effectuées dans la partie 1.4.3 qui soulignent l'existence de comportements spécifiques à la taille d'un anneau restent valables puisque nous comparons ici le cas synchrone au cas asynchrone.

Comme pour le cas synchrone, le choix de l'intervalle  $D$  de variation de la densité initiale  $d_{ini}$  se fait en évitant les valeurs trop proches de 0 ou de 1 pour éviter de tirer des configurations trop particulières telles que la configuration nulle (\*0\*) ou une configuration où tous les 1 (ou tous les 0) sont isolés (cf. partie 3.2.1 page 68 pour un exemple de règle pour lequel ce type de configuration conduit à un comportement "atypique").

Enfin, le choix de l'intervalle de variation de  $\alpha$  se fait en allant du cas synchrone  $\alpha = 1$  à des valeurs de  $\alpha$  qui ne soient pas trop basses. En effet, lorsque  $\alpha$  s'approche de 0 (i.e.,  $\alpha < 0.2$ ), le nombre de transitions effectuées devient de plus en plus faible et le temps de convergence vers un état stationnaire devient de plus en plus grand.

#### 4.2.4 Estimation quantitative de la robustesse

**Notation 8.** Pour un intervalle discret  $D$  fixé, on note  $\tilde{\rho}(\alpha)$  le vecteur  $(\rho_{\text{exp}}(d, \alpha))_{d \in D}$  obtenu par l'échantillonnage de toutes les conditions initiales obtenues avec les valeurs de  $D$  comme densité initiale.

De la surface d'échantillonnage, nous tirons deux "estimateurs"<sup>2</sup>  $r_a$  et  $r_b$  de  $R_a$  et  $R_b$  :

–  $r_a$  est donné par :

$$r_a = \langle \tilde{\rho}(1) - \tilde{\rho}(\alpha_{as}) \rangle_2.$$

Il est obtenu en calculant la moyenne quadratique des écarts  $\rho_{\text{exp}}$  entre le cas synchrone et la plus haute des valeurs asynchrones  $\alpha_{as} = 1 - \alpha_{stp}$ .

–  $r_b$  est donné par :

$$r_b = \sup_{\alpha \in A'} \langle \tilde{\rho}(\alpha_{as}) - \tilde{\rho}(\alpha) \rangle_2,$$

avec  $A' = [\alpha_{min}, \alpha_{as} - \alpha_{stp}](\alpha_{stp})$ .

Ces deux paramètres vont nous permettre de classer les automates de façon automatique. Nous exposons maintenant les résultats obtenus.

### 4.3 Présentation et analyse des résultats

L'étude que nous présentons ici est qualitative en ce qui concerne l'examen des orbites et la forme des surfaces d'échantillonnage, et quantitative en ce qui concerne l'examen des valeurs de  $r_a$  et  $r_b$ . Elle a pour but de valider notre protocole en procédant de manière "inverse" : partant des valeurs  $r_a$  et  $r_b$ , nous examinons quelles sont les surfaces qui conduisent à ces valeurs ; ensuite, nous examinons la forme des surfaces et nous relierons cette forme au comportement réel de l'automate, qui sera ici évalué en fonction des diagrammes espace-temps qu'il produit. Pour chaque observation, nous indiquerons lorsque c'est possible une explication ou un début d'explication des phénomènes et le cas échéant, nous pointerons les questions théoriques soulevées par ces résultats expérimentaux.

#### 4.3.1 Répartition des automates cellulaires élémentaires dans l'espace $(r_a, r_b)$

Les résultats présentés sont obtenus pour un temps de transitoire  $T_{tr} = 5000$ , un temps d'échantillonnage  $T_{ech} = 1000$ , une taille d'anneau  $n = 50$ ,

---

<sup>2</sup>Nous plaçons entre guillemets le mot "estimateur" pour souligner son emploi dans un sens informel et non dans le sens précis qui lui est attribué dans le domaine des statistiques.

un intervalle de densité initiale  $D = [0.2, 0.8](0.1)$  et un intervalle de taux de synchronisme  $A = [0.2, 1.0](0.1)$ .

Ces valeurs sont obtenues en fonction du compromis suivant : on cherche à augmenter la taille des configurations et on cherche à diminuer le pas d'échantillonnage de l'intervalle  $A$ , tout en gardant un temps de calcul "raisonnable". Par ailleurs, on cherche à augmenter l'intervalle de densité  $D$ , tout en diminuant les chances d'obtenir des configurations peu représentatives.

La figure 4.3 montre la répartition des 88 automates cellulaires élémentaires représentatifs minimaux selon les valeurs  $(r_a, r_b)$  associées pour différentes tailles d'anneau  $n$ . Dans les trois diagrammes on s'aperçoit que la répartition, loin d'être uniforme, se fait plutôt par "paquets" aux frontières plus ou moins bien définies. Dans un premier temps, nous allons simplement diviser cet espace en quatre zones :

- La zone A définie par :  $r_a < 0.1$  et  $r_b < 0.1$ ,
- La zone B définie par :  $r_a > 0.1$  et  $r_b < 0.1$ ,
- La zone C définie par :  $r_a < 0.1$  et  $r_b > 0.1$ ,
- La zone D définie par :  $r_a > 0.1$  et  $r_b > 0.1$ ,

et nous examinons les règles de chaque zone séparément de manière à vérifier si les indicateurs  $r_a$  et  $r_b$  peuvent être utilisés comme un premier moyen de classification des règles.

### 4.3.2 Zone A (faible $r_a$ et faible $r_b$ )

Cette zone contient les règles qui ont une grande robustesse puisque les points sont situés près de  $(r_a, r_b) = (0, 0)$ . Les orbites obtenues avec différents taux de synchronisme ont donc des valeurs  $\rho_{\text{exp}}$  proches.

Il y a deux façons simples d'expliquer une telle propriété :

- (H1) L'automate atteint rapidement un état stationnaire : ce sont les effets de moyenne utilisés dans le protocole expérimental qui produisent des mesures similaires.
- (H2) L'automate atteint rapidement un point fixe et ces points fixes ont des densités proches.

Examinons les différents types de surfaces observés dans cette zone.

#### Surfaces horizontales

La figure 4.4 montre un exemple de surface horizontale obtenue pour l'ACE **90**. Pour cette règle, nous observons que la hauteur de la surface est constante et vaut  $\rho_{\text{exp}} \sim 0.5$  pour toutes les valeurs de  $(d_{\text{ini}}, \alpha)$ .

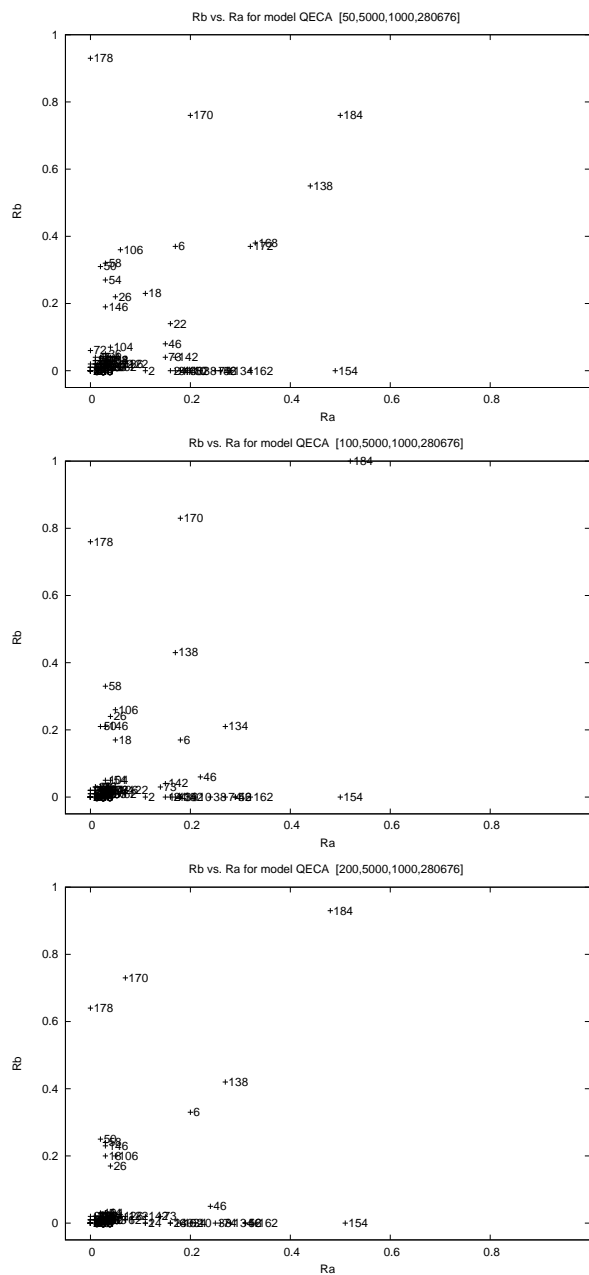
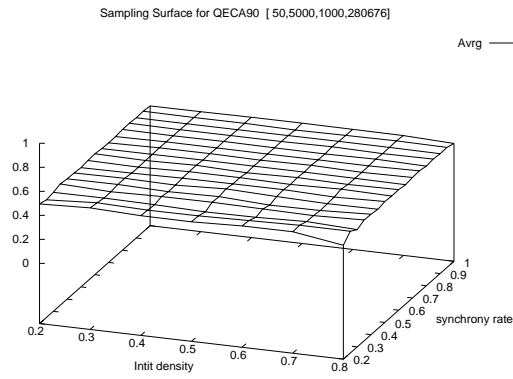


FIG. 4.3 – Évolution de la répartition des automates cellulaires élémentaires dans l'espace  $(r_a, r_b)$  pour différentes tailles d'anneau :  $n = 50$  (haut),  $n = 100$  (milieu),  $n = 200$  (bas); les temps de transitioire et d'échantillonnage sont :  $T_{tr} = 5000$ ,  $T_{ech} = 1000$ . Noter que seuls les minimaux représentatifs sont représentés.



(a)



(b)

FIG. 4.4 – (a) Un exemple de surface horizontale : ACE **90** (b) Évolution de l'ACE **90** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (droite)  $\alpha = 0.5$ . Dans ce diagramme espace-temps et dans les suivants on prend  $d_{ini} = 0.5$ ,  $n = 50$ , le temps va de la génération 0 à la génération 49.

La forme de la surface suggère donc d’une part que le comportement de l’automate est robuste (quelle que soit la densité initiale  $d_{\text{ini}}$ ) et que d’autre part l’automate “oublie” sa condition initiale (quelle que soit la valeur du taux de synchronisme). Cette observation est confirmée par l’examen des orbites. En effet, en partant d’une configuration initiale aléatoire, les orbites évoluent vers un état stationnaire caractérisé par  $d = 0.5$ . Des travaux expérimentaux (cf. [Wol83]) ou théoriques (utilisant des configurations de taille infinies cf. [FMMN00]) montrent également que pour les règles non-trivialement additives, les orbites issues de configurations aléatoires d’une densité initiale quelconque tendent vers un état stationnaire composé de configurations aléatoires de densité  $d = 1/2$ . Ceci s’explique par un effet de “mélange” qui résulte de la propriété d’additivité des orbites (cf. partie 1.4.1 page 29).

Nos observations montrent par ailleurs que cette propriété de “mélange” des configurations est conservée en mode synchrone, ce qui explique que l’on tend vers une densité  $d = 0.5$  pour toutes les valeurs de  $\alpha$ .

La robustesse de cette règle est donc due à H1 puisque partant d’une configuration initiale aléatoire, on obtient des orbites différentes qui ont les mêmes propriétés statistiques.

### Surfaces $d_{\text{ini}}$ -dépendantes et $\alpha$ -invariantes

**Définition 40 (Mur).** *Un mot  $w \in Q^*$  est un mur s’il vérifie :*

$$\forall (u, v) \in Q \times Q, F|_w[uvw] = w,$$

où  $F|_w$  est la restriction de  $F$  aux cellules qui composent  $w$ .

La figure 4.5.a montre une surface d’échantillonnage obtenue pour l’ACE **232** (règle de majorité). Cette règle dont le comportement a déjà été décrit (cf. partie 1.4.3 page 37) engendre une surface où, contrairement aux règles précédentes, on observe bien une dépendance de la valeur de  $\rho_{\text{exp}}$  en fonction de la densité initiale  $d_{\text{ini}}$ . Cette dépendance en fonction de  $d_{\text{ini}}$  s’explique par l’existence de murs pour cette règle : ce sont les mots **00** et **11**.

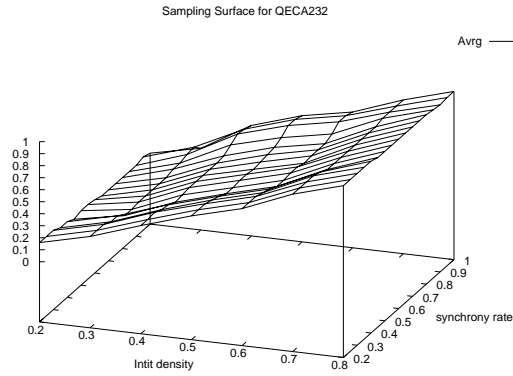
L’examen des orbites (cf. figure 4.5.b) montre que le système converge rapidement vers un point fixe et une observation de différentes orbites montre que la robustesse de la règle est due à H2.

Les ACE **4**, **12**, **44**, **76** sont d’autres règles que l’on peut trouver en zone A et il est à noter que toutes ces règles admettent des murs<sup>3</sup>. Ces observations

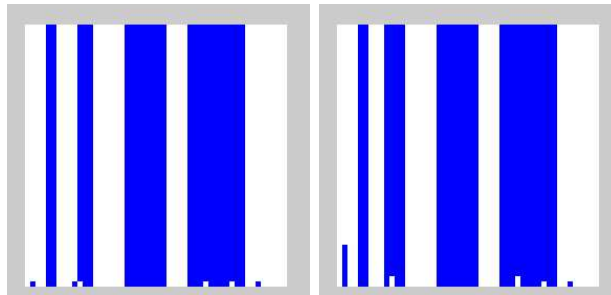
---

<sup>3</sup>0 et 010 sont des murs pour **4** ; 0 et 01 sont des murs pour **12** ; 00 et 0001 sont des murs pour **44** ; 0,01, 10 sont des murs pour **76**.





(a)



(b)

FIG. 4.5 – (a) Un exemple de surface  $d_{ini}$ -dépendante et  $\alpha$ -invariante : ACE **232**. (b) Évolution de l'ACE **232** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (droite)  $\alpha = 0.5$ . Les points fixes atteints sont similaires mais pas identiques : un examen cellule par cellule montre que la largeur de la seconde bande est plus grande sur le diagramme de gauche.

empiriques nous amènent à formuler un premier problème théorique qui est d'étudier dans quelle mesure la notion de robustesse à l'asynchronisme est liée à l'existence de murs pour un automate donné.

### Surfaces parfaitement $\alpha$ -invariantes

De façon assez remarquable, les résultats expérimentaux montrent que certains automates ont des valeurs de  $(r_a, r_b)$  qui se situent *exactement* sur le point  $(0, 0)$ .

Pour ces automates, on constate que partant d'une condition initiale le système finit toujours par converger vers une *même* configuration qui est un point fixe. Partant de cette observation, nous pouvons définir la classe des automates "parfaitement robustes" (PR) comme l'ensemble des automates pour lesquels le "comportement asymptotique" est indépendant des dynamiques  $\Delta_\alpha$ .

Expérimentalement, nous trouvons :

$$\begin{aligned} PR &= \{0, 8, 32, 40, 128, 136, 140, 160, 168, 200, 204\} \\ &= \{EFGH, EGH, DEFGH, DEGH, EFG, EG, G, DEFG, DEG, E, \emptyset\}. \end{aligned}$$

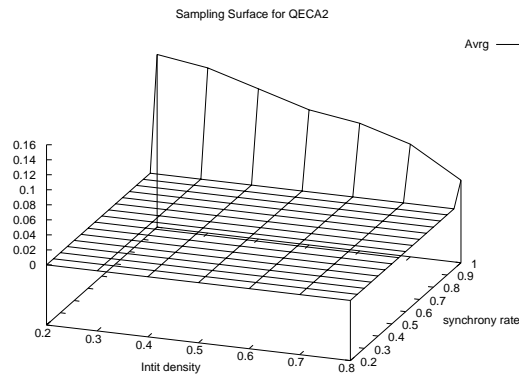
La caractérisation théorique de PR est un autre problème théorique qui dérive de ces observations ; il sera partiellement abordé dans le chapitre suivant. Notons que ce problème a été abordé théoriquement par Gačs [Gáč03] dans un contexte légèrement différent. L'invariance, telle que définie par l'auteur est une condition plus forte que l'appartenance à PR : dans cette définition, on extrait de l'orbite asynchrone  $\gamma_{h,x} = (x^t)$ , la sous-suite  $(x_{i_0}, \dots, x_{i_k})$ , extraite de  $(x^t)$ , telle qu'il se produit effectivement un changement entre deux pas de temps ( $\forall k, F(x_{i_k}, \omega_{i_k}) \neq x_{i_k}$ ). Cette suite est dite être "invariante par rapport à l'histoire" si elle ne dépend pas du choix de l'histoire  $h$  et un automate est dit être "invariant par rapport à l'histoire" si les suites extraites sont invariantes pour toute condition initiale  $x^0$  de  $Q^U$  (avec  $|U|$  fini). Gačs montre alors que le problème de savoir si un automate cellulaire a un comportement invariant par rapport à l'histoire est indécidable. Il nous paraît donc intéressant de relier ces travaux à la question plus générale de savoir si dans le cas asynchrone un automate atteint toujours un même ensemble d'attracteurs.

#### 4.3.3 Zone B (fort $r_a$ , faible $r_b$ )

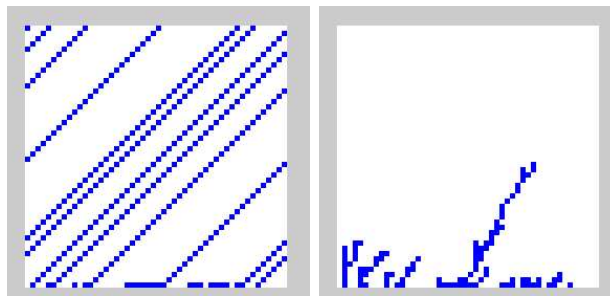
Cette zone doit contenir les règles pour lesquelles un ajout mineur d'asynchronisme produit un changement brutal de comportement (fort  $r_a$ ), alors

que dans le domaine asynchrone, on observe peu de variations (faible  $r_b$ ).

**Surfaces avec un saut à  $\alpha = 1$  et parfaitement horizontales dans le domaine asynchrone**



(a)



(b)

FIG. 4.6 – (a) Un exemple de surface pour un ACE de type GAP (échelle des  $z$  modifiée) : ACE **2**. (b) Évolution de l’ACE **2** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (droite)  $\alpha = 0.5$ .

La figure 4.6 montre une surface d’échantillonnage avec une discontinuité en  $\alpha = 1$ . Ceci indique l’existence d’un “transition de phase du premier ordre” (i.e., une variation brutale de comportement au voisinage d’une valeur de  $\alpha$ ).

L'examen des orbites montre que pour  $\alpha = 1$ , on observe un comportement de sous-shift alors que pour  $\alpha < 1$ , les orbites ressemblent à un shift "partiel" dans lequel les "branches" (1-domaines) disparaissent progressivement.

Ceci nous amène à introduire la classe GAP, définie comme l'ensemble de règles qui ont une transition de phase du premier ordre au voisinage de  $\alpha = 1$ . Expérimentalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{GAP} = \{ & \mathbf{2}, \mathbf{10}, \mathbf{24}, \mathbf{34}, \mathbf{42}, \mathbf{56}, \mathbf{74}, \mathbf{130}, \mathbf{134}, \mathbf{154}, \mathbf{162} \} \\ = \{ & \text{BEFGH, BEGH, CEGH, BDEFGH, BDEGH, CDEGH,} \\ & \text{BEH, BEFG, BFG, BCEG, BDEFG} \}. \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que tous les automates de cette classe sont totalement asymétriques (cf. partie 1.4.2 page 32). On peut émettre une hypothèse pour expliquer cette propriété :

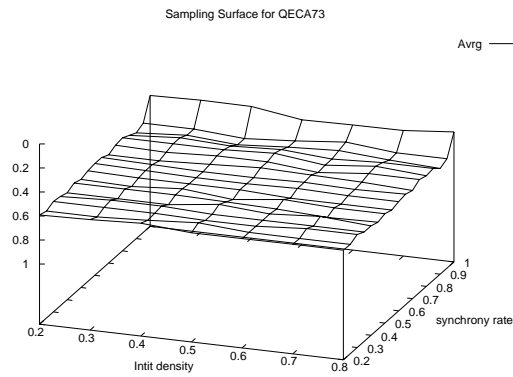
- L'absence de symétrie par rapport à la réflexion indique que la règle possède une anisotropie qui lui permet de transmettre un signal dans une direction privilégiée et autorise ainsi le comportement de type sous-shift en mode synchrone.
- L'absence de symétrie par rapport à l'opération de conjugaison montre que la règle peut avoir un état privilégié vers lequel elle tend à être absorbée (ici  $*0^*$ ) en mode asynchrone.

Ce problème reste également un problème théorique à étudier. A l'appui de notre hypothèse, on peut noter que toutes les règles de GAP, à l'exception de la règle **154** sont classées comme des sous-shift par Cattaneo et al. [CFM99]. En ce qui concerne l'ACE **154** (classe d'équivalence de **180**), cette règle a un comportement relativement complexe et a été étudiée en détail par Cattaneo [CM98] et Martin [Mar01]. Pour notre classification dynamique elle est classée H (cf. partie 3.2.1 page 68).

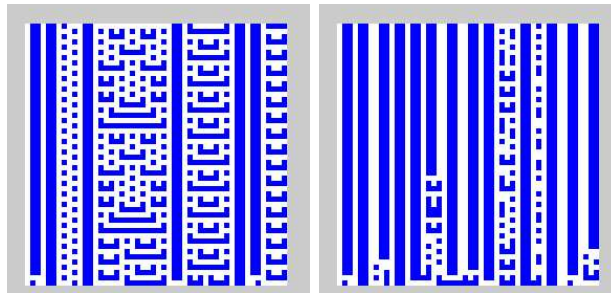
### Surfaces avec un saut à $\alpha = 1$ et une quasi-horizontalité ailleurs

Les ACE **73** et **142** sont les deux seuls automates trouvés dans la région B qui ne soient pas dans GAP. Pour ces deux règles, l'examen des surfaces d'échantillonnage (4.7) montre que, tout comme les automates précédents, un changement important de  $\rho_{\text{exp}}$  a lieu lors de l'introduction d'asynchronisme. En revanche, la partie de la surface correspondant au domaine asynchrone n'est pas parfaitement plate mais paraît légèrement bruitée.

L'examen des orbites permet de comprendre ce qu'il se produit dans le fonctionnement de l'automate. Dans le cas de l'ACE **73**, en évolution asynchrone, on s'aperçoit que son évolution est de type "chaotique" dans



(a)



(b)

FIG. 4.7 – (a) Un exemple de surface avec une discontinuité à  $\alpha = 1.0$  et du bruit pour  $\alpha < 1.0$  : ACE **73**. L'axe des  $z$  a été inversé afin de permettre de visualiser la discontinuité à  $\alpha = 1$ . (b) Évolution de l'ACE **73** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (droite)  $\alpha = 0.8$ .

des sous-ensembles de  $\mathcal{U}$  restreints qui sont séparés par des mots 0110 (cf. fig. 4.7.b ). Lorsqu'on introduit de l'asynchronisme, on a une probabilité non nulle qu'un mur 0110 apparaisse dans les 0-domaines (cf. définition 14) où il n'était pas présent. Ceci implique qu'au fur et à mesure que le temps progresse, de plus en plus de murs apparaissent et jusqu'à ce que l'orbite atteigne un état "quasi-stable" dans lequel les murs 0110 se trouvent séparés par trois types de mots :

- 0 : ces mots sont stables
- 00 : ces mots sont stables
- 000 et 010 : ces deux mots alternent l'un après l'autre quand la mise-à-jour a lieu au milieu du mot.

Cette analyse rapide nous permet de comprendre la forme de la surface d'échantillonnage : le premier saut montre le changement de comportement résultant de l'apparition de murs quand on ajoute de l'asynchronisme. Le bruit observé sur le domaine asynchrone de la surface est dû aux mises-à-jour aléatoires des régions "instables" formées des sous-mots 000 et 010 .

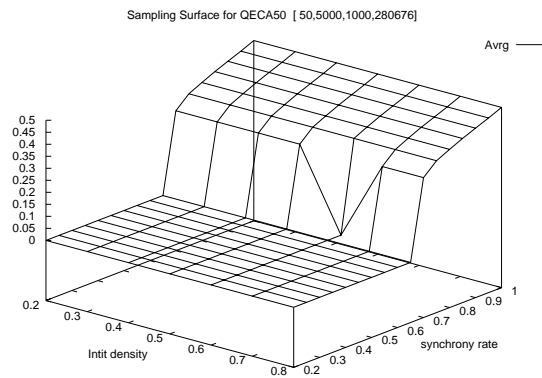
Notons que Wolfram dans [Wol02] cite la règle **73** comme un candidat potentiel à l'universalité (au sens de Turing). Afin de permettre une totale circulation de l'information, le codage des configurations initiales est tel qu'elles ne comportent pas de murs (i.e., de sous-mot 11). Or, on s'aperçoit qu'un ajout infime d'asynchronisme perturberait de façon irrémédiable le fonctionnement de l'automate puisqu'il ferait apparaître des murs qui bloqueraient la suite du calcul. Cette règle nous fournit donc un exemple dans lequel on peut montrer simplement que la complexité de calcul peut être fortement altérée par ajout d'une faible quantité d'asynchronisme.

#### 4.3.4 Zone C (faible $r_a$ , fort $r_b$ )

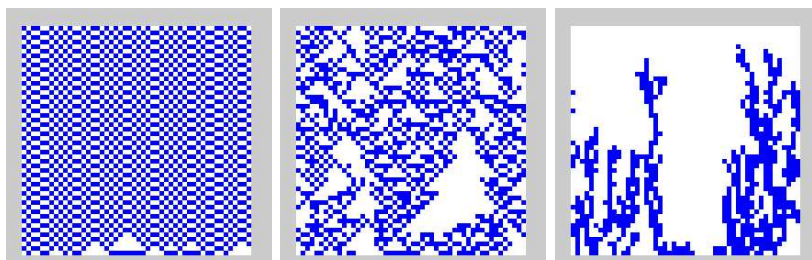
Cette zone contient les automates pour lesquels un saut important survient dans la zone asynchrone  $\alpha < 1$  mais qui ne montre pas de discontinuité au voisinage de  $\alpha = 1$ .

#### Surfaces montrant une "transition de phase"

La figure 4.8 montre un exemple de surface pour laquelle il se produit un changement brutal de comportement pour une valeur critique du taux de synchronisme  $\alpha_c$ . On peut ainsi séparer le fonctionnement de l'automate en deux régimes : on appelle un régime sur-critique (resp. sous-critique) le comportement obtenu pour des valeurs du taux de synchronisme  $\alpha > \alpha_c$  (resp.  $\alpha < \alpha_c$ ).



(a)



(b)

FIG. 4.8 – (a) Surface pour un ACE de type SPT : **50** (échelle des z modifiée).  
 (b) Évolution de l'ACE **50** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (centre)  $\alpha = 0.75$  (droite)  $\alpha = 0.25$ .

On peut s'interroger sur les raisons de ces différences de comportement, en particulier se demander s'il est dû au fait que l'on observe des configurations de taille finie ou ce comportement s'il se produit pour n'importe quelle valeur de  $n$ ? En effet, il est déjà arrivé que l'on conjecture l'existence de telles "transitions de phase" alors que l'effet que l'on observait n'était dû qu'à la limitation des moyens de calcul [Hol03].

Expérimentalement, on constate que les automates de la zone C montrant une "transition de phase" sont :

$$\begin{aligned} SPT &= \{ \mathbf{18}, \mathbf{26}, \mathbf{50}, \mathbf{58}, \mathbf{106}, \mathbf{146}, \mathbf{178} \} \\ &= \{ \text{BCEFGH}, \text{BCEGH}, \text{BCDEFGH}, \text{BCDEGH}, \text{BDEH}, \text{BCEFG}, \text{BCDEFG} \}. \end{aligned}$$

La répartition de ces règles montre qu'elles occupent les trois classes dans la dynamique : les **50**, **58** et **178** sont dans la classe P, les **18**, **106**, **146** sont dans la classe C et l'ACE **26** est dans H. On peut remarquer que ces automates forment un groupe compact sur le diagramme  $(r_a, r_b)$  (cf. figure 4.3) à l'exception de l'ACE **178** qui a une valeur de  $r_b$  qui est bien plus grande que celle des autres membres de la zone C.

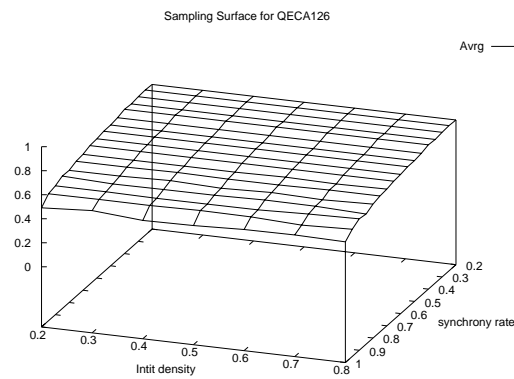
L'examen visuel des orbites (figure 4.8) de l'ACE **50** montre qu'en régime sur-critique, on peut observer des branches (i.e. des 1-domaines) qui peuvent se rétrécir, s'élargir, se diviser ou disparaître. Dans Pomeau ([PBDG94], p.216), nous avons constaté que des phénomènes similaires avaient été observés pour des réseaux d'application couplées ("coupled map lattices"). Pomeau avait fait une analogie avec la mécanique des fluides en proposant d'identifier la phase turbulente avec la structure branchée et la phase laminaire les cellules à l'état 0 (0 est état absorbant car des branches de 1 meurent sur un fond de 0). Pour ces systèmes à état continu, Pomeau a conjecturé que la transition de phase appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée [Pom86]. Si cela est le cas, les transitions de phase observées sont du "second ordre" (i.e., la valeur de  $\rho_{\text{exp}}$  est continue par rapport à  $\alpha$  mais sa dérivée est discontinue) et elles obéissent à des lois bien définies. Nous avons alors cherché à tester la validité cette hypothèse dans le cas des automates cellulaires ; ces travaux sont exposés dans le prochain chapitre.

Il est à noter que l'on observe également un même type de transition de phase pour les ACE **22** et **30** : les orbites montrent également des structures arborescentes qui peuvent disparaître ; la seule différence étant que la structure branchée est constituée de "particules" (ou défauts) qui évoluent sur le fond régulier formé du motif 01. Ceci implique que la fonction  $\rho_{\text{exp}}$  ne permet pas de visualiser la transition de phase puisque la densité des orbites fluctue autour de  $d = 0.5$  quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . Ceci montre les

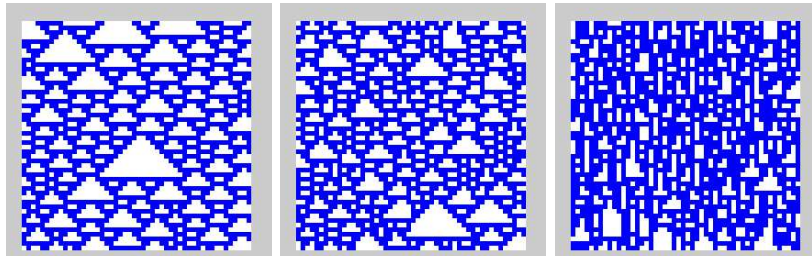


limites de notre protocole expérimental et suggère que des résultats plus fins pourraient être obtenus en filtrant les diagrammes espace-temps de manière adéquate.

### Surfaces sans discontinuité pour $\alpha = 1$ mais avec forte pente



(a)



(b)

FIG. 4.9 – (a) Un exemple de surface  $d_{\text{ini}}$ -invariante et  $\alpha$ -dépendante : ACE **126** (axe des  $\alpha$  inversé). (b) Évolution de l'ACE **126** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (centre)  $\alpha = 0.9$  (droite)  $\alpha = 0.5$ .

Nous observons que seul l'ACE **126**=BCDH se trouve dans la zone C sans faire partie de SPT. C'est un automate de type "chaotique" (cf. partie 3.2.1

page 68) pour lequel l'asynchronisme change fortement la densité moyenne des orbites sans entraîner de changement de phase (cf. figure 4.9).

#### 4.3.5 Zone D (fort $r_a$ , fort $r_b$ )

Dans cette zone, on trouve les automates pour lesquels  $r_a$  et  $r_b$  sont élevés. Il peut y avoir deux explications directes à l'obtention de fortes valeurs pour ces deux paramètres. La première est qu'il se produit d'importants changements aussi bien dans la zone du passage synchrone/asynchrone que dans la zone asynchrone. La seconde est que les statistiques ne convergent pas et que les mesures données par  $\rho_{\text{exp}}$  sont hautement instables.

#### Surfaces "accidentées"

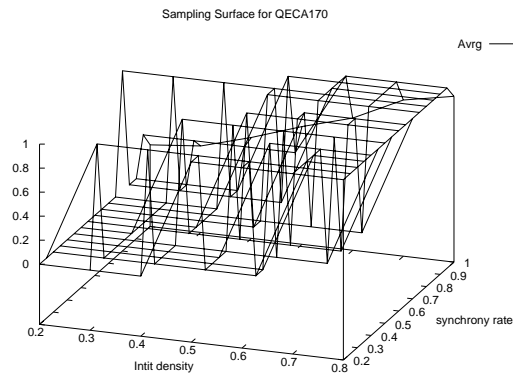
La figure 4.10 montre une surface qui apparaît très accidentée. Expérimentalement, on constate que deux expériences différentes peuvent conduire à deux surfaces radicalement différentes.

L'observation des orbites pour les ACE **138**, **170** (shift) et **184** montre un type de comportement, où, partant d'une configuration quelconque, on voit que des domaines de 0 ou 1 apparaissent. On constate aussi que le bord de domaines dérive de façon aléatoire et qu'il se produit des fusions de domaines. L'étude théorique de ce comportement est effectuée dans le chapitre suivant, nous pourrions ainsi justifier les résultats expérimentaux observés ici.

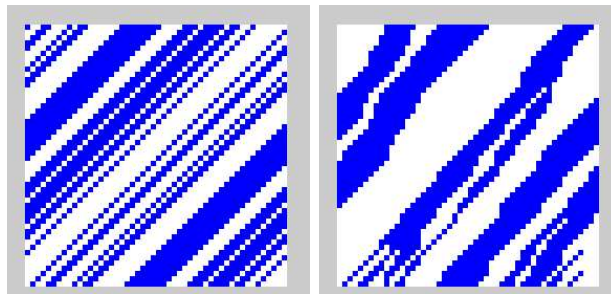
#### Le cas particulier d'une surface avec ondulations : ACE 46

L'examen visuel de la surface d'échantillonnage de l'ACE **46** montre un phénomène inattendu : des "ondulations" parallèles à l'axe  $d_{\text{ini}}$  apparaissent (cf. figure 4.11). Une analyse poussée des orbites nous a montré que l'on est en présence d'un phénomène de "couplage rapide" : des orbites qui partent de conditions initiales différentes et auxquelles on applique une même histoire, convergent rapidement vers un même état qui n'est pas un point fixe.

Ce phénomène est montré dans la figure 4.12, obtenue en gardant  $\alpha$  constant et où l'on fait varier  $d_{\text{ini}}$ . Des phénomènes de couplage ont déjà été observés avec les automates cellulaires (cf. chapitre 6) mais la façon dont on obtenait le couplage "force" deux orbites à se rapprocher en mettant à un même état des cellules de deux automates distincts. Dans le cas observé ici, on peut dire en quelque sorte que le couplage a lieu "naturellement" puisqu'à aucun moment on ne force l'égalité des états. L'étude approfondie de ce nouveau type de couplage n'est pas effectué dans cette thèse et nous laisserons

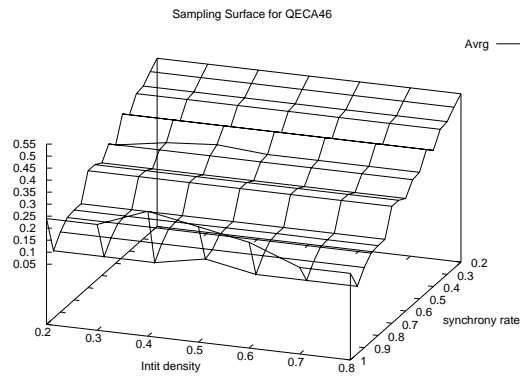


(a)

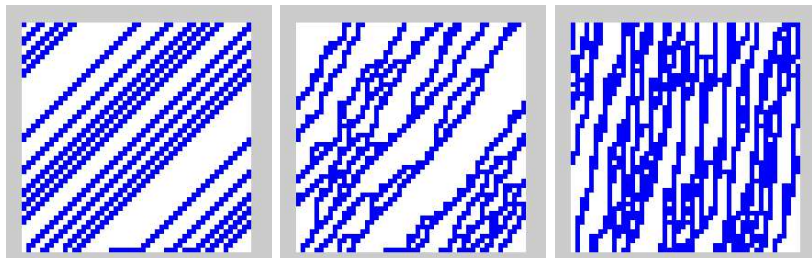


(b)

FIG. 4.10 – (a) Un exemple de surface “accidentée” : ACE **170** (shift). (b) Évolution de l’ACE **170** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (droite)  $\alpha = 0.8$ .



(a)



(b)

FIG. 4.11 – (a) Un exemple de surface d'échantillonnage "ondulée" : **46** (axe des  $\alpha$  inversé). (b) Évolution de l'ACE **46** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (centre)  $\alpha = 0.75$  (droite)  $\alpha = 0.25$ .

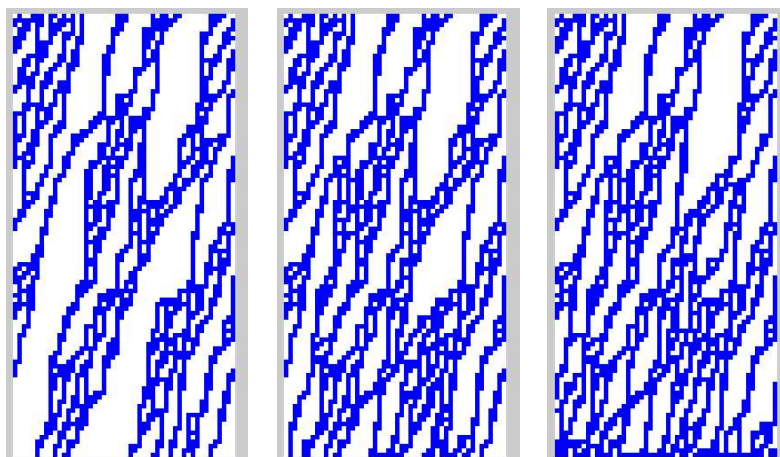


FIG. 4.12 – Évolution de l’ACE **46** pour  $\alpha = 0.40$  et  $d_{\text{ini}} = 0.30$  (gauche) 0.50 (centre) 0.80 (droite)

donc ouvert le problème théorique qui consiste à classer les différents types de couplage et à quantifier les temps de couplage pour différents automates cellulaires évolués avec des conditions initiales différentes et une même histoire asynchrone.

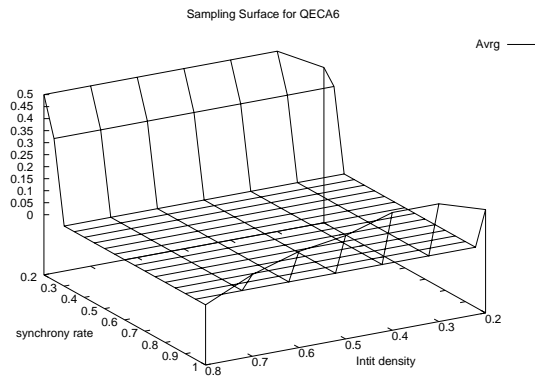
#### Surface en forme de “U”

La figure 4.13 montre le type de surface observé pour les ACE **6**, **38** et **134** : On observe d’une part que le passage synchrone/asynchrone montre une transition de phase du premier ordre similaire à celui de la classe GAP (on passe d’un shift à un point fixe). Par ailleurs, on observe un comportement de type transition de phase de second ordre similaire à celui de la classe SPT à ceci près que l’état branché apparaît pour des valeurs de  $\alpha$  *plus faibles* que  $\alpha_c$  (i.e, dans le domaine sous-critique).

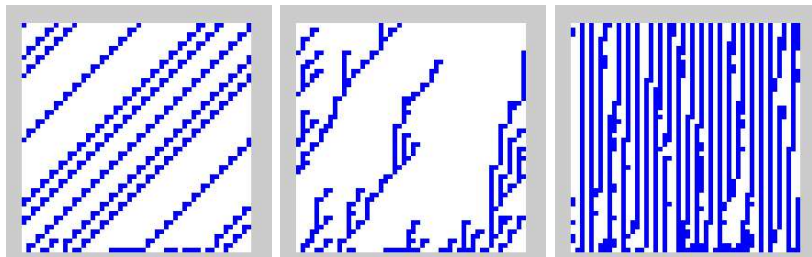
Cette propriété est importante puisqu’elle répond négativement à la question posée par Bersini et Detours dans [BD94] qui est de savoir si l’ajout d’asynchronisme a toujours tendance à stabiliser un automate cellulaire.

## 4.4 Conclusion et perspectives

Ce chapitre nous a permis de découvrir les différents comportements des automates cellulaires élémentaires en dynamique asynchrone. Le protocole que nous avons proposé nous a permis de séparer les règles dans des classes



(a)



(b)

FIG. 4.13 – (a) Un exemple de surface en forme de U : ACE **6**. (b) Évolution de l'ACE **6** : (gauche)  $\alpha = 1.0$  (centre)  $\alpha = 0.75$  (droite)  $\alpha = 0.25$ .

distinctes, selon que l'automate présentait des variations brusques ou continues de son comportement, lors de l'introduction d'une petite quantité d'asynchronisme ou à une valeur strictement plus petite que 1 du taux de synchronisme.

Ces premières observations nous ont permis de mettre en évidence plusieurs problèmes de nature théorique dont certains sont traités dans la suite :

- Définir formellement et étudier analytiquement la classe PR des automates parfaitement robustes, trouver des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à cette classe.
- Expliquer les relations entre l'existence de mots bloquants et la robustesse d'un automate.
- Démontrer analytiquement l'existence de transitions de phase du premier ordre et quantifier analytiquement les temps de transition vers l'état attracteur. Cette question sera en partie traitée dans le chapitre 5.
- Montrer que les changements de comportement sont des transitions de phase : les phénomènes observés ne doivent pas dépendre d'un choix particulier de taille des configurations  $n$  ; en particulier le seuil où le changement doit tendre vers une limite précise lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cette question sera traitée dans le chapitre 6
- Expliquer pourquoi certains automates ont des surfaces d'échantillonnage mal définies. Est-ce dû à un comportement intrinsèque de la règle ou à un mauvais choix des constantes  $T_{tr}$  et  $T_{ech}$  ? Cette question sera en partie résolue lors de l'étude analytique du chapitre 5.
- Étudier les différents temps de couplage pour des règles qui sont évoluées avec une même histoire en partant de conditions initiales différentes.

Un point qui nous paraît essentiel dans les résultats que nous avons obtenu est qu'il n'y a pas de relation directe entre les classes de robustesse et les classifications de la dynamique que nous avons vues dans les chapitres 2 et 3. Par exemple, si on considère les règles "chaotiques", on trouve que l'ACE **122** est dans la zone A, alors que les ACE **18** et **146** sont en zone C ("transition de phase du second ordre"). Dans le cas des règles périodiques, on trouve que l'ACE **232** est en zone A, l'ACE **34** est en zone B ("transition de phase du premier ordre") et l'ACE **50** est en zone C ("transition de phase du second ordre"), l'ACE **6** est en zone D("surface en forme de U").

La question qui se pose naturellement concerne de savoir où se situent les règles "complexes" telles que les **54** et **110** : les observations montrent qu'elles se trouvent en zone A, ce qui signifie qu'elles sont robustes vis-à-vis de notre paramètre d'étude. Néanmoins, cela n'implique nullement qu'elles gardent le même degré de complexité en termes de puissance de calcul. En effet, le passage à l'asynchronisme impose un changement de modèle et une redéfini-

tion de la complexité et des capacités de calcul d'une règle. Par ailleurs, en dynamique synchrone, la complexité de ces deux règles est due à l'existence de particules qui évoluent sur un fond régulier qui a une densité donnée. En passant au fonctionnement asynchrone, on constate que le fond n'est pas perturbé, alors que les particules, elles, cessent de pouvoir évoluer librement. Il n'y a donc pas de raison que la densité moyenne varie même si l'asynchronisme détruit ici toute possibilité de calcul.

Un moyen de pallier ce résultat contre-intuitif serait par exemple d'utiliser un filtrage par groupage (cf. [Oll02] par exemple) afin de pouvoir séparer automatiquement le fond des particules. Un développement possible de ce travail pourrait alors consister à étudier la notion de robustesse pour des règles définies avec un nombre d'états plus grand, ce qui permettrait ainsi de raffiner notre classification en transformant les règles binaires en des règles à plusieurs états. Ces questions ont été examinées par Adachi, Lee, Morita et Peper [LAPM03, APL04] qui ont montré qu'il existe un automate universel pour la dynamique asynchrone qui n'utilise que cinq états.

A ce stade, il reste essentiel de valider les résultats par des moyens qui ne soient pas seulement expérimentaux. L'étude analytique de l'asynchronisme des automates cellulaires fait l'objet du prochain chapitre.



---

# Chapitre 5 Étude analytique des automates cellulaires élémentaires doublement quiescents

Nous nous intéressons dans ce chapitre à un sous-espace de l'espace des automates cellulaires élémentaires pour lequel le comportement asynchrone est étudié analytiquement. Pour cela, nous nous restreignons à l'espace des automates cellulaires élémentaires *doublement quiescents* pour lesquels les deux états 0 et 1 sont quiescents. Nous commençons par décrire les propriétés générales concernant les différentes règles : nous énonçons des propriétés statiques concernant les configurations et des propriétés dynamiques concernant les points fixes et le nombre de zones. Nous poursuivons en décrivant les processus probabilistes qui sont couplés à l'évolution des automates cellulaires. Ces processus sont alors utilisés dans le cas de la dynamique séquentielle : nous montrons alors notre résultat principal : pour tous les automates cellulaires élémentaires doublement quiescents, le temps de convergence peut être connu et le type de diagramme espace-temps produit peut être déterminé en fonction des mouvements possibles des frontières (cf. définition 14 page 22).

Plus précisément, nous montrons que les temps de convergence définissent des classes, homogènes en termes de diagrammes espace-temps qui sont la classe triviale (temps nul), la classe des "collectionneurs de coupons" (cf. explication ci-dessous), la classe des règles "quadratiques", la classe des règles "cubiques", la classe des règles "exponentielles" et, enfin, la classe des règles "divergentes". Ces résultats sont résumés sur le tableau 5.1. La première colonne présente le type de comportement observé ; la seconde colonne indique le code de Wolfram (en gras) et la taille de la classe d'équivalence (entre parenthèses), suivi du code de transition en troisième colonne. Les mouvements possibles des frontières 01 et 10 sont indiqués dans les deux colonnes suivantes, suivis des possibilités de la présence des transitions 010 ou 101 dans le code de transition. Enfin, la dernière colonne indique le pire

temps de convergence vers un point fixe (cf. définition 42 ci-dessous).

## 5.1 Définitions

**Notation 9.** On note  $\epsilon$  la quantité  $\frac{1}{n}$ .

En dynamique séquentielle,  $\epsilon$  représente la probabilité de mise-à-jour d'une cellule. L'utilisation de cette notation permettra dans la suite l'utilisation d'alléger les calculs et, dans certains cas, d'utiliser les mêmes calculs dans le cas asynchrone parallèle (via une redéfinition de  $\epsilon$ ).

**Notation 10 (Configurations avec une région).** On note  $w_i$  la configuration  $w_i = 1^i 0^{n-i}$ , avec  $i \in [0, n]$ .

On note  $\mathcal{X}$  l'ensemble des configurations aléatoires, défini comme l'ensemble des mesures sur  $Q^n$ . L'ensemble  $\mathcal{X}$  modélise l'incertitude de l'état de la configuration obtenue au temps  $t$  liée à la mise-à-jour aléatoire d'un automate cellulaire.

**Définition 41 (Processus stochastique discret).** Soit  $\Delta$  une dynamique, soit  $x \in Q^n$  une configuration, on notera  $(x^t)$  la suite de  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$  des configurations aléatoires obtenues par itération de  $F_\delta$  selon :

- (a)  $x^0$  vérifie  $\Pr[x^0 = x] = 1$  ;
- (b)  $x^{t+1} = F(x^t, \omega)$  où  $\omega$  est une mise-à-jour aléatoire choisie dans  $\Omega = \{0, 1\}^{|U|}$  avec une probabilité  $\Delta(\omega)$ .

**Définition 42 (Pire temps de convergence en moyenne).** Pour un automate donné, et une configuration  $x$  de  $Q^n$ , on note  $T_x$  la variable aléatoire qui mesure le temps pour lequel le processus atteint un point fixe :

$$T_x = \min\{t : x^t \in \mathcal{F}\}.$$

Le pire temps de convergence en moyenne  $T$  de cet automate est :

$$T = \max_{x \in Q^n} \{\mathbf{E}[T_x]\}.$$

Signalons que le pire temps de convergence en moyenne est également appelé temps d'atteinte d'un ensemble ("hitting time") dans le contexte de l'étude des algorithmes d'auto-stabilisation. Un algorithme distribué est dit *auto-stabilisant* si, quelle que soit la configuration initiale, il atteint un ensemble  $\mathcal{L}$  de configurations "légales" qui vérifient certaines propriétés. Bien que les motivations des études soient différentes, les outils mis en oeuvre

Comportement	ACE (#)	Règle	01	10	010	101	PTCM
Identité	<b>204</b> (1)	$\emptyset$	.	.	.	.	0
Collectionneur de coupons	<b>200</b> (2)	E	.	.	+	.	$\Theta(n \ln n)$
	<b>232</b> (1)	DE	.	.	+	+	
Monotone	<b>206</b> (4)	B	$\leftarrow$	.	.	.	$\Theta(n^2)$
	<b>132</b> (2)	BC	$\leftarrow$	$\rightarrow$	.	.	
	<b>234</b> (4)	BDE	$\leftarrow$	.	+	+	
	<b>250</b> (2)	BCDE	$\leftarrow$	$\rightarrow$	+	+	
	<b>202</b> (4)	BE	$\leftarrow$	.	+	.	
	<b>192</b> (4)	EF	$\rightarrow$	.	+	.	
	<b>218</b> (2)	BCE	$\leftarrow$	$\rightarrow$	+	.	
Marche aléatoire biaisée	<b>242</b> (4)	BCDEF	$\rightsquigarrow$	$\rightarrow$	+	+	$\Theta(n^2)$
	<b>130</b> (4)	BEFG	$\rightsquigarrow$	$\leftarrow$	+	.	
Marche aléatoire	<b>226</b> (2)	BDEF	$\rightsquigarrow$	.	+	+	$\Theta(n^3)$
	<b>170</b> (2)	BDEG	$\leftarrow$	$\leftarrow$	+	+	
	<b>178</b> (1)	BCDEFG	$\rightsquigarrow$	$\rightsquigarrow$	+	+	
	<b>194</b> (4)	BEF	$\rightsquigarrow$	.	+	.	
	<b>138</b> (4)	BEG	$\leftarrow$	$\leftarrow$	+	.	
<b>146</b> (2)	BCEFG	$\rightsquigarrow$	$\rightsquigarrow$	+	.		
Marche aléatoire biaisée	<b>210</b> (4)	BCEF	$\rightsquigarrow$	$\rightarrow$	+	.	$\Omega(n2^n)$
Divergent	<b>198</b> (2)	BF	$\rightsquigarrow$	.	.	.	Divergent
	<b>142</b> (2)	BG	$\leftarrow$	$\leftarrow$	.	.	
	<b>214</b> (4)	BCF	$\rightsquigarrow$	$\rightarrow$	.	.	
	<b>150</b> (1)	BCFG	$\rightsquigarrow$	$\rightsquigarrow$	.	.	

TAB. 5.1 – Comportement des automates cellulaires élémentaires doublement quiescents en dynamique séquentielle (cf. texte pour légende). L'abréviation PTCM désigne le pire temps de convergence en moyenne.

0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
a	b	e	c	a	b	f	g	c	b	f	g	d	f	g	a

FIG. 5.1 – Un exemple de configuration (haut) et de sa configuration étiquetée (bas). Les fonctions de comptage donnent :  $a = 3$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $f = 3$ ,  $g = 3$ ,  $h = 0$ .

dans ce chapitre ainsi que ceux qui sont utilisés dans l'étude des algorithmes auto-stabilisants sont généralement proches. On trouvera par exemple dans [MP04] un exemple d'étude où les processeurs (i.e., les cellules) sont des variables à deux états, disposés en anneau et mettant à jour leur état de façon probabiliste en fonction de l'état des processeurs voisins.

Dans la suite, sauf mention contraire, nous supposons que la dynamique est *séquentielle*. Le pire temps de convergence obtenu avec cette dynamique est alors noté  $T_{\text{seq}}$ .

**Définition 43 (Étiquetage des configurations et fonctions de comptage).** *On rappelle que l'on associe une lettre à chaque voisinage (et à chaque transition) selon le schéma suivant (cf. définition 33 page 31) :*

$V$	000	001	100	101	010	011	110	111
$L(V)$	A	B	C	D	E	F	G	H

Soit  $x$  une configuration de  $Q^n$ , on appelle configuration étiquetée de  $x$  la configuration  $\mathcal{L}(x)$  de  $\{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{h}\}^n$  obtenue par association d'une lettre dans  $\{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{h}\}$  à toute cellule de  $x$  selon :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)_i &= \mathbf{a} \text{ si } L(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \text{A} \\ &\dots \\ \mathcal{L}(x)_i &= \mathbf{h} \text{ si } L(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \text{H} \end{aligned}$$

On note  $l(x)$  le nombre d'occurrences de la lettre  $l$  dans  $x$ . Lorsqu'il n'y a pas d'équivoque sur la configuration  $x$ , on note simplement  $l$  cette quantité.

Un exemple de configuration étiquetée est donné sur la figure 5.1. Cette notation nous permettra dans la suite de simplifier les preuves en évitant d'avoir à examiner la suite de 0 et de 1 d'une configuration : les fonctions  $a(x) \cdots h(x)$  permettent de quantifier le nombre de fois que l'on peut appliquer une transition donnée dans une configuration  $x$  donnée.

On notera également  $0(x) = |x|_0 = a+b+c+d$  et  $1(x) = |x|_1 = e+f+g+h$  le nombre de 0 et de 1 d'une configuration  $x$ .

## 5.2 Boîte à outils générale

Nous présentons dans ce paragraphe les outils principaux qui vont nous permettre d'analyser l'évolution asynchrone des automates doublement quasi-synchrones. La première partie décrit des propriétés liées aux fonctions de comptage ; la seconde et la troisième parties présentent les résultats qui serviront à borner les temps de convergence des automates.

### 5.2.1 Quantités conservées

**Proposition 1.** *Dans toute configuration  $x \in U$ , les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} |x|_{01} &= b + d = e + f \\ &= c + d = e + g = |x|_{10} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} |x|_{001} &= b = c = |x|_{100} \\ |x|_{001} &= f = g = |x|_{100} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dans la suite, pour une configuration  $x$  fixée, on dira qu'un motif  $u$  (i.e., un sous-mot) est *suivi* (resp. précédé) d'un motif  $v$  si en parcourant la configuration de gauche à droite (resp. de droite à gauche), on rencontre toujours au moins une occurrence de  $v$  entre deux occurrences de  $u$ .

*Preuve de l'équation 5.1.* On s'intéresse aux occurrences du motif 01. En remarquant que chaque motif 01 est suivi d'un 1 ou d'un 0, on obtient :  $|x|_{01} = e + f$ . De même, puisque chaque motif 10 est précédé d'un 1 ou d'un 0, on obtient :  $|x|_{01} = b + d$ . De même, on obtient la seconde partie de l'égalité en regardant le nombre d'occurrences de 10. Enfin, on remarquera que, dans une configuration cyclique, le motif 01 est toujours suivi du motif 10, d'où :  $|x|_{01} \leq |x|_{10}$ . Par symétrie de conjugaison, on obtient :  $|x|_{10} \leq |x|_{01}$ . On a donc l'égalité entre tous les termes de l'équation 5.1.  $\square$

*Preuve de l'équation 5.2.* On remarque que toute occurrence de **f** (i.e., du motif 011) est nécessairement suivie d'une occurrence de **g** (l'absence de **g** implique qu'on ne rencontre que des 1 ce qui est impossible dans le cas des configurations circulaires), on a donc :  $f \geq g$ . De même, en parcourant la configuration de droite à gauche, on a :  $g \geq f$ . La preuve de l'égalité de  $b$  et  $c$  est identique en appliquant l'opération de conjugaison.  $\square$

### 5.2.2 Points fixes

Les propriétés suivantes permettent de déterminer l'ensemble des points fixes en fonction du code de transition de la règle. On remarque en premier lieu que  $*0^*$  et  $*1^*$  sont toujours des points fixes des règles doublement quiescentes. On appelle donc ces configurations des points fixes *triviaux*.

**Définition 44 (Lettre isolée).** *Dans une configuration unidimensionnelle  $x$ , on dira qu'une cellule  $c$  d'état  $l$  est isolée si les cellules d'indice  $c - 1$  et suivant  $c + 1$  sont dans un état différent de  $l$ . Lorsque le contexte est clair, on dira simplement que l'on a un "l isolé".*

**Lemme 2.** *Si une règle doublement quiescente admet un point fixe  $x$  non-trivial, alors :*

- *Si son code de transitions contient B ou C, alors tous les 0 de  $x$  sont isolés ;*
- *si son code de transitions contient F ou G, alors tous les 1 de  $x$  sont isolés ;*
- *si son code de transitions contient D, alors  $x$  ne contient aucun 0 isolé ;*
- *si son code de transitions contient E, alors  $x$  ne contient aucun 1 isolé.*

Ces règles sont naturellement combinées entre elles dans le cas où plusieurs de ces conditions sont vérifiées. Cela implique notamment que pour toute règle doublement quiescente qui contient BF ou BG, le seul point fixe non trivial est  $*01^* = (01)^{n/2}$  (dans le cas où  $n$  est pair).

Dans la suite, il nous sera également utile de savoir si un point fixe peut effectivement être atteint à partir d'une autre configuration ou s'il apparaît comme étant isolé dans le graphe de transitions.

**Définition 45 (Point fixe inaccessible en dynamique séquentielle).** *Une configuration  $x$  sera dite être un point fixe inaccessible (en dynamique séquentielle) si  $x$  ne peut être atteint à partir d'aucune autre configuration par mise-à-jour séquentielle :*

$$\forall x' \in Q^{\mathcal{U}} - \{x\}, \forall h \in M_{\text{seq}}^{\mathbb{N}}, F(x', h) \neq x.$$

### 5.2.3 Comportement des zones

Notons  $Z(x)$  le nombre de frontières d'un type donné :  $Z(x) = |x|_{01} = |x|_{10}$  ; Nous donnons maintenant les propriétés importantes qui permettent de connaître les différents types de convergence des automates cellulaires doublement quiescent en dynamique séquentielle.

**Proposition 3 (décroissance du nombre de frontières).** *Pour tout automate cellulaire élémentaire doublement quiescent, la quantité  $Z(x^t)$  est une fonction décroissante (au sens large) du temps.*

*Preuve.* En dynamique séquentielle, on a une unique mise-à-jour à chaque pas de temps. Notons cette transition :  $f(a, b, c) = d$ . On a alors :

- (a) Si  $a = b = c$ , les trois états de la transition sont identiques, puisque la règle est quiescente, on a :  $d = f(b, b, b) = b$ , la transition est alors sans effet.
- (b) Sinon, on a alors :  $a = d$  ou  $b = d$  ou  $c = d$ , la transition ne crée pas de zone (la frontière se déplace si  $b \neq d$  ou reste au même endroit si  $b = d$ ).

□

**Proposition 4.** *Pour toute configuration  $x$ , la somme du nombre de zones et du nombre de 1 de  $x$  est majorée par  $n$  :*

$$\forall x \in Q^n, 1(x) + Z(x) \leq n.$$

La propriété se démontre aisément par récurrence en partant de la configuration  $*1^*$  et en transformant des cellules 1 en cellules 0. Par conjugaison, on a aussi :

$$\forall x \in Q^n, 0(x) + Z(x) \leq n.$$

**Proposition 5.** *Pour une règle  $R$  donnée, les possibilités de mouvement des frontières 01 peuvent être décrites par la présence de B et F dans le code de transition :*

- Si  $R$  ne contient ni B ni F, les frontières 01 sont immobiles.
- Si  $R$  contient B et ne contient pas F, les frontières 01 peuvent se déplacer vers la gauche.
- Si  $R$  contient F et ne contient pas B, les frontières 01 peuvent se déplacer vers la droite.
- Si  $R$  contient BF, les frontières peuvent se déplacer vers la droite et vers la gauche et suivent une marche aléatoire.

Par conjugaison, on montre que les mouvements des frontières 01 peuvent être décrits par la présence de G et C dans le code de transition. Ces mouvements sont symbolisés par des flèches dans le tableau 5.1 page 107 : les flèches  $\leftarrow$  et  $\rightarrow$  signifient que la frontière peut se mouvoir à gauche et à droite respectivement et la double flèche  $\leftrightarrow$  signifie que la frontière suit une marche aléatoire puisqu'elle peut se mouvoir à droite et à gauche (selon la cellule mise-à-jour).

**Proposition 6.** *Pour une règle  $R$  donnée, les possibilités de fusion des 0-domaines (resp. des 1-domaines) sont contrôlées par la présence des transitions  $D$  (resp.  $E$ ) dans  $R$ .*

**Corrolaire 1.** *Si  $R$  ne contient ni  $D$  ni  $E$  le nombre de frontières est constant :  $\forall t, Z(x^t) = Z(x^0)$ .*

On notera que la conservation du nombre de frontières implique *a fortiori* la conservation du nombre de domaines.

Le paragraphe suivant utilise des techniques de probabilités et nous conseillons au lecteur qui n'est pas familier avec ce domaine de n'examiner que les résultats (dans une première lecture) afin de passer rapidement aux résultats concernant les automates cellulaires.

### 5.3 Boîte à outils probabiliste

Nous avons besoin, dans ce chapitre d'utiliser la notion d'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire. Cela nécessite d'introduire la notion de *filtration* qui, formellement, se définit comme "une suite croissante de sous-tribus de l'espace probabiliste considéré". Informellement, cet outil mathématique permet de modéliser l'accroissement d'information obtenu lors du déroulement d'un processus stochastique : il correspond à la notion "d'histoire" avec un sens large. Dans le cas qui nous concerne les filtrations considérées sont liées à la suite de mises-à-jour réalisées par le processus aléatoire, soit ici "l'histoire" au sens formel que nous lui avons attribué (cf. définition 16 page 23). Si  $(X_t)$  est une suite de variables aléatoires, la notation  $\mathbf{E}[X_{t+1}|X_t]$  désigne l'espérance conditionnelle de  $X_{t+1}$  "sachant  $X_t$  " : elle est calculée avec la filtration qui représente toutes les histoires qui conduisent à la valeur donnée de  $X_t$ . De même la notation,  $\mathbf{E}[X_{t+1}|x^t]$  désigne l'espérance conditionnelle de  $X_{t+1}$  connaissant la configuration  $x^t$  obtenue au temps  $t$ . La définition formelle des filtrations peut être nécessaire dans le cas d'espace de probabilités complexes ; dans notre cas l'espace de probabilité étant dénombrable, nous supposons toujours que nos filtrations sont "bien adaptées" au sens donné en théorie de la mesure : elles permettent effectivement de bien définir les quantités considérées. Dans la suite, nous nous contenterons de noter  $\mathcal{F}_t$ , comme cela est usuellement le cas, une filtration quelconque qui sera supposée définir un processus "bien adapté".

**Définition 46.** *Un processus à temps discret  $X_t$  est une martingale par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_t$  si :*

$$\forall t \in \mathbb{N}, \mathbf{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t.$$



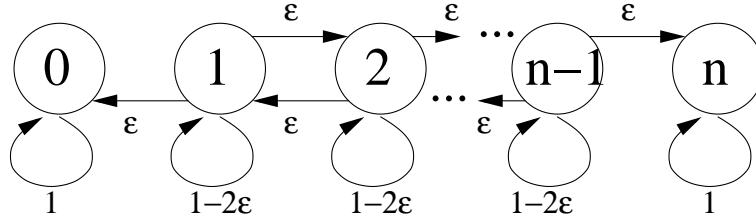


FIG. 5.2 – Chaîne de Markov correspondant à l'évolution de la règle BDEG (shift) dans le cas une zone.

Dans le cas où l'on a la relation vérifiée avec l'inégalité  $\leq$ , on dira que  $X_t$  est une sur-martingale.

En voyant  $X_t$  comme le gain d'un jeu jusqu'à l'instant  $t$  inclus, une martingale est un jeu équilibré tandis qu'une surmartingale est un jeu où, en moyenne, les gains sont négatifs. L'étude des martingales fait souvent intervenir les accroissements de  $X_t$ ; nous les notons  $\Delta X_{t+1} = X_{t+1} - X_t$ .

### 5.3.1 Cas des configurations à une zone

Les propriétés énoncées dans les paragraphes précédents nous permettent de connaître exactement le temps de convergence pour les conditions initiales à une zone  $w_i = 1^i 0^{n-i}$ . En effet, la propriété 3 sur la décroissance du nombre de zones nous garantit que, partant d'une configuration à une zone, une itération séquentielle conduit soit à une configuration à une zone, soit à un point fixe trivial.

**Proposition 7.** Pour une règle  $R$  donnée, notons  $p_i^+$ ,  $p_i^-$  la probabilité de passer de  $w_i$  à  $w_{i+1}$  et la probabilité de passer de  $w_i$  à  $w_{i-1}$  respectivement. Le temps de convergence  $T_i = T_{w_i}$  des configurations à une zone peut être obtenu par la résolution du système donné par  $T_0 = 0$ ,  $T_n = 0$  et :

$$T_i = p_i^-(1 + T_{i-1}) + p_i^+(1 + T_{i+1}) + (1 - p_i^- - p_i^+)(1 + T_i)$$

pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , où les  $p_i$  dépendent uniquement de  $R$ .

*Preuve.* Les équations  $T_0 = 0$  et  $T_n = 0$  traduisent le fait que  $*0^*$  et  $*1^*$  sont des points fixes et l'équation générale liant  $T_i$ ,  $T_{i-1}$  et  $T_{i+1}$  est obtenue par l'application de la méthode dite "du pas en avant" [Bré99] pour les chaînes de Markov<sup>1</sup> finies. Pour obtenir les probabilités de transition  $p_i^+$  et  $p_i^-$ , notons

<sup>1</sup>Informellement, une chaîne de Markov est un processus stochastique "sans mémoire" dont l'état au temps  $t+1$  ne dépend que de l'état au temps  $t$ .

$\tilde{T}$  la quantité qui vaut  $\epsilon$  si la transition  $T$  appartient au code de transition de  $R$  et 0 sinon. En analysant la forme des configurations étiquetées  $\mathcal{L}(w_i)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} p_1^+ &= \tilde{B} + \tilde{C} & p_1^- &= \tilde{E} \\ p_i^+ &= \tilde{B} + \tilde{C} & p_i^- &= \tilde{F} + \tilde{G} \quad (i \in \{2, \dots, n-2\}) \\ p_{n-1}^+ &= \tilde{D} & p_{n-1}^- &= \tilde{F} + \tilde{G} \end{aligned}$$

□

Dans le cas du shift (règle BDEG) par exemple, on obtient  $p_i^+ = p_i^- = \epsilon$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n-1\}$ . L'évolution du système en partant du cas une zone est donc gouvernée par la chaîne de Markov représentée dans la figure 5.2 et la résolution du système d'équation (par les séries entières par exemple) donne :  $T_i = \frac{i(n-i)}{\epsilon}$ .

Dans le cas où la configuration possède plusieurs zones, on ne peut plus traiter le problème de la même façon car chaque zone peut être réduite à une taille 1 et alors dépendre de l'application des transitions D et E, ou alors être de taille strictement supérieure 1 et dépendre de l'application des autres transitions. Cette inhomogénéité de comportement nous oblige alors à coupler l'évolution de l'automate avec celle d'un autre processus. Les paragraphes suivants exposent ces différents processus et donnent leurs temps de convergence.

### 5.3.2 Convergence en temps quadratique

Soit  $\epsilon$  un réel positif,  $m$  un entier positif et  $(X_t)$  une suite de variables aléatoires à valeur dans  $\{0, \dots, m\}$ , associée à une filtration adaptée  $\mathcal{F}_t$ . Le lemme suivant majore le temps d'un processus qui décroît d'une quantité constante en moyenne :

**Lemme 8 (Convergence en temps quadratique).** *Soit  $(X_t)$  vérifiant :*

$$X_t > 0 \implies \mathbf{E}[\Delta X_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq -\epsilon.$$

*Soit  $T = \min\{t : X_t \leq 0\}$  la variable donnant le temps où  $X_t$  devient négatif pour la première fois ; on a alors :*

$$\mathbf{E}[T | X_0] \leq \frac{X_0}{\epsilon}.$$

*Preuve.* Introduisons la variable  $Y_t = X_t + t\epsilon$  : cette variable  $Y_t$  peut être vue comme la différence entre  $X_t$  et  $-t\epsilon$ . On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\Delta Y_{t+1}|Y_t] &= \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}|X_t] + \epsilon \\ &\leq -\epsilon + \epsilon \leq 0\end{aligned}$$

$Y_t$  est donc une sur-martingale et on peut écrire :  $\mathbf{E}[Y_T] \leq \mathbf{E}[Y_0] \leq \mathbf{E}[X_0]$ . Or, on a :

$$\mathbf{E}[Y_T] = \mathbf{E}[X_T + T\epsilon] = \mathbf{E}[X_T] + \epsilon\mathbf{E}[T],$$

car  $T$  est un temps d'arrêt (i.e., il n'est défini qu'en fonction de l'histoire). En combinant ces deux expressions, il vient :

$$\mathbf{E}[T] \leq \frac{E(X_0) - E(X_T)}{\epsilon} \leq \frac{E(X_0)}{\epsilon}.$$

En effet,  $(X_t)$  étant une suite de variables aléatoires positives, la quantité  $\mathbf{E}[X_T]$  est également positive.  $\square$

On remarque que si  $X_0$  et  $1/\epsilon$  sont de l'ordre de grandeur de  $n$ , le temps  $T$  est de l'ordre de grandeur de  $n^2$ .

### 5.3.3 Convergence en temps cubique

Nous abordons maintenant la définition de processus qui vont nous permettre de prouver la convergence en temps cubique de certaines règles. En reprenant  $\epsilon$  réel positif et  $m$  entier positif, on définit deux processus stochastiques correspondant aux deux types de convergence observés.

#### Définition 47 (Processus de type I et II).

- Nous dirons que  $(X_t)$  est de type I si :
  - (a)  $(X_t)$  est une martingale,
  - (b) Si  $0 < X_t < m$ , alors :

$$\begin{cases} \Pr[\Delta X_{t+1} \geq 1|\mathcal{F}_t] \geq \epsilon & (\text{probabilité non nulle de croître}) \\ \Pr[\Delta X_{t+1} \leq -1|\mathcal{F}_t] \geq \epsilon & (\text{probabilité non nulle de décroître}) \end{cases}$$

- Nous dirons que  $(X_t)$  est de type II si pour tout  $t$  :
  - (a) Si  $X_t < m$ , alors :

$$\mathbf{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t$$

(on peut dire que  $(X_t)$  est une martingale sauf lorsqu'elle atteint son maximum),

(b) Si  $0 < X_t < m$ , alors :

$$\begin{cases} \Pr[\Delta X_{t+1} \geq 1 | \mathcal{F}_t] \geq \epsilon & (\text{probabilité non nulle de croître}) \\ \Pr[\Delta X_{t+1} \leq -1 | \mathcal{F}_t] \geq \epsilon & (\text{probabilité non nulle de décroître}). \end{cases}$$

(c) Si  $X_t = m$  alors :

$$\Pr[\Delta X_{t+1} \leq -1 | \mathcal{F}_t] \geq \epsilon \quad (\text{probabilité non nulle de décroître})$$

On remarquera que le processus défini par la chaîne de Markov de la figure 5.2 est un processus de type I. Un moyen simple de définir un processus de type II consiste à changer la transition qui concerne l'état  $n$  : on peut par exemple autoriser à décroître de  $n$  à  $n - 1$  avec une probabilité  $\epsilon$  et rester dans l'état  $n$  avec une probabilité  $1 - \epsilon$ .

**Lemme 9 (Convergence en temps cubique).** *Pour un processus de type I, soit  $T = \min\{t : X_t \in \{0, m\}\}$  le temps de convergence du processus ; on a alors :*

$$\mathbf{E}[T | X_0] \leq \frac{X_0(m - X_0)}{2\epsilon}.$$

*Pour un processus de type II, soit  $T = \min\{t : X_t = 0\}$  le temps de convergence du processus ; on a alors :*

$$\mathbf{E}[T | X_0] \leq \frac{X_0(2m + 1 - X_0)}{2\epsilon}.$$

*Preuve pour les processus de type I.* Prenons  $Y_t = X_t^2 - 2\epsilon t$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[(X_t + \Delta X_{t+1})^2 - 2\epsilon(t+1) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[X_t^2 + 2X_t \Delta X_{t+1} + \Delta X_{t+1}^2 - 2\epsilon(t+1) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[X_t^2 - 2\epsilon t | \mathcal{F}_t] + 2X_t \cdot \mathbf{E}[\Delta X_{t+1} | \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}^2 - 2\epsilon | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

On remarque que le premier terme de cette équation représente  $\mathbf{E}[Y_t]$ . Le second terme de l'équation est nul car  $X_t$  est une martingale et  $\mathbf{E}[\Delta X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = 0$ . D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}^2] &\geq \Pr[\Delta X_{t+1} \leq -1] + \Pr[\Delta X_{t+1} \geq 1] \\ &\geq 2\epsilon, \end{aligned}$$

ce qui assure que le troisième terme de l'équation est positif. On obtient donc pour tout  $t$ ,  $\mathbf{E}[Y_{t+1}] \geq Y_t$ , ce qui assure que  $Y_t$  est une sur-martingale. Prenons  $T$  temps pour lequel  $X_t$  devient négatif. En vérifiant que  $\mathbf{E}[T] < \infty$

et que les accroissements de  $Y_t$  sont finis, on peut appliquer le théorème du temps d'arrêt à la sur-martingale  $Y_t$  et écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[X_T^2 - 2\epsilon T|\mathcal{F}_t] \\ &\geq Y_0 \\ &\geq X_0^2.\end{aligned}$$

Or, on peut calculer  $\mathbf{E}[X_T^2 - 2\epsilon T|\mathcal{F}_t]$  selon :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_T^2 - 2\epsilon T|\mathcal{F}_t] &= 0^2 \cdot \Pr[X_T = 0] + m^2 \cdot \Pr[X_T = m] - \epsilon \mathbf{E}[T] \\ &= m^2 \cdot \frac{X_0}{m} \text{ (car } X_t \text{ est une martingale)}.\end{aligned}$$

Finalement, en combinant ces deux derniers résultats, on obtient l'inégalité :  $mX_0 - 2\epsilon \mathbf{E}[T] \geq X_0$  d'où l'on tire le résultat final :  $\mathbf{E}[T] \leq \frac{m(m-X_0)}{2\epsilon}$ .  $\square$

*Preuve pour les processus de type II.* Pour ce second type de processus, on ne dispose plus de la propriété que  $X_t$  est une martingale ; on peut néanmoins remarquer que c'est une "quasi-martingale" puisque seul le cas  $X_t = m$  pose problème. Ceci nous conduit à introduire une fonction  $Y_t = X_t^2 - 2\epsilon t + C \cdot X_t$  où  $C$  est une constante. Le choix de  $C$  se fait par "analyse-synthèse". On vérifie d'abord que les calculs restent identiques pour  $0 < X_t < m$  car le terme en  $C$  disparaît. Pour  $X_t = m$ , les calculs montrent qu'une condition suffisante pour que  $Y_t$  soit une sur-martingale est que  $C \geq 2m + 1$ . On prend donc  $C = 2m + 1$  pour obtenir la borne la plus juste sur  $T$ .  $\square$

Maintenant que nous disposons des outils probabilistes adaptés, nous abordons l'étude du comportement des règles examinées et de leur type de convergence.

## 5.4 Temps de convergence

Dans ce paragraphe, nous examinons les règles doublement quiescentes en dynamique séquentielle en les regroupant dans des classes définies en fonction du temps de convergence. Nous montrons que l'appartenance à une même classe correspond effectivement à un même type de comportement en couplant l'évolution de chaque automate avec un processus stochastique adéquat. Par souci de concision, nous n'avons pas inclus d'exemples détaillés d'évolution d'automate et des processus couplés. Nous conseillons néanmoins au lecteur de lire les preuves en ayant toujours sous les yeux un exemple concret de configuration originale et de la configuration étiquetée (par exemple, celles proposées sur la figure 5.1).

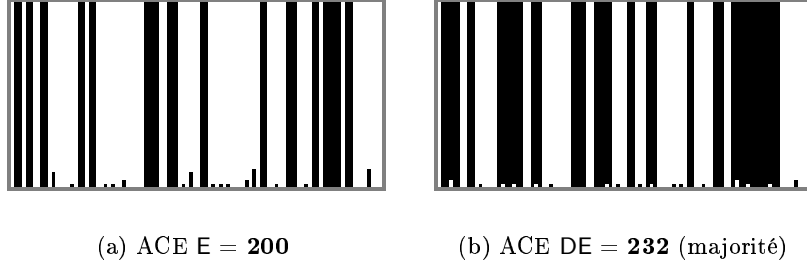


FIG. 5.3 – Diagrammes espace temps séquentiels des règles E et DE pour  $n = 100$ . Le temps va du bas vers le haut et on passe d’une ligne à une autre après  $n$  itérations séquentielles (i.e., les lignes représentent les états de l’automate aux temps  $i \cdot n$ ). Cette convention de représentation des diagrammes espace-temps séquentiels est conservée dans tout ce chapitre.

#### 5.4.1 Règles de type “collectionneur de coupons”

L’évolution séquentielle des règles E et DE est montrée sur la figure 5.3. Leur comportement est facilement déduit du code de transition. En effet, pour la règle E, une mise-à-jour sur une cellule d’étiquette **e** supprime ce **e** sans en créer de nouveau (car il n’y a pas de création possible de 1) et toute mise-à-jour sur une cellule portant une autre étiquette est neutre. La convergence vers un point fixe s’obtient donc en supprimant les **e** de façon séquentielle. Ce problème est analogue au problème du “collectionneur de coupons” (“coupon collector”) dans lequel on calcule le temps pris par un collectionneur pour compléter une collection de  $n$  coupons sachant qu’il obtient un coupon aléatoire parmi les  $n$  disponibles à chaque itération. En ce qui concerne la règle DE, on a le même comportement pour les cellules d’étiquette **d** et **e** et à ceci près qu’une mise-à-jour d’une cellule **d** ou **e** entraîne également la disparition des étiquettes respectives **e** et **d** adjacentes.

**Théorème 1.** *Le pire temps de convergence en moyenne des règles E et DE est  $T_{\text{seq}} = \Theta(n \log n)$ . Les points fixes atteints sont respectivement les configurations sans 1 isolé et sans 0 et 1 isolé.*

*Preuve.* Considérons tout d’abord la règle E. Posons  $X_t = e[x^t]$ , la variable aléatoire qui représente le nombre d’étiquettes **e** (i.e., le nombre de 1 isolés) dans  $x^t$ . On a alors :

$$x^t \in \mathcal{F} \iff X_t = 0.$$

Soit  $\Delta T_i$  la variable aléatoire qui donne le temps de passage pour  $X_t$  de  $i$  à

$i - 1$  :

$$\Delta T_i = \min_{t \in \mathbb{N}} \{t : X_t = i\} - \min_{t \in \mathbb{N}} \{t : X_t = i - 1\}.$$

La variable  $T_x$  qui représente le temps nécessaire pour converger vers un point fixe en partant d'une configuration  $x$  se décompose en :

$$T_x = \Delta T_{n_0} + \Delta T_{k-1} \cdots + \Delta T_1,$$

avec  $n_0 = e[x]$  d'où par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}[T_x] = \mathbf{E}[\Delta T_k] + \mathbf{E}[\Delta T_{k-1}] \cdots + \mathbf{E}[\Delta T_1].$$

La quantité  $\mathbf{E}[\Delta T_i]$  représente le temps moyen qu'il faut pour mettre à jour une cellule d'étiquette  $\mathbf{e}$  sachant que l'on a :  $X_t = e[x^t] = i$ . La probabilité d'effectuer une telle mise-à-jour vaut  $\epsilon X_t = i/n$  et il vient :

$$\mathbf{E}[\Delta T_i] = n/i,$$

d'où

$$\mathbf{E}[T_x] = \frac{n}{X_0} + \frac{n}{X_0 - 1} + \cdots + \frac{n}{1}.$$

et

$$\mathbf{E}[T_x] = n \cdot [\ln X_0 - \gamma + o[\epsilon]].$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler-Mascheroni ( $\gamma = 0.5772156649 \dots$ ).

Comme  $X_0$  est majoré par  $n/2$  et donc par  $n$ , il vient :

$$T_{\text{seq}} \leq \mathcal{O}[n \log n].$$

Pour obtenir une borne inférieure, on vérifie que pour la configuration  $z = *01^*$ , on a :

$$\mathbf{E}[T_z] = n \log \frac{n}{2} = \mathcal{O}[n \log n],$$

ce qui clôt la preuve.

En ce qui concerne la règle DE, la preuve est similaire en prenant :

$$X_t = d(x^t) + e(x^t),$$

et en remarquant que toute mise-à-jour sur une cellule d'étiquette  $\mathbf{d}$  ou  $\mathbf{e}$  fait diminuer la valeur de  $X_t$  de 1 ou de 2. Le temps de convergence de DE est donc majoré par celui de E. Pour établir une borne inférieure, pour une taille de grille  $n = 3m + l$ , on peut choisir configuration  $z = (010)^m 0^l$  et en remarquant que pour cette configuration,  $X_t$  ne peut décroître que de 1, il vient :

$$T_z \sim n \cdot \log m \sim n \cdot \log n,$$

ce qui clôt la preuve. □

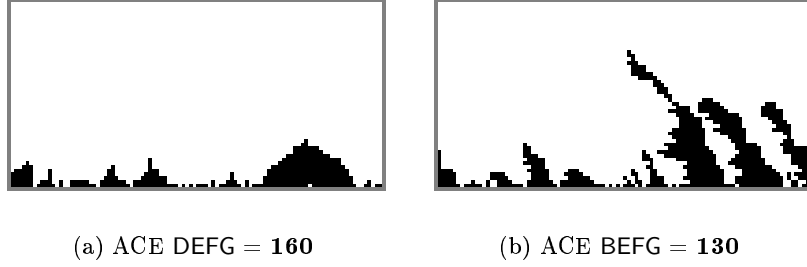


FIG. 5.4 – Diagrammes espace-temps de règles “quadratiques”. La règle DEFG = **160** est la règle conjuguée de la règle BCDE = **250** (elle converge donc vers  $*0^*$ ). Les conditions initiales sont aléatoires de densité initiale  $d_{\text{ini}} = 0.80$ .

### 5.4.2 Règles quadratiques

La figure 5.4 montre deux exemples de règles à convergence quadratique. Le cas de la règle DEFG correspond au cas où les deux frontières suivent une marche aléatoire biaisée en sens opposé. Ce cas est dit “monotone” (cf. tableau 5.1) car la taille des 1-domaines est monotone. Celui de la règle BEFG correspond au cas où une des deux frontières suit une marche aléatoire non biaisée (ici la frontière 01) et où l’autre frontière suit une marche aléatoire biaisée. Dans ce cas, la taille des 1-domaines est décroissante en espérance. Le lemme suivant permet de regrouper ces deux cas.

**Lemme 10.** *Pour une règle  $f$  donnée, soit  $X_t$  une fonction de  $x^t$  prenant ses valeurs dans  $\{0, \dots, n\}$  qui vérifie les conditions suivantes :*

- (a)  $x^t \notin \mathcal{F} \implies X_t > 0$ ,
- (b)  $x^t \notin \mathcal{F} \implies \mathbf{E}[\Delta X_{t+1} | x^t] \leq -\epsilon$ , alors le pire temps de convergence en moyenne de la règle  $f$  est borné par :  $T_{\text{seq}} \leq n^2$ .

*Preuve.* On rappelle que  $T_{\text{seq}}$  désigne le pire temps (en moyenne) de convergence sur un point fixe. Pour être en mesure d’appliquer le lemme 8 énoncé dans le paragraphe précédent, on doit assurer que tant que le processus est positif la probabilité de décroître est non nulle. Or, dans le cas qui nous intéresse, on remarquera qu’il est possible que le système ait atteint un point fixe (non trivial) *avant* que la valeur de  $X_t$  ne soit nulle. On doit donc “prolonger”  $X_t$  en définissant un processus  $Y_t$  selon :

$$Y_t = \begin{cases} X_t & \text{si } x^t \notin \mathcal{F} \\ 0 & \text{si } x^t \in \mathcal{F} \end{cases}$$



On vérifie alors que les conditions du lemme 8 s'appliquent bien avec  $Y_t$  et on peut alors borner par  $n^2$  le temps de convergence pour lequel  $Y_t$  s'annule. Puisque la convergence de  $Y_t$  à la valeur 0 implique que  $x^t$  a atteint un point fixe, on peut donc majorer le temps de convergence de la règle par  $n^2$ .  $\square$

Le lemme 8 montre qu'il suffit d'exhiber une fonction de  $x^t$  prenant ses valeurs dans  $\{0, \dots, n\}$  et strictement décroissante en espérance pour prouver qu'une règle a un temps de convergence (au pire) quadratique. Une telle fonction sera dite "fonction de Lyapunov" par analogie avec la terminologie de systèmes dynamiques continus : elle représente un potentiel qui décroît avec le temps et assure la convergence du système dynamique.

**Théorème 2.** *Le pire temps de convergence en moyenne des règles B, BC, BDE, BCDE, BCDEG, BE, EF, BCE, EFG, BCDEG est  $T_{\text{seq}} = \Theta(n^2)$ .*

*Preuve pour les règles B, BC, EF et EFG.* Le code de transition de ces règles nous indique que les règles B et BC (resp. EF et EFG) sont toutes dans le sous-ensemble  $\{A, B, C, D\}$  (resp.  $\{E, F, G, H\}$ ) ; ceci implique que seules des cellules à l'état 0 (resp. à l'état 1) peuvent changer d'état et que le nombre de 0 décroît avec le temps. On prend donc pour les règles B et BC la fonction de Lyapunov suivante :

$$X_t = 0(x^t),$$

et pour les règles EF et EFG :

$$X_t = 1(x^t).$$

On vérifie alors que les hypothèses du lemme 8 sont valides et on obtient  $n^2$  comme borne supérieure du temps de convergence. Pour obtenir une borne inférieure, on calcule le temps de convergence de  $w_1$  (cf. notation 10 du cas une zone) pour les règles B et BC, et de  $w_{n-1}$  pour les règles EF et EFG. Pour la règle B :  $\mathbf{E}[T_{z_1}] \sim n^2$ , pour BC :  $\mathbf{E}[T_{z_1}] \sim \frac{n^2}{2}$ , pour EF :  $\mathbf{E}[T_{z_2}] \sim n^2$ , pour EFG :  $\mathbf{E}[T_{z_2}] \sim \frac{n^2}{2}$ . On a donc bien pour ces quatre règles :  $T_{\text{seq}} = \Theta(n^2)$ .  $\square$

En ce qui concerne les règles BDE, BCDE, BE, BCE, on remarque qu'on ne peut plus réutiliser les fonctions de Lyapunov précédentes en raison d'un comportement différent de la règle selon que la configuration contient ou non des 0 ou des 1 isolés. Par exemple, pour la règle BDE, la configuration  $w_i$  vérifie que pour tout  $i \geq 2$ , le nombre de 1 ne peut qu'augmenter ; alors que pour  $w_1$  le nombre de 1 a autant de chances d'augmenter que de descendre. On contourne cette difficulté en remarquant que chaque mise à jour sur une cellule d'étiquette **d** ou **e** (i.e., un 0 ou un 1 isolé) fait diminuer le nombre

de régions de 1. Ceci nous permet, pour ces quatre règles, d'introduire la fonction de Lyapunov suivante :

$$X_t = o(x^t) + Z(x^t).$$

*Preuve pour la règle BDE.* Prouvons que la fonction  $X_t$  convient bien dans le cas de la règle BDE. Le calcul des variations de l'espérance de  $X_t$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}] &= \epsilon(-b - d + e) - \epsilon(e + d) \\ &= -\epsilon(b + 2d). \end{aligned}$$

Nous devons prouver que tant que  $x^t$  n'a pas atteint un point fixe, cette dernière quantité est non-nulle. Pour cela, on pose :

$$x^t \notin \mathcal{F} \implies b + d + e > 0. \quad (5.3)$$

En utilisant les relations de la propriété 1, on vérifie<sup>2</sup> :  $b + d - e \geq 0$ . Cette inégalité permet d'écrire que si  $x^t$  n'est pas un point fixe, alors  $b > 0$  d'où l'on tire bien  $b + 2d > 0$ , ce qui indique que la variation moyenne de  $X_t$  est inférieure à  $-\epsilon$ . D'autre part, on vérifie :

$$\begin{aligned} X_t = 0 &\implies o(x^t) + Z(x^t) = 0 \\ &\implies x^t = \mathbf{*1^*} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $X_t$  est une fonction de Lyapunov "adaptée" (i.e., elle vérifie les hypothèses du lemme 10). On obtient donc la borne supérieure  $T_{\text{seq}} \leq n^2$  par application du lemme 10. Pour achever la preuve, on obtient une borne inférieure en calculant le temps de convergence de la configuration  $w_2 = 110^{n-2}$  :

$$\mathbf{E}[T_{w_2}] = n(n-2) \sim n^2,$$

ce qui donne bien  $T_{\text{seq}} \sim n^2$ . □

*Preuve pour les règles BCDE, BE, BCE.* Pour ces règles, on vérifie aisément que la démonstration précédente peut leur être appliquée en adaptant les relations à la règle particulière étudiée. □

*Preuve pour la règle BCDEG.* Pour la règle BCDEG, le calcul des variations moyennes de  $X_t$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}] &= \epsilon(-b - c - d + e + g) - \epsilon(e + d) \\ &= -\epsilon(b + c + 2d - g). \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Cette relation traduit qu'un **e** ne peut être précédé que d'un **b** ou d'un **d**.

En utilisant les quantités conservées (équation 5.2), on obtient :

$$\mathbf{E}[\Delta X_{t+1}] = -\epsilon(b + d + e)$$

Pour prouver la relation  $x \notin \mathcal{F} \implies b + d + e > 0$ , il nous faut remarquer que si une configuration (circulaire) ne contient aucun état 0 ou 1 isolé, alors :  $b = c = f = g$ . On a donc :

$$\begin{aligned} x \notin \mathcal{F} &\implies b + c + d + e + g > 0 \\ &\implies d + e > 0 \text{ ou } b + c + g > 0 \\ &\implies d + e > 0 \text{ ou } b > 0 \\ &\implies b + d + e > 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire que  $X_t$  est une fonction de Lyapunov "adaptée". Le calcul du temps moyen de convergence pour  $w_2$  donne  $T_{w_2} = \mathcal{O}[n^2]$  ce qui clôt la preuve.  $\square$

*Preuve pour la règle BEFG.* Pour cette règle, on prend  $X_t = 1(x^t) + Z(x^t)$ , d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}] &= \epsilon(b - e - f - g) - \epsilon e \\ &= -\epsilon(d + e + g) \text{ (cf. prop. 1),} \end{aligned}$$

et

$$x \notin \mathcal{F} \implies b + e + f + g > 0.$$

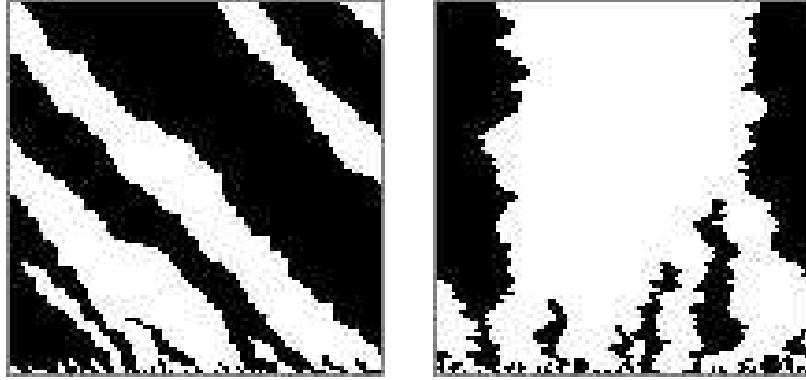
En utilisant la même technique que précédemment, on a :  $d + e = 0 \implies b = f = c = g$  d'où l'on tire :

$$x \notin \mathcal{F} \implies d + e + g > 0,$$

ce qui permet de valider la fonction de Lyapunov. De même, on montre par le calcul du cas une zone (cf. propriété 7) que l'on a  $T_{w_2} \sim n^2$  ce qui clôt la preuve.  $\square$

### 5.4.3 Règles cubiques

La figure 5.5 montre deux exemples de règles à convergence cubique. Le cas de la règle BDEG (shift) correspond au cas où les deux frontières suivent une marche aléatoire biaisée dans le même sens et où les deux types de domaines peuvent disparaître. Celui de la règle BCEFG correspond au cas où les deux frontières suivent une marche aléatoire non biaisée et où seuls les 1-domaines peuvent disparaître.



(a) ACE BDEG = 170 (shift)

(b) ACE BCEFG = 146

FIG. 5.5 – Diagrammes espace-temps séquentiels de règles “cubiques”.

**Théorème 3.** *Le pire temps de convergence en moyenne des règles BDEF, BDEG, BCDEFG, BEF, BEG, et BCEFG est  $T_{\text{seq}} = \Theta(n^3)$ . Pour les règles BDEF, BDEG et BCDEFG, les deux points fixes  $*0^*$  et  $*1^*$  peuvent être atteints à partir de toute configuration différente de  $*0^*$  et  $*1^*$ . Pour les règles BEF, BEG, et BCEFG toute configuration différente de  $*1^*$  converge vers  $*0^*$ .*

Nous divisons les preuves en deux parties : la première concerne les trois règles qui contiennent DE et qui seront couplées à des marches aléatoires de de type I, la seconde concerne les trois règles qui contiennent E mais pas D qui seront couplées à des marches aléatoires de de type II (cf. définition 47 page 115).

### Règles contenant DE

*Preuve pour la règle BDEG.* Cette règle correspond au shift. On remarque que pour toute configuration non triviale, on a autant de chances de créer un 1 que de créer un 0. On prend donc :  $X_t = 1(x^t)$ .  $X_t$  prend bien ses valeurs dans  $\{0, \dots, n\}$  et le calcul de la variation moyenne de  $X_t$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}] &= \epsilon(b + d - e - g) \\ &= 0 \text{ (d'après 5.1)} \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} x^t \notin \mathcal{F} &\implies b + d + e + g > 0 \\ &\implies b + d > 0 \\ &\implies e + g > 0. \end{aligned}$$

d'où  $X_t$  est une fonction de type I "adaptée" (i.e., elle vérifie les hypothèses du lemme 9).  $\square$

*Preuve pour la règle BDEF.* On voit aisément que du point de vue calculatoire, la démonstration est strictement identique en changeant la fonctions  $g$  en  $f$ .  $\square$

Dans le cas de la règle BCDEFG, son comportement vis-à-vis du nombre de 1 est une "quasi-martingale" : le processus est une martingale sur la majeure partie des configurations mais cela n'est plus vrai sur un certain nombre de configurations qui contiennent des 0 et des 1 isolés. Par exemple, la configuration  $w_1$  a deux fois plus de chances d'augmenter le nombre de 1 que de la faire diminuer. Cela nous oblige à utiliser une fonction  $X_t$  différente en utilisant des arguments de "couplage" : nous majorons le temps de convergence du processus réel par un processus de type I construit de façon *ad hoc*.

*Preuve pour la règle BCDEFG.* Nous introduisons deux processus  $D_t$  et  $E_t$  qui comptent respectivement le nombre de fois que l'on a appliqué une transition de type D et E durant l'intervalle de temps allant de 0 à  $t$ . Nous définissons alors  $X_t$  tel que :  $X_t = Z(x^0) + 1(x^t) + D_t - E_t$ .

On vérifie alors que  $X_t$  prend ses valeurs dans  $\{0, \dots, 2n\}$  puisque pour tout  $t$ , on a, d'après la propriété 4 :  $Z(x^0) - E_t \geq 0$  et  $D_t + Z(x^0) \leq n$ . D'autre part, si  $X_t = 0$  ou  $X_t = 2n$ , alors  $x^t$  est un point fixe (trivial). On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta X_{t+1}] &= \epsilon(-b - c - d + e + f + g) + \epsilon e - \epsilon d \\ &= \epsilon(-b - c - 2d + 2e + f + g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En appliquant les équations 5.1 et 5.2, on montre que la variation moyenne du processus  $\mathbf{E}[\Delta X_{t+1}]$  est nulle et que  $X_t$  est bien une martingale. De plus, si  $x^t$  n'est pas un point fixe, on a alors :  $b + c + d + e + f + g \geq 1$ . On peut

récrire cette équation sous la forme :  $2b + d + e + 2g \geq 1$ . Par conséquent, au moins une des quantités  $b, d, e$  ou  $g$  est supérieure à  $1/2$ , d'où :

$$\begin{aligned} \Pr[\Delta X_{t+1} \geq 1] &= \Pr[\Delta X_{t+1} \leq -1] \\ &= \epsilon(2e + f + g) \\ &= \epsilon(b + d + e + g) \\ &\geq \epsilon. \end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme 9 qui donne  $T_{\text{seq}} = \mathcal{O}[n^3]$ . La preuve se clôt en obtenant une borne inférieure par le calcul du cas une zone (cf. propriété 7), ce qui donne bien un temps de convergence en  $\Theta(n^3)$ .  $\square$

### Règles contenant E et ne contenant pas D

En appliquant le lemme 2 sur les points fixes, on trouve que les seuls points fixes de ces règles sont les points fixes triviaux. D'autre part, on ne peut converger vers l'un de ces deux points fixes qu'en appliquant la transition E. Cela implique que  $*1^*$  est un point fixe inaccessible et que le temps de convergence de toute configuration  $x \in Q^n - \{^*1^*\}$ , correspond au temps d'atteinte de  $*0^*$ .

*Preuve pour la règle BEF.* Pour cette règle, on remarque que les mises-à-jour sur les cellules d'étiquette  $\mathbf{d}$  (i.e., les 0 isolés) sont inactives et que les 1-domaines ne peuvent fusionner. Nous couplons donc l'évolution de la règle à un processus  $Y_t$  de type II qui suit une martingale sur toutes ses positions sauf lorsqu'il arrive à sa valeur "maximale" égale à  $n - 1$  pour laquelle il ne peut plus croître.  $Y_t$  est un processus "couplé" à  $x^t$  dans le sens l'évolution de  $Y_t$  dépend uniquement de la suite des configurations  $(x^t)$  et de la suite des mises-à-jour  $(\omega_t)$ . Soit  $l$  l'étiquette de la cellule mise-à-jour au temps  $t$  (i.e.  $l = \mathcal{L}(x^t)_i$  avec  $\omega_t = (0^{i-1})1(0^{n-i-1})$ ), on définit  $Y_t$  selon :

$$Y_0 = 1(x^0)$$

$$Y_{t+1} = \begin{cases} Y_t + 1 & \text{si } l \in \{\mathbf{b}, \mathbf{d}\} \text{ et } Y_t < n - 1 \\ Y_t & \text{si } l \in \{\mathbf{b}, \mathbf{d}\} \text{ et } Y_t = n - 1 \\ Y_t - 1 & \text{si } l \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}\} \end{cases}$$

D'après le lemme 9, on sait que  $Y_t$  converge en temps cubique.

Or, on vérifie aisément par récurrence que pour tout  $t$ ,  $Y_t$  majore le nombre de 1 de  $x^t$ . En effet, la propriété est vraie par construction au temps  $t = 0$ . Supposons qu'elle soit vraie au temps  $t$ . Si  $Y_t < n - 1$ , alors les

$Y_t$	+2	+1	0	-1	-2
$\leq n - 2$	$l = \mathbf{d}$	$l \in \{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$	$l \notin \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$	$l \in \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$	$l = \mathbf{e}$
$= n - 1$		$l \in \{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$	$l \notin \{\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$	$l \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$	
$= n$			$l \notin \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$	$l \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$	

TAB. 5.2 – Définition d'un processus pour l'analyse de la règle BCEFG. Les accroissements  $\Delta Y_{t+1}$  de  $Y_t$  sont donnés en fonction de l'avaleur de  $Y_t$  et de l'étiquette  $l$  de la cellule mise-à-jour au temps  $t$ .

variations de  $X_t$  et de  $Y_t$  sont similaires sauf si  $l = \mathbf{d}$  auquel cas  $Y_{t+1}$  est supérieur  $X_{t+1}$ ; la propriété est donc vraie au temps  $t + 1$ . Si  $Y_t = n - 1$ , en remarquant que la valeur de  $X_t$  est majorée par  $n - 1$ , on en déduit que la propriété reste également vraie au temps  $t + 1$ . Par conséquent, la convergence de  $Y_t$  implique bien  $x^t = *0^* \in \mathcal{F}$ , ce qui clôt la preuve.  $\square$

*Preuve pour la règle BEG.* Cette règle correspond à une version du shift dans laquelle une seule des deux fusions est autorisée. On vérifie aisément que la démonstration précédente s'applique en utilisant la fonction  $g$  à la place de la fonction  $f$ .  $\square$

*Preuve pour la règle BCEFG.* Soit  $X_t = 1(x^t)$ ; cette fonction ne définit pas une martingale. En effet, examinons le comportement des cas où apparaissent des 0 et des 1 isolés. Pour une configuration  $w_1$ , la probabilité d'augmenter le nombre de 1 est de  $2\epsilon$  et la probabilité de diminuer le nombre de 1 est de  $\epsilon$ , on "corrige" donc la fonction  $X_t$  en retranchant 1 à chaque mise-à-jour d'une cellule d'étiquette  $\mathbf{e}$ . Pour une configuration  $w_{n-1}$ , la probabilité d'augmenter le nombre de 1 est nulle et la probabilité de diminuer le nombre de 1 est de  $2\epsilon$ , on "corrige" donc la fonction  $X_t$  en ajoutant 2 à chaque mise-à-jour d'une cellule d'étiquette  $\mathbf{d}$ . Soit  $Y_t$  le processus défini dans le tableau 5.2.

La colonne de gauche donne la condition sur  $Y_t$ , la colonne de droite associe à chaque cas défini en fonction des valeurs de  $l$ , la valeur  $\Delta Y_{t+1}$  des variations de  $Y_t$ .

On peut alors vérifier que  $Y_t$  est un processus de type II. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta Y_{t+1} | Y_t \leq n - 2] &= \epsilon(b + c + 2d - 2e - f - g) \\ &= 0, \\ \mathbf{E}[\Delta Y_{t+1} | Y_t \leq n - 1] &= \epsilon(b + d - e - f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\Pr[\Delta Y_{t+1} \leq -1 | Y_t < n] &= \Pr[\Delta Y_{t+1} \leq -1 | Y_t < n] \\ &= \epsilon(2e + f + g) \\ \Pr[\Delta Y_{t+1} \leq -1 | Y_t = n] &= \epsilon(e + f + g).\end{aligned}$$

Pour montrer que ces quantités sont non nulles pour tout  $t$  tel que  $x^t$  n'est pas un point fixe, on écrit :

$$\begin{aligned}x^t \notin \mathcal{F} &\implies b + e + f > 0 \\ &\implies e > 1 \text{ ou } f > 1 \\ &\implies 2e + f + g > 1 \text{ (car } f = g) \\ &\implies e + f + g > 1.\end{aligned}$$

En utilisant le même argument que pour la règle BEF, on prouve que  $Y_t$  majore  $X_t$  et que le temps de convergence de  $Y_t$  implique que  $x^t$  a atteint un point fixe. Comme  $Y_t$  vérifie les propriétés du lemme 9, sa convergence s'effectue un temps  $T_{\text{seq}} \sim n^2/\epsilon \sim n^3$ . Le pire temps de convergence de  $X_t$  est donc au plus cubique :  $T_{\text{seq}} = \mathcal{O}[n^3]$ . On obtient de même une borne inférieure par le calcul du cas une zone (cf. propriété 7), ce qui clôt la preuve.  $\square$

#### 5.4.4 Règle exponentielle

**Théorème 4.** *Le pire temps de convergence en moyenne de la règle BCEF est  $T_{\text{seq}} = \Theta(n2^n)$ . L'ensemble de ses points fixes est réduit aux points fixes triviaux et toute configuration différente de  $*1^*$  converge vers  $*0^*$ .*

*Preuve pour la règle BCEF.* La réduction de l'ensemble des points fixes aux deux points fixes triviaux découle de l'application du lemme 2. Pour montrer que toute configuration converge vers  $*0^*$ , il suffit de montrer que pour toute configuration qui n'est pas un point fixe, il existe une séquence de mises-à-jour de longueur bornée qui mène à  $*0^*$ . Soit  $x$  une configuration et soit  $h = (\omega_t)$  une histoire de  $M_{\text{seq}}^{\mathbb{N}}$  construite<sup>3</sup> à partir de la suite  $(i_t)$  d'indices de  $\mathcal{U}$  telle que :

$$\forall t : i_t = \begin{cases} \min\{i \in \mathcal{U} : \mathcal{L}(x^t)_i = \mathbf{e} \text{ ou } \mathcal{L}(x^t)_i = \mathbf{f}\} & \text{si } x^t \notin \mathcal{F} \\ 0 & \text{si } x^t \in \mathcal{F} \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>On dit qu'une histoire séquentielle  $(\omega_t)$  est construite à partir de la suite d'indices  $i_t$  si pour tout  $t$ , l'indice de la cellule de  $w_t$  qui est égal à 1 vaut  $i_t$ .





(a) ACE 180

(b) ACE 180

FIG. 5.6 – Diagrammes espace-temps séquentiels de la règle “exponentielle” CDFG = **180**, qui est la règle conjuguée de BCEF = **210**. Les conditions initiales sont aléatoires de densité  $d_{\text{ini}} = 0.8$ . La non-connexité des motifs de 1 s’explique par le fait qu’on représente une génération tous les  $n$  pas de temps (cf. conventions figure 5.3).

On montre alors facilement que toute orbite asynchrone converge sur le point fixe  $*0^*$  en (au plus)  $n$  pas de temps (i.e.,  $\forall t \geq n, \gamma_{h,x}(t) = *0^*$ ). En effet, on remarque que pour toute configuration  $x$  qui n’est pas un point fixe, on a  $b + c + e + f > 1$  d’où l’on tire :  $e(x) > 1$  ou  $f(x) > 1$  (car  $e = 0$  implique  $b = c = f$  et  $f > 1$ ). Il est donc toujours possible de diminuer le nombre de 1 de  $x$  tant que  $x$  n’est pas un point fixe, ce qui permet bien d’atteindre un point fixe en moins de  $n$  pas de temps. On en déduit qu’à chaque pas de temps, la probabilité que  $x^t$  converge sur  $*0^*$  en  $n$  pas de temps est supérieure à  $\epsilon^n$  et donc que le temps de convergence de tout point est fini.

La borne inférieure est obtenue par le calcul du temps de convergence dans le cas une zone. En effet, on obtient le jeu d’équations suivant :

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_i = 2\epsilon(T_{i+1} + 1) + (1 - 3\epsilon)(T_i + 1) + \epsilon(T_{i-1} + 1) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-2\} \\ T_{n-1} = (1 - \epsilon)(T_{n-1} + 1) + \epsilon(T_{n-2} + 1) \end{cases}$$

qui se résout en  $T_i = \frac{2^n}{\epsilon}(1 - 2^{-i}) - \frac{i}{\epsilon}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Pour obtenir la borne supérieure, nous réalisons un couplage entre le

processus d'origine  $x^t$  et un second processus  $y^t$  construit comme suit :

- Soient  $i_1$  et  $i_2$  les indices correspondant à un 0-domaine (quelconque) de  $x^0$ . La configuration  $y^0$  est obtenue en mettant toutes les cellules d'indice  $i$  compris entre  $i_1$  et  $i_2$  à l'état 0 et toutes les autres cellules à l'état 1.  $y^0$  est donc une configuration à une seule zone pour laquelle son 0-domaine coïncide avec un 0-domaine de  $x^0$ .
- A chaque pas de temps, on passe de  $y^t$  à  $y^{t+1}$  en deux étapes. La première étape consiste à appliquer les mêmes transitions dans  $x^t$  et  $y^t$ . La seconde étape consiste à décaler toutes les cellules de  $y^t$  vers la droite jusqu'à ce que les frontières 01 de  $x^t$  et  $y^t$  soient alignées.

On vérifie alors que l'on a pour tout  $t$  :  $1(y^t) > 1(x^t)$  et donc que la convergence de  $y^t$  sur  $*0^*$  implique la convergence de  $x^t$  sur  $*0^*$ . Pour cela, montrons par induction qu'à tout instant  $t$ , toutes les cellules correspondant au 0-domaine de  $y^t$  sont à l'état 0 dans  $x^t$ . L'hypothèse est vraie par construction au temps  $t = 0$ . Supposons qu'elle soit vraie au temps  $t$ . On remarque que si une transition B ou C est appliquée, l'hypothèse d'induction reste trivialement vraie puisque l'on a diminué la taille du 0-domaine; nous n'examinons donc que l'effet des transitions F ou E.

Supposons que la transition F soit appliquée dans  $y^t$  et notons  $c$  l'indice de la cellule mise-à-jour (dans  $x^t$  et dans  $y^t$ ). Le sous-mot correspondant aux indices  $\{c-1, c, c+1\}$  s'écrit 011 dans  $y^t$  et, par application de l'hypothèse d'induction, il s'écrit 01 $q$  dans  $x^t$  puisque les frontières 01 sont alignées. On remarque alors que les transitions produisent le même effet sur  $x^t$  et sur  $y^t$  pour  $q = 0$  (transition E dans  $x^t$  et F dans  $y^t$ ) et pour  $q = 1$  (transitions identiques dans  $x^t$  et  $y^t$ ).

Supposons maintenant que la transition E soit appliquée dans  $y^t$ ; ceci correspond au cas où  $y^t$  est de la forme  $1^{n-1}0$  à décalage près. On remarque alors que l'on a ou  $x^t = y^t$  ou  $x^t = *0^*$ , ce qui permet également de valider l'hypothèse d'induction.

Le temps convergence de toute configuration est donc majorée par le temps de convergence du pire cas une zone et l'on a bien  $T_{\text{seq}} = \Theta(n2^n)$ . □

#### 5.4.5 Règles non convergentes

**Théorème 5.** *Pour les règles BF, BG, BCF, BCFG, les orbites séquentielles partant d'une configuration différente de  $*0^*$ ,  $*1^*$  ou  $*01^*$  (dans le cas où  $n$  est pair) n'aboutissent jamais à un point fixe. De plus, dans une telle orbite, toute configuration est atteinte un nombre infini de fois.*

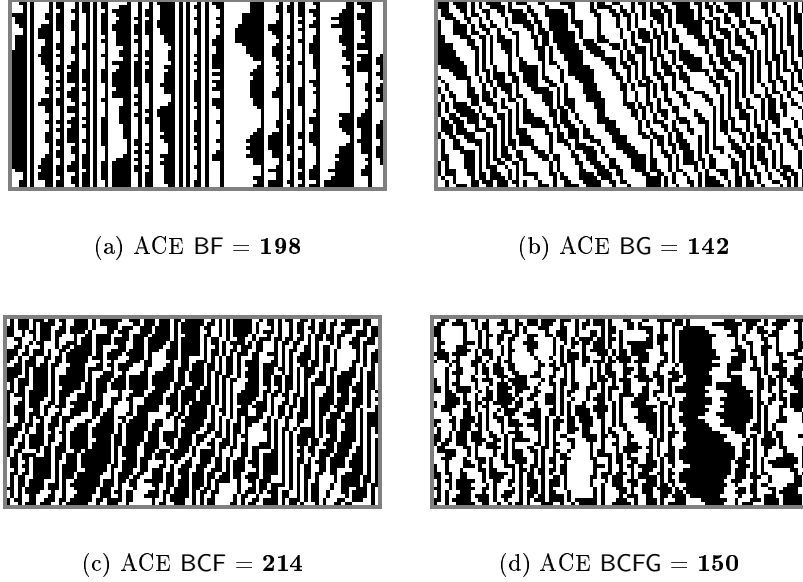


FIG. 5.7 – Diagrammes espace-temps séquentiels de règles non convergentes.

*Preuve pour les règles BF, BG, BCF, BCFG.* Pour ces quatre règles, en utilisant le lemme 2, on obtient que le seul point fixe non trivial est  $*01^*$  (dans le cas où  $n$  est pair).

Pour montrer que les orbites séquentielles ne convergent jamais, on suppose qu'il existe une configuration  $x$  qui ne soit pas un point fixe et une suite de mises-à-jour séquentielle  $h$  telles que l'orbite  $\gamma_h(x)$  contienne un point fixe  $x_f$ ; on a alors :  $Z(x) \notin \{0, n\}$  et  $Z(y) \in \{0, n\}$ ; ce qui contredit la conservation du nombre de domaines (cf. propriété 3) en évolution séquentielle.

Pour prouver la seconde partie du théorème, il suffit de montrer que dans toute orbite, il existe une séquence de mises-à-jour de taille bornée permettant d'aller de n'importe quelle configuration à n'importe quelle autre. Considérons par exemple le cas de la règle BG. Soient deux configurations  $x$  et  $y$  telles que  $y \in \gamma_{h,x}$ , on a alors nécessairement  $Z(x) = Z(y)$  (i.e., les configurations  $x$  et  $y$  ont le même nombre de domaines). Dans  $y$ , indexons les positions des frontières 10 par  $i_1 \cdots i_k$ , (i.e.,  $i_1 = \min\{i \in U : x_i = 0 \text{ et } x_{i+1} = 1\}$ ,  $i_2 = \min\{i > i_1 : x_i = 0 \text{ et } x_{i+1} = 1\}$ , etc.). Nous allons passer de  $x$  à  $y$  en trois étapes. La première consiste à faire décroître la taille de tous les  $q$ -domaines jusqu'à la taille minimale 1 : cela se fait en mettant à jour (séquentiellement) les cellules qui ont une étiquette  $g$ . On obtient alors

une configuration  $x'$  contenant  $k$  1 isolés (i.e.,  $k$  cellules d'étiquette **e**). On peut alors déplacer chaque 1 isolé vers la gauche en mettant séquentiellement à jour les cellules **b** puis les cellules **g**. On place alors chacun des 1 isolé aux positions  $i_1 \cdots i_k$  (en allant des indices les plus élevés aux indices les plus faibles). On obtient donc une configuration  $x''$  où les frontières 10 sont alignées avec les frontières 10 de  $y$  en un temps au plus quadratique. Il reste enfin à étendre chaque 1-domaine en mettant à jour les cellules **b** de manière à aligner les frontières 01 et ainsi obtenir la configuration  $y$ .

Cette technique peut s'étendre aux règles BCF, BCFG qui permettent également de déplacer les deux frontières. Pour ces trois règles, l'orbite d'une configuration est constituée (presque sûrement) de l'ensemble des configurations ayant même nombre de domaines :

$$\forall x \in Q^n, \Pr[\gamma_{h,x} = \{y \in Q^n : Z(y) = Z(x)\}] = 1.$$

Enfin, pour la règle BF, on remarquera que seules les frontières 01 peuvent se déplacer (cf. propriété 5), l'orbite issue d'une configuration  $x$  est donc constituée de l'ensemble des configurations  $y$  telles que les frontières 10 de  $x$  et  $y$  coïncident. On voit qu'en déplaçant les frontières 01 par application des transitions **B** et **F** on peut passer de toute configuration de l'orbite à toute autre ; ce qui clôt la dernière preuve de ce paragraphe.  $\square$

## 5.5 Le cas de la dynamique asynchrone

Le comportement des règles doublement quiescentes, s'il peut être entièrement déterminé dans le cas de la dynamique séquentielle, est en général difficile à traiter dans le cas de la dynamique asynchrone. Nous pouvons néanmoins étendre les démonstrations précédentes dans un certain nombre de cas qui sont présentés dans la suite.

Nous reprenons les mêmes notations que dans le paragraphe précédent en remplaçant la dynamique séquentielle par la dynamique synchrone de taux de synchronisme  $\alpha$  dans les définitions.

### 5.5.1 Règles de type "collectionneur de coupons"

La preuve que nous proposons utilise un théorème relatif aux fonctions convexes (ou concaves par symétrie) :

**Théorème 6 (Inégalité de Jensen).** *Soit  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $U$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $X$  une variable aléatoire telle que :*

- *La fonction  $f$  est convexe,*

- $P(X \in U) = 1$ ,
- $E(|X|) < \infty$  (i.e.,  $X$  est intégrable),
- $E(|f(X)|) < \infty$  (i.e.,  $f \circ X$  est intégrable),

alors :

$$f(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[f(X)].$$

Ce théorème nous permet dans la suite de faire commuter l'opérateur d'espérance et la fonction exponentielle.

**Théorème 7.** *Le pire temps de convergence en moyenne de la règle E est  $\Theta(-\frac{\ln n}{1-\alpha})$ .*

*Preuve pour la règle E.* Posons  $X_t = e(x^t)$  et  $Y_t = \frac{X_t}{(1-\alpha)^t}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= \frac{1}{(1-\alpha)^{t+1}} \mathbf{E}[X_{t+1}|X_t] \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^{t+1}} (X_t - \alpha X_t) \\ &= \frac{X_t}{(1-\alpha)^t} \\ &= Y_t \end{aligned}$$

$Y_t$  est donc une martingale, ce qui permet d'écrire pour tout  $t$  :  $\mathbf{E}[Y_t] = \mathbf{E}[Y_0]$  et  $\mathbf{E}[X_T] = (1-\alpha)^t \mathbf{E}[X_0]$ . On pose alors  $T_1$  comme étant le temps pour lequel on atteint  $X_t = 1$  pour la première fois (i.e.,  $x^{T_1}$  est la configuration où il ne reste qu'un seul  $\mathbf{e}$ ).  $T_1$  est un temps d'arrêt et on peut écrire :  $\mathbf{E}[X_{T_1} = 1]$ . Pour appliquer l'inégalité de Jensen, on vérifie que  $\mathbf{E}[T_1]$  est bien intégrable : nous sommes dans le cas simple où pour toute configuration, il existe un chemin de longueur bornée qui mène au point fixe. D'autre part, on note que la variable aléatoire  $(1-\alpha)^{T_1}$  est également d'espérance finie puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(1-\alpha)^{T_1}] &= \sum_{t=0}^{\infty} (1-\alpha)^t \cdot \Pr[T_1 = t] \\ &\leq \sum_{t=0}^{\infty} (1-\alpha)^t, \end{aligned}$$

qui converge bien pour  $\alpha \in ]0, 1]$ . Comme la fonction  $t \rightarrow (1-\alpha)^t$  est *concave*, il vient par application de l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{T_1}] &= \mathbf{E}[X_0(1-\alpha)^{T_1}] \\ &\leq \mathbf{E}[X_0](1-\alpha)\mathbf{E}[T_1], \end{aligned}$$

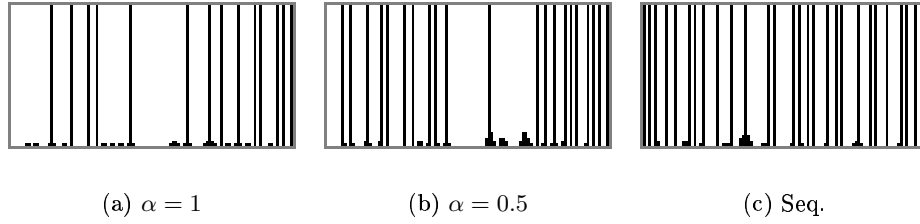


FIG. 5.8 – Diagrammes espace-temps de la règle B. La même condition initiale est utilisée pour les trois diagrammes.

d'où l'on tire :

$$\mathbf{E}[T_1|X_0] \leq -\frac{\ln X_0}{\ln(1-\alpha)}.$$

Pour arriver à la convergence à  $*0^*$ , il reste à éliminer le dernier  $\mathbf{e}$ , ce qui se fait en un temps moyen égal à  $\frac{1}{\alpha}$ . Comme la valeur de  $X_0$  est majorée par  $n/2$ , le temps moyen total pour converger est donc majoré par  $-\frac{\ln n - \ln 2}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$ . Comme pour le cas séquentiel, on obtient une borne inférieure en calculant le temps de convergence de la configuration  $(010)^m 0^l$  pour une taille de grille  $n = 3m + l$ , ce qui donne une minoration par  $-\frac{\ln n - \ln 3}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$  et clôt la preuve.  $\square$

On remarquera que cette borne nous fournit également par extension triviale le temps de convergence de la règle  $\mathbf{0}=\mathbf{EFGH}$  en régime asynchrone parallèle (ou séquentiel).

### 5.5.2 Règles linéaires

**Théorème 8.** *Le pire temps de convergence en moyenne des règles B et BC est  $\Theta(\frac{n}{\alpha})$ .*

*Preuve.* Le procédé de démonstration est le même que dans le cas séquentiel, il suffit simplement de remarquer que tant que le processus n'a pas atteint un point fixe, la configuration courante contient une cellule dans l'état  $\mathbf{0}$  instable. Le nombre de  $\mathbf{0}$  décroît donc en moyenne au moins d'une quantité  $\alpha$  à chaque pas de temps et on peut appliquer le lemme 8 pour obtenir une borne supérieure du temps de convergence. La borne inférieure est, obtenue par le calcul du cas une zone, qui est strictement identique au cas séquentiel dans le cas de la règle B (décroissance des 1-domaines unidirectionnelle d'au plus un à chaque pas de temps) et facilement obtenu dans le cas de la règle BC (décroissance bidirectionnelle des 1-domaines).  $\square$

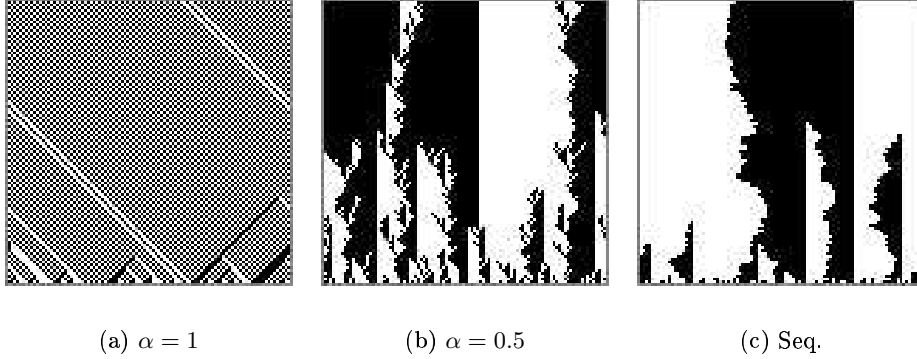


FIG. 5.9 – Diagrammes espace-temps de la règle BDEF. La même condition initiale est utilisée pour les trois diagrammes.

### 5.5.3 Règles quadratiques

**Théorème 9.** *Le pire temps de convergence en moyenne des règles BEG, BDEF et BDEG (shift) est  $\Theta(\frac{n^2}{\alpha(1-\alpha)})$ .*

*Preuve pour les règles BDEF et BDEG (shift).* Comme dans le cas séquentiel, on vérifie que la fonction  $X_t = 1(x^t)$  permet bien de définir une martingale. En particulier, dans le cas une zone, la probabilité pour  $X_t$  d’augmenter (resp. diminuer) de 1 est égale à  $\beta = \alpha(1 - \alpha)$ , on peut donc appliquer le lemme 10 en prenant  $\epsilon = \beta = \alpha(1 - \alpha)$ . Dans le cas où le nombre de zones est supérieure à 1, nous devons montrer que les hypothèses du lemme restent valables. A temps  $t$  fixé, notons  $p^+ = \Pr[\Delta X \geq 1] = \Pr[\Delta X \leq -1]$  la probabilité que  $X$  augmente de plus de 1. On a alors la relation  $p_0 = \Pr[\Delta X = 0] = 1 - 2p^+$  et pour montrer  $p^+ \geq \beta$ , il suffit de montrer  $p_0 \leq 1 - 2\beta$ . Pour cela, nous introduisons la “transformée en  $z$ ” de la variable aléatoire  $\Delta X$  qui se définit par :  $G_{\Delta X}(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Pr[\Delta X = i]z^i$ . Dans le cas où l’on a  $k$  zones, on peut écrire  $\Delta X = \sum_{i=1}^k \Delta X_i$ , où  $\Delta X_i$  correspondant à la contribution la zone d’indice  $i$ . Or, la loi de probabilité de  $\Delta X_i$  est donnée par :

$$\forall i, \Pr[\Delta X_i = j] = \begin{cases} \beta & \text{si } j = 1 \\ 1 - 2\beta & \text{si } j = 0 \\ \beta & \text{si } j = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut alors utiliser la propriété du produit de Cauchy de séries pour écrire :

$$\begin{aligned}
G_{\Delta X}(z) &= \sum_{i=-k}^k \Pr[\Delta X = i] z^i \\
&= \prod_{j=1}^k G_{\Delta X_j}(z) \\
&= \left( \frac{\beta}{z} + (1 - 2\beta) + \beta z \right)^k.
\end{aligned}$$

En posant  $z = e^{i\theta}$ , on peut alors calculer  $p_0$  comme le premier coefficient de Fourier de la fonction  $G_{\Delta X}(z)$  selon :

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{\Delta X}(e^{i\theta}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\beta + 2\beta \cos \theta)^k d\theta.
\end{aligned}$$

En remarquant que  $\beta \leq 1/4$ , on montre que la quantité  $(1 - 2\beta + 2\beta \cos \theta)$  est inférieure à 1 pour toute valeur de  $\theta$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned}
p_0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2\beta + 2\beta \cos \theta) d\theta \\
&\leq 1 - 2\beta,
\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir  $T_{\text{seq}} = \mathcal{O}[n^2]$ .

La preuve se clot en examinant le cas une zone. En particulier pour la règle BDEG (shift), on obtient :  $T_i = \frac{i(n-i)}{2\alpha(1-\alpha)}$ . □

Ce dernier théorème nous donne un moyen pour estimer le temps de convergence dans le cas asynchrone parallèle. En particulier, dans le cas une zone on voit que la convergence est la plus rapide pour  $\alpha = 1/2$ , et pour la configuration  $w_{50}$ , il vient  $T_{50} = 5000$ . Ce résultat théorique nous permet donc d'expliquer en partie les données expérimentales obtenues au chapitre sec :experimental. En effet, nous avons remarqué que certaines surfaces d'échantillonnage de la zone D (cf. partie 4.3.5 page 98) ont une forme "accidentée" et non reproductible (i.e., deux valeurs de  $\alpha$  et  $d_{\text{ini}}$  conduisent à deux valeurs de  $\rho_{\text{exp}}$  très différentes et non constantes). Nous pouvons maintenant expliquer cette forme par la conjonction de deux facteurs : (a)



Le temps moyen de convergence est supérieur au temps de transitoire  $T_{tr}$ . (b) D'autre part, on note que ces surfaces restent indéfinies même en attendant un temps infiniment long, puisque partant d'une configuration  $x_0$ , la probabilité d'atteindre l'attracteur  $*1*$  vaut  $X_0/n$  et la probabilité d'atteindre l'attracteur  $*0*$  vaut  $(1 - X_0)/n$  (cela découle du fait que  $X_t$  est une martingale). Cet automate n'est donc même pas robuste au sens local (cf. partie 4.2.1 page 77) : en partant d'une configuration donnée, deux histoires choisies aléatoirement peuvent conduire (avec une probabilité non nulle) à des orbites ayant des valeurs de  $\rho_{exp}$  très différentes.

On remarquera également que pour ces règles, il existe une discontinuité de comportement pour la valeur  $\alpha = 1$ . Ceci signifie que ces deux modèles ne sont pas robustes à l'introduction d'une petite quantité d'asynchronisme et donc que la propriété remarquable de conservation du nombre de 1 sont dues au parfait synchronisme des transitions.

*Preuve pour la règle BEG.* On obtient – comme il est d'usage – la borne inférieure par calcul du cas une zone : on peut montrer facilement que l'on a dans ce cas un processus de type II (cf. 9 page 116). Le cas avec plusieurs zones est traité avec un argument de couplage : à toute configuration  $x$  on associe une configuration  $y$  telle que  $y$  soit construite en transformant tous les 0-domaines de  $x$  sauf un en des 1-domaines (i.e., on se donne deux indices  $i$  et  $j$  avec  $i < j$  tels que  $x_{i-1} = x_{j+1} = 1$  et  $x_i = x_{i+1} = \dots = x_j = 0$  et on construit  $y$  telle que pour tout indice  $k$  de  $Q^n$ ,  $x_k$  vaut 0 si  $k \in \{i, \dots, j\}$  et 1 sinon).

En couplant  $x^t$  et  $y^t$ , on peut alors montrer que la convergence de  $y^t$  implique la convergence de  $x^t$ . Cela signifie que le temps de convergence du cas une zone majore le temps de convergence du cas général, ce qui clôt la preuve.  $\square$

## 5.6 Conclusion et perspectives

Cette partie nous a permis de traiter en partie le problème de l'étude du comportement des automates cellulaires à l'aide d'outils analytiques. En nous restreignant aux automates doublement quiescents dans le cas de la dynamique séquentielle, nous avons pu quantifier les temps de convergence en utilisant la propriété centrale de décroissance du nombre de domaines. Dans le cas de la dynamique parallèle, cette propriété n'est plus valable. Les résultats peuvent néanmoins être transposés dans les cas où la propriété de décroissance du nombre de zones reste valide ou dans le cas où la méthode de couplage s'applique encore.

Les questions qui se posent naturellement à ce stade consistent principalement à déterminer dans quelle mesure les méthodes utilisées peuvent s'étendre :

- Que peut-on dire pour des voisinages de rayon plus grand que 1 ? En effet ; lorsque le voisinage n'est plus constitué des voisins immédiats, la propriété de quiescence des états ne suffit plus à assurer que la non-croissance du nombre de zones. On pourrait requérir une condition plus forte comme le fait que l'état d'une cellule après transition doit nécessairement faire partie de l'ensemble des états immédiatement voisins de cette cellule.<sup>4</sup>
- Que peut-on dire lorsque le nombre d'états est supérieur à 2 ? On souhaiterait en effet savoir si le fait d'augmenter le nombre d'états permet d'observer des phénomènes nouveaux ou si les classes ici définies sont stables.
- Que peut-on dire dans le cas de la dimension 2 ? On perçoit en effet que le cas bidimensionnel ouvre de nouvelles possibilités pour les mouvements des frontières (par exemple la forme spirale) et est sans doute bien plus riche que le cas unidimensionnel.

Par ailleurs, le codage des règles à l'aide du code de transition a montré toute son utilité dans cette étude. On pourrait également se demander comment étendre ce codage dans le cas où l'on a plusieurs états : est-il encore possible de garder une forme pratique du code dans lequel les symétries sont obtenues facilement ?

Une autre question importante est de trouver des conditions suffisantes qui assureraient que le comportement obtenu en séquentiel "passe" au cas asynchrone parallèle. Si par ailleurs, on peut assurer que certaines propriétés sont conservées pour toutes les valeurs du taux d'asynchronisme, on pourra alors démontrer la validité de certaines propriétés des automates classiques synchrones en les considérant comme des cas particuliers d'automates asynchrones.

Néanmoins, il est probable qu'une telle extension du cas séquentiel au cas synchrone ne pourra se faire que pour un nombre restreint d'automates. Le chapitre suivant, consacré à l'étude des transitions de phase, nous montrera qu'il se produit des phénomènes de nature sensiblement différente dans le cas asynchrone, apportant ainsi une limite à la portée des méthodes analytiques que nous venons de développer.

---

<sup>4</sup>Une telle condition pourrait s'interpréter comme l'impossibilité de transmettre de l'information à une vitesse supérieure à une cellule par unité de temps. On notera la proximité de cette condition avec celle qui définit les automates captifs introduits par Theyssier [The04].

L'étude expérimentale des automates cellulaires élémentaires a permis de mettre en évidence que des changements brutaux de comportement se produisaient lors de la variation du taux de synchronisme. Le but de ce chapitre est d'éclaircir la nature de ce comportement : existe-t-il un comportement asymptotique du type "transition de phase" ou s'agit-il d'un phénomène qui ne peut être observé que pour les valeurs particulières que nous avons choisies lors des mesures ? Nous examinons dans un premier temps l'ensemble des automates cellulaires élémentaires pour lesquels on a identifié la présence d'un changement brutal de comportement. Nous présentons des données détaillées de ce comportement et nous testons l'hypothèse de l'appartenance de ce changement de phase à la classe d'universalité de la percolation dirigée.

Dans un second temps, nous examinons un phénomène similaire de changement brutal survenant dans le cas du Jeu de la Vie. Cet automate cellulaire permet d'observer une discontinuité de comportement en fonction du taux de synchronisme et montre aussi un changement lié à la valeur de la densité initiale choisie. Ces phénomènes sont mesurés en introduisant des modifications aléatoires de la topologie (i.e., des liens entre cellules) ce qui nous permet d'avoir une première idée de l'importance de l'hypothèse de régularité de la grille dans le fonctionnement d'un automate cellulaire.

## 6.1 Transitions de phase des automates cellulaires élémentaires

La notion de transition de phase provient du vocabulaire de la thermodynamique. L'exemple de changement de phase le plus couramment rencontré est celui de la transformation d'un corps sous forme solide, liquide ou gazeuse en fonction de la température à laquelle il est soumis. Dans ce cas, on constate qu'il existe des températures, dites *températures de changement d'état*, pour lesquelles des valeurs physiques des corps, telles que la densité, la chaleur massique, etc., sont discontinues en fonction de la température : on parle alors de transition de phase *du premier ordre*.

On peut également citer l'expérience qui consiste à chauffer un corps

magnétisé : on observe que la magnétisation de ce corps décroît au fur et à mesure qu'il est chauffé et finit par s'annuler totalement à partir d'une température critique dite *température de Curie*. Ce phénomène peut s'expliquer à l'aide d'un modèle très proche d'un automate cellulaire probabiliste qui est le *modèle d'Ising*. Dans sa version la plus simple, ce modèle décrit le corps magnétique comme un arrangement régulier de micro-domaines magnétiques, les *spins*, qui peuvent être orientés soit vers le haut, soit vers le bas. L'orientation des spins suit alors deux contraintes opposées. D'une part, les spins tendent à s'aligner dans le même sens que le sens pris par leurs voisins ; ceci tend à homogénéiser l'alignement des spins et crée la magnétisation du corps. D'autre part, l'agitation thermique oriente un spin aléatoirement avec une force qui croît avec la température ; ceci a pour effet de désorganiser localement les spins et à supprimer la magnétisation. On constate alors que la valeur de la magnétisation (ainsi que celle d'autres paramètres physiques macroscopiques) varie de façon continue jusqu'à la température critique puis s'annule au-delà. On a donc une fonction qui varie de façon continue mais dont la dérivée varie de façon discontinue : on parle alors de transition de phase *du second ordre*. Le modèle d'Ising permet de calculer analytiquement la valeur de la température critique ainsi que la façon dont les domaines sont organisés en fonction de la température. En particulier, la thermodynamique statistique permet de prévoir qu'à la température critique, la figure observée est auto-similaire (i.e., elle est invariante par changement d'échelle). De plus, on peut décrire précisément la valeur de plusieurs paramètres macroscopiques au voisinage du seuil critique : ils suivent des lois de puissance en  $T^\alpha$  où  $\alpha$  est appelé *exposant critique*.

Les physiciens ont constaté que de nombreux modèles qui décrivent des transitions de phase sont *robustes* dans le sens où des changements "raisonnables" de définition du modèle conduisent toujours à observer le même type de transition de phase avec les mêmes valeurs des exposants critiques. Par exemple, dans le cas du modèle d'Ising, on observera le même type de comportement si l'alignement des spins se fait en fonction de quatre, six (grille hexagonale) ou huit plus proches voisins. Ceci a conduit à introduire la notion *de classe d'universalité* qui désigne l'ensemble des phénomènes qui sont décrits par un même type de transition de phase avec des mêmes valeurs d'exposants critiques. Notre but est donc, en ce qui concerne les automates cellulaires qui présentent une discontinuité, d'examiner s'il existe une classe d'universalité qui convienne à la description de leur changement de comportement.

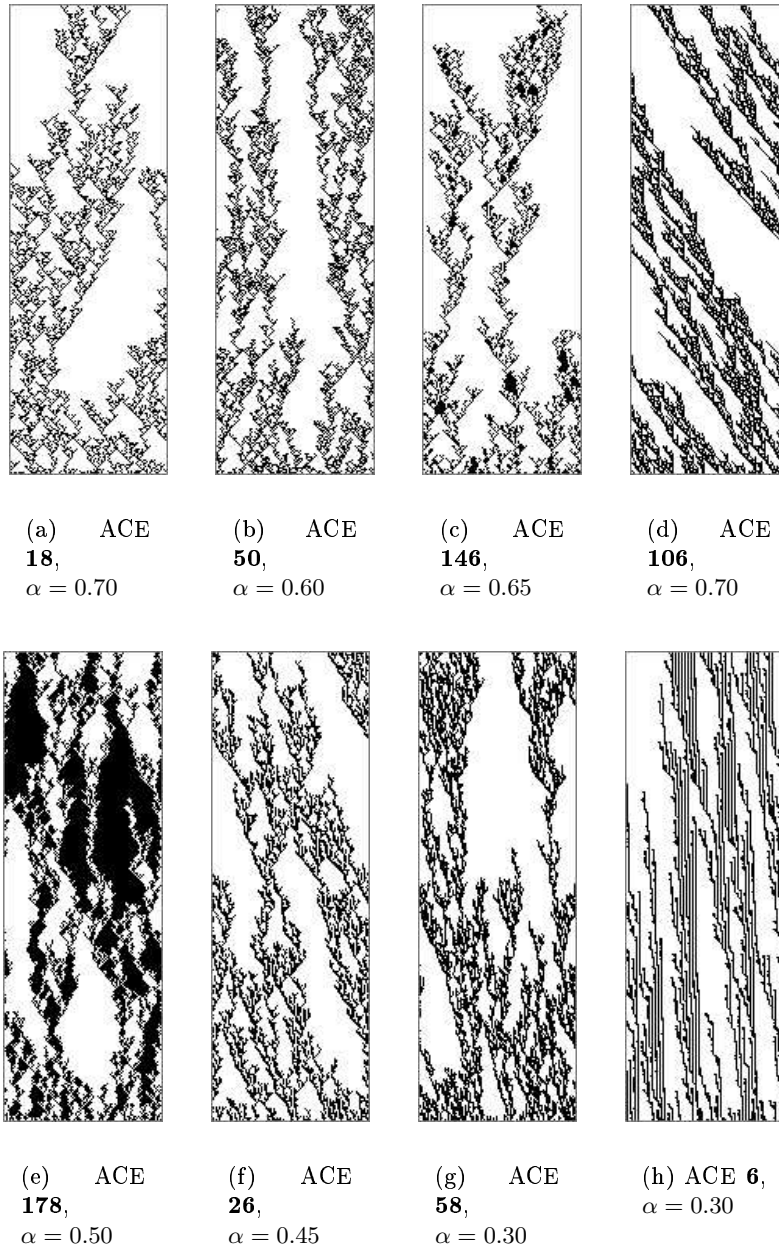


FIG. 6.1 – Diagrammes Espace-temps des règles faisant apparaître une transition de phase du second ordre. Le taux de synchronisme  $\alpha$  est choisi au voisinage du seuil critique.

### 6.1.1 Classe d'universalité de la percolation dirigée

On rappelle que les règles pour lesquelles une transition de phase avait été observée pour des valeurs du taux de synchronisme  $\alpha > 1$  forment la classe SPT et correspondent aux codes  $\{\mathbf{18}, \mathbf{26}, \mathbf{50}, \mathbf{58}, \mathbf{106}, \mathbf{146}, \mathbf{178}\} = \{\mathbf{BCEFGH}, \mathbf{BCEGH}, \mathbf{BCDEFGH}, \mathbf{BCDEGH}, \mathbf{BDEH}, \mathbf{BCEFG}, \mathbf{BCDEFG}\}$ ; auquel il faut rajouter la règle  $\mathbf{6} = \mathbf{BFGH}$ . On remarquera que pour tous ces automates, sauf  $\mathbf{178}$ , l'état 0 est quiescent et que pour l'automate  $\mathbf{178}$ , les deux états sont quiescents.

La figure 6.1) montre qu'au voisinage du seuil critique, tous les diagrammes espace-temps de ces règles font apparaître une structure branchée dans laquelle les branches peuvent se diviser ou mourir. Ce type de phénomène fait penser à de la percolation dirigée.

Selon Pajot [Paj01], le premier processus de percolation a été étudié physiquement par Flory (en 1941) et Stockmayer (en 1943) pour décrire le phénomène de polymérisation de molécules ramifiées. Le problème est défini mathématiquement par Broadbent dans le problème qui consiste à étudier la pénétration d'un fluide ou d'un gaz dans un labyrinthe comportant des passages fermés ou ouverts. Le terme de "percolation" est pour la première fois utilisé par Broadbent et Hammersley dans un article fondateur [SJ57] où la percolation est définie comme le modèle dual de celui de la diffusion. En effet, alors que la problème de la diffusion consiste à savoir comment évolue un fluide aux mouvements aléatoires dans un milieu fixe (et régulier), le problème de la percolation consiste à étudier comment évolue un fluide aux mouvements déterministes dans un milieu aléatoire. Le concept de *percolation dirigée* a été originellement utilisé en physique pour décrire la possibilité pour un fluide évoluant dans une direction privilégiée de traverser un milieu poreux. L'exemple étudié par Broadbent et Hammersley est celui de la fabrication d'un masque à gaz : le gaz traverse un milieu formé de granules de carbone poreux qui permet de filtrer le gaz. Si ces granules sont bien espacés les uns des autres, le gaz peut passer. En revanche, s'ils sont trop resserrés, le gaz est bloqué et le filtre ne peut plus remplir sa fonction. Comme on cherche à maximiser le contact entre granules et gaz, le problème consiste à déterminer précisément où se situe le seuil critique de blocage du gaz. Un autre exemple qui explique l'étymologie du terme "percolation" est celui du café : ici c'est la pression du filtre qui joue le rôle de paramètre critique : on cherche à la maximiser pour accroître la "force du café" (contact eau-café) mais si celle-ci est trop forte, l'eau ne peut plus traverser le filtre. De nombreuses autres situations peuvent être évoquées et le lecteur peut consulter les travaux de Pajot [Paj01] et Hinrichsen [Hin00a, Hin00b] pour des exem-

ples de l'utilisation du modèle de percolation (dirigée ou non) en physique, chimie, biologie ou en économie.

Formellement, on définit le phénomène de percolation dirigée comme un type particulier de processus stochastique discret. Ce processus se déroule sur une grille formée de sites disposés en ligne (de taille infinie) et régulièrement espacés. Chaque site peut avec une certaine probabilité  $p$  établir un lien avec les sites voisins situés dans la ligne du dessous. L'ensemble de sites connectés par ces liens est appelé un *amas* (“*cluster*”). On dit que le processus suit une loi de percolation s'il existe un seuil  $p_c$ , dit *seuil critique*, pour lequel la probabilité de voir un amas de taille infinie est nulle pour un seuil  $p < p_c$  et est non-nulle pour  $p > p_c$ . Intuitivement, on perçoit bien que la taille moyenne d'un amas va croître au fur et à mesure que  $p$  augmente, le seuil critique représente la valeur de  $p$  pour laquelle cette taille diverge.

Dans le cas qui nous concerne, un amas sera défini par l'ensemble des cellules qui ont été au moins une fois dans leur histoire à l'état 1. Cette notion se définit de la même façon en deux dimensions ou plus.

### 6.1.2 Caractéristiques de la percolation dirigée

Une caractéristique de la classe d'universalité de la percolation dirigée est que, quel que soit le phénomène considéré, la densité de “sites actifs”  $d_{ac}$  varie en fonction de la probabilité  $p$  d'établir un lien selon la relation :

$$d_{ac} \sim (p - p_c)^\beta.$$

pour  $p$  qui tend vers  $p_c$  par valeurs supérieures. Il est à noter que cette notion de “site actif” n'est pas définie formellement. Dans le cas des automates cellulaires 0-quiescents, on peut par exemple choisir de prendre le ratio de cellules dans l'état 1 ou le ratio de cellules dans un état instable (i.e. où l'application de la règle locale conduit à un changement d'état)<sup>1</sup>. On sait également qu'au voisinage du seuil de transition, la “largeur” moyenne des amas  $\xi_\perp$  (on parle également de longueur de corrélation spatiale) varie comme :

$$\xi_\perp \sim |p - p_c|^{-\nu_\perp},$$

---

<sup>1</sup>On trouve également la dénomination de “paramètre d'ordre” pour ces paramètres macroscopiques qui caractérisent la transition de phase. Dans le cas général d'une transition de phase avec brisure de symétrie (théorie de Landau), on appelle *paramètre d'ordre* toute quantité (un scalaire, un vecteur, un tenseur, etc.) dont le passage d'une valeur non nulle à une valeur nulle traduit le changement de phase.

exposant	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 4$
$\beta$	0.276486(8)	0.584(4)	0.81(1)	1
$\nu_{\perp}$	1.096854(4)	0.734(4)	0.581(5)	1/2
$\nu_{\parallel}$	1.733847(6)	1.295(6)	1.105(5)	1

TAB. 6.1 – Valeurs des exposants critiques pour les transitions de phase appartenant à la classe d’universalité de la percolation dirigée. Les valeurs sont reproduites d’après la synthèse de Hinrichsen [Hin00a], les parenthèses indiquent l’incertitude sur la valeur du dernier chiffre.

et que la “longueur” moyenne des amas  $\xi_{\parallel}$  (on parle également de longueur de corrélation temporelle) varie comme :

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{-\nu_{\parallel}}.$$

La classe de la percolation dirigée se caractérise par les valeurs des exposants critiques indiqués sur la table 6.1. Il est à noter que les valeurs de ces exposants ne sont pas connues analytiquement et que leur calcul pour les dimensions 1, 2 et 3 reste à ce jour un problème ouvert important dans la théorie des transitions de phase du second ordre. On remarquera également le comportement singulier du phénomène pour des dimensions supérieures à trois : les valeurs des exposants critiques ne varient plus avec la dimension et sont connues analytiquement<sup>2</sup>.

### 6.1.3 Protocole expérimental

Pour tester la validité de l’hypothèse de la percolation dirigée, nous allons nous restreindre à la mesure de l’exposant critique  $\beta$ . Idéalement, il faudrait aussi mesurer les deux autres exposants critiques mais nous suivrons la démarche adoptée par la majorité des auteurs qui, en général, se contentent de calculer la valeur de l’exposant critique  $\beta$ .

Pour calculer cet exposant critique, nous mesurons la densité moyenne asymptotique  $\rho_{\text{exp}} = f(\alpha)$  en prenant toujours une configuration aléatoire de densité initiale  $d_{\text{ini}} = 1/2$ . La valeur de  $\rho_{\text{exp}}$  est obtenue avec le même protocole qu’au chapitre 4 en laissant le système évoluer pendant un temps de transitoire  $T_{\text{tr}}$  puis en mesurant la valeur moyenne du paramètre densité pendant un temps  $T_{\text{ech}}$ .

<sup>2</sup>La dimension  $d = 4$  est appelée *dimension critique*. Pour une explication détaillée de cette discontinuité de comportement vis-à-vis de la dimension, nous renvoyons à [FHL01] et [Hin00a].



Pour assurer la validité des données, nous devons être capables d'évaluer l'influence des paramètres  $n$ ,  $T_{\text{tr}}$  et  $T_{\text{ech}}$  sur la stabilité des résultats.

### Contraintes dues au cas fini

La difficulté qui se pose pour montrer expérimentalement qu'une transition de phase appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée est que les mesures se font en taille finie. On ne peut donc qu'extrapoler, par passage à la limite le comportement en taille infinie. De plus, ce dernier passage est délicat : il est arrivé à plusieurs reprises [Hol03, GKvdT84, Gra99] que les observations en taille finie conduisent à des conclusions fausses. En effet, aux fluctuations de mesures dues à l'aspect probabiliste viennent souvent s'ajouter des erreurs systématiques qui faussent les résultats dans un sens prédéterminé. Les analyses statistiques peuvent détecter les fluctuations des mesures car celles-ci apparaissent sous forme d'un bruit qui s'ajoute à une fonction régulière. En revanche, il est plus difficile d'identifier les erreurs systématiques et seule une compréhension approfondie du phénomène que l'on étudie permet de les identifier.

Dans le cas qui nous concerne, nous choisissons de tracer la fonction  $\rho_{\text{exp}} = f(\alpha)$  une valeur de  $\rho_{\text{exp}}$  en partant d'une *unique* condition initiale à  $\alpha$  fixé. Or, ces valeurs sont variables d'une expérience à l'autre en raison du choix de l'histoire et du choix de la condition initiale; on ne peut donc pas affirmer que la fonction obtenue représente fidèlement le comportement attendu pour des grilles de taille infinie. Pour se rapprocher du comportement asymptotique, on peut par exemple prendre plusieurs configurations initiales pour chaque valeur de  $\alpha$  et à associer à  $\rho_{\text{exp}}$  la moyenne des valeurs mesurées. Les variations de  $\rho_{\text{exp}}$  en fonction de la configuration initiale et de l'histoire peuvent alors être représentées, comme c'est généralement le cas en physique, sous forme de barres d'erreur centrées sur les points de la courbe. Néanmoins, nous estimons que cette méthode traduirait mal ce qui se passe réellement dans le système.

En effet, il arrive que pour des valeurs de  $\alpha$  sur-critiques proches de  $\alpha_c$ , le système atteigne  $*0*$  par le jeu des fluctuations. Or  $*0*$  étant un état absorbant, le système reste dans cet état alors qu'on se trouve bien en régime sur-critique : on peut parler d'une "mort prématurée" du système qui est uniquement due au fait que les observations se font sur des systèmes de taille finie<sup>3</sup>. Nous préférons donc reprendre la même démarche que dans le

---

<sup>3</sup>Une solution possible pour pallier ce problème consisterait à introduire un faible niveau de bruit qui permettrait au système de "repartir". Néanmoins nous n'avons pas souhaité essayer cette méthode afin de ne pas introduire de degré de complexité supplémentaire

cas du tracé des surfaces d'échantillonnage (cf. partie 4.1 page 76) : plutôt que d'effectuer une moyenne, nous choisissons de prendre un pas très fin pour l'échantillonnage de  $\alpha$ . Les fluctuations qui apparaissent peuvent alors être évaluées en fonction de la régularité de la fonction : si celle-ci est "lisse", on évalue un bruit faible alors que si elle prend un aspect "accidenté" on sait que le phénomène étudié est très variable puisque deux valeurs de  $\alpha$  proches conduisent à des valeurs mesurées différentes.

L'allure des courbes  $\rho_{\text{exp}} = f(\alpha)$  est montré sur la figure 6.2 pour des valeurs de  $n$  allant de 50 à 10000.

On notera tout d'abord que la forme des courbes est similaire pour l'ensemble des automates à l'exception des ACE **6** et **178**. Par rapport aux autres automates, l'ACE **6** semble "inversé" puisque le passage du régime sous-critique au régime sur-critique se fait en faisant *augmenter* le taux de synchronisme. En ce qui concerne, l'ACE **178**, on constate que le passage de l'état sur-critique à l'état sous-critique se traduit par des oscillations autour de la valeur moyenne  $d = 0.5$ . *A priori*, il semble que la transition de phase de cet automate n'appartienne pas à la classe d'universalité de la percolation dirigée et nous l'excluons donc de la suite de l'étude.

### Choix de la valeur des paramètres du protocole expérimental

Un examen détaillé des courbes montre que, conformément à ce qui est attendu, plus  $n$  augmente et plus la courbe obtenue est "lisse". Ceci s'explique facilement par le fait que les fluctuations de la densité deviennent plus faibles lorsque le nombre de cellules augmente (lois des grands nombres). Le phénomène de "mort prématurée" est nettement visible sous forme de "décrochages" de la courbe. On observe que pour les temps de transitoire et d'échantillonnage choisis, les courbes semblent converger vers une courbe "limite" et que les phénomènes de "mort prématurées" ne sont plus observées pour des tailles d'anneau supérieures à 100.

Afin d'évaluer l'influence des paramètres  $T_{\text{tr}}$  et  $T_{\text{ech}}$ , nous avons reproduit l'expérience précédente du calcul de la courbe  $\rho_{\text{exp}} = f(\alpha)$  en faisant changer le temps de transitoire  $T_{\text{tr}}$  pour des valeurs allant de  $T_{\text{tr}} = 100$  à  $T_{\text{tr}} = 50000$ . Nous avons constaté que pour des tailles de grille  $n < 500$  l'accroissement de  $T_{\text{tr}}$  n'est pas nécessairement bénéfique en terme de qualité des courbes. En effet, pour des valeurs de  $\alpha$  proches de  $\alpha_c$ , on observe plusieurs discontinuités de la fonction  $\rho_{\text{exp}}$  (très probablement dues aux "morts prématurées"). En

---

dans l'analyse du protocole expérimental : il faudrait en effet savoir régler ce niveau de bruit de façon suffisamment fine pour éviter les "morts prématurées" tout en gardant la possibilité d'avoir des courbes de bonnes qualité.

revanche, on n’observe aucune de ces discontinuités pour des tailles de grilles supérieures à  $n = 500$ . Ceci indique que le temps de transitoire doit être ajusté en fonction de la taille de l’anneau : si  $T_{tr}$  est trop faible, l’erreur systématique due au fait qu’on observe en temps fini est trop grande car on ne s’est pas suffisamment rapproché de la situation idéale “d’équilibre thermodynamique”. A l’inverse, si la valeur de  $T_{tr}$  est trop grande, on prend le risque de voir le système atteindre l’attracteur  $*0*$  alors qu’il est en régime sur-critique. En ce qui concerne le temps d’échantillonnage  $T_{ech}$ , nous n’avons pas constaté d’influence notable sur la qualité des courbes à partir de  $T_{ech} > 1000$ .

#### 6.1.4 Détermination des seuils critiques

L’examen direct de courbes  $\rho_{exp} = f(\alpha)$  ne permet pas de déterminer les valeurs du seuil critique  $\alpha_c$  avec suffisamment de précision. En effet, le calcul de  $\beta$  impose de faire une régression en calculant les valeurs des trois paramètres  $\alpha_c$ ,  $\beta$  et  $C$  à partir de la fonction  $\rho_{exp} = C \cdot (\alpha - \alpha_c)^\beta$ . Une telle régression peut effectivement s’effectuer à l’aide de méthodes numériques appropriées<sup>4</sup> mais on constate expérimentalement que cette méthode donne des résultats trop imprécis.

Pour obtenir la valeur de  $\beta$  nous avons suivi la méthode utilisée par Grassberger [Gra99] qui consiste à mesurer la valeur du seuil critique  $\alpha_c$  de façon indépendante puis d’utiliser cette valeur pour effectuer la régression sur les deux paramètres  $C$  et  $\beta$ . La première partie de la méthode consiste à obtenir la courbe  $d(t)$  de la densité en fonction du temps pour une condition initiale aléatoire de densité  $1/2$ . La théorie prévoit en effet que pour le régime critique ( $\alpha = \alpha_c$ ), la valeur  $d(t)$  varie selon la loi de puissance :  $d(t) = d_0 \cdot t^{-\delta}$ , avec  $\delta \sim 0.1595$ . La représentation en échelle logarithmique de la fonction  $d(t)$  donne donc une droite de pente  $-\delta$ . Par ailleurs, on sait qu’en régime sous-critique, la fonction décroît plus rapidement qu’en régime critique et qu’en régime sur-critique, la fonction décroît plus lentement qu’en régime critique. Ceci indique que les courbes en représentation logarithmique sont concaves pour  $\alpha < \alpha_c$  (régime sous-critique) et convexes pour  $\alpha > \alpha_c$  (régime sur-critique). Nous avons donc, pour chaque automate, tracé les courbes  $d(t)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et déterminé  $\alpha_c$  en fonction du changement de concavité des courbes<sup>5</sup>. Les résultats obtenus sont présentés sur la table 6.2.

<sup>4</sup>Nous avons utilisé les méthodes numériques de régression du logiciel GnuPlot.

<sup>5</sup>Nous partons toujours d’une densité initiale  $d = 1/2$ , la concavité des courbes doit donc être estimée après un certain temps de transition.

ACE	6	18	26	50	58	106	146
$\alpha_c$	0.282	0.713	0.475	0.627	0.336	0.814	0.674

TAB. 6.2 – Valeurs du taux de synchronisme critique  $\alpha_c$  pour les règles étudiées. le dernier chiffre est incertain (la précision est estimée à  $\pm 0.005$ ).

ACE	6	18	26	50	58	106	146
$\beta$	0.274	0.265	0.267	0.281	0.275	0.247	0.278
$\Delta\beta$	0.007	0.013	0.007	0.003	0.010	0.027	0.008

TAB. 6.3 – Valeurs de l'exposant critique  $\beta$  et intervalle d'incertitude  $\Delta\beta$  obtenu lors de la régression linéaire.

Disposant des valeurs approchées de  $\alpha_c$ , nous pouvons maintenant déterminer  $\beta$  à l'aide des régressions. Les résultats sont présentés dans le tableau 6.3. Ils ont été obtenus pour des valeurs  $T_{tr} = 50000$ ,  $T_{ech} = 1000$ ,  $n = 1000$ , un pas d'échantillonnage de  $\alpha_{stp} = 0.002$ .

On constate que les valeurs mesurées sont proches de la valeur attendue de  $\beta_{th} \sim 0.276$ . Il est important de noter que l'incertitude sur  $\beta$  est l'incertitude lors de la régression ; elle ne prend donc pas en compte les erreurs systématiques dues aux effets de taille finie. Notons par ailleurs que l'intervalle de  $\alpha$  pour lequel la régression est effectué est choisi de manière empirique. Nous ne savons pas à ce jour comment justifier du choix de l'intervalle.

Ces résultats préliminaires suggèrent que pour sept des huit automates examinés, le changement de comportement observée est bien une transition de phase, et que elle appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Néanmoins, ces mesures doivent être précisées afin de confirmer cette hypothèse avec un plus grand degré de certitude. Dans cette optique, il est nécessaire d'obtenir une précision bien plus grande pour la mesure des seuils critiques  $\alpha_c$ . Nous devons également étudier le phénomène plus en détail de manière à pouvoir estimer quantitativement l'importance des erreurs systématiques.

En ce qui concerne le cas isolé de l'automate **178**, la singularité de son comportement peut s'expliquer à l'aide de l'hypothèse suivante : il s'agit du seul automate qui est doublement quiescent pour lequel les deux états 0 et 1 sont deux états absorbants (i.e., les 1-domaines disparaissent sur un fond de 0 et vice-versa). En effet, contrairement aux autres automates pour lesquels les 1-domaines sont de faible taille, on observe pour l'ACE **178** une distribution équilibrée des deux types de domaines. A l'appui de cette hypothèse, nous indiquons que l'étude théorique des transitions de phase

montre que le nombre d'états absorbants d'un système est une donnée fondamentale (cf. [GKvdT84, Hin00a] par exemple). En présence de deux états absorbants symétriques, la classe d'universalité de la transition de phase peut être celle de la *percolation dirigée  $\mathbb{Z}_2$ -symétrique*. L'allure des diagrammes espace-temps de la règle **178** et la forme des amas obtenus pour cette classe (cf. [Hin00a]) de transitions de phase sont très proches. Nous disposons donc là aussi d'une autre piste à explorer.

Afin d'aller plus loin dans l'étude de la robustesse, nous examinons maintenant le cas du Jeu de la Vie pour lequel on a également constaté une transition de phase du second ordre.

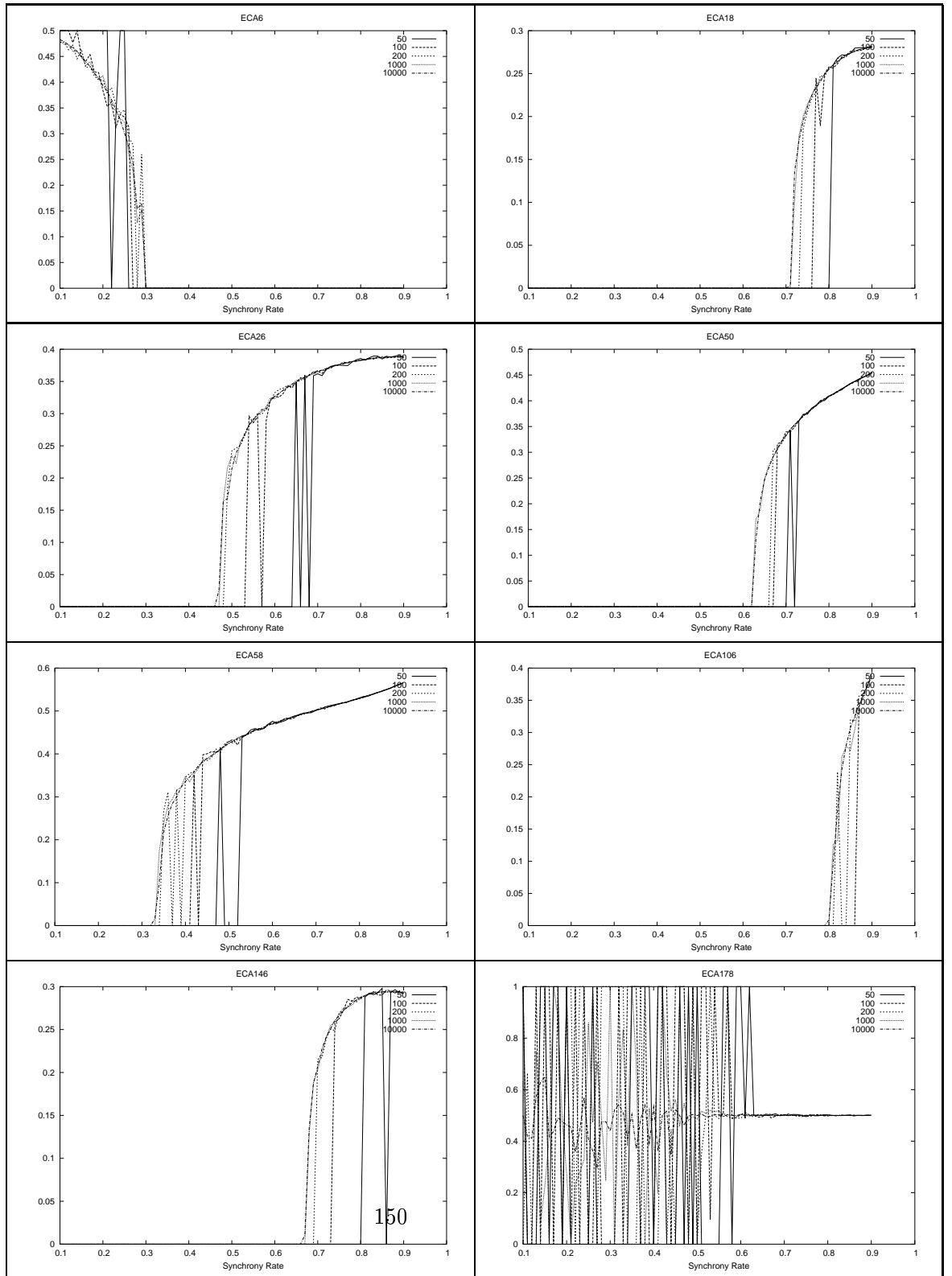


FIG. 6.2 – Densité moyenne en fonction du taux de synchronisme  $\alpha$  pour les automates cellulaires élémentaires présentant une transition de phase du second ordre. Les courbes représentent les mesures pour différentes valeurs de  $n$  avec  $T_{tr} = 10000$ ,  $T_{ech} = 1000$  et  $d_{ini} = 0.5$ .

## 6.2 Transitions de phase du Jeu de la Vie

Nous allons dans ce paragraphe étudier le Jeu de la Vie dans un cadre plus général que le modèle classique en ajoutant de l'asynchronisme et des modifications de topologie de manière simultanée.

### 6.2.1 Perturbations de topologie

On rappelle qu'en deux dimensions, le voisinage de Moore d'une cellule  $c$  de  $\mathcal{U} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est défini comme l'ensemble des cellules situées à une distance 1 de  $c$  au sens de la norme 1 (cf. définition 9 page 19).

Nous introduisons maintenant la notion de voisinage perturbé pour lequel on associe à toute cellule  $c$  le voisinage  $V_P(c)$  obtenu en examinant toutes les cellules de l'ensemble  $V(c)$  et en supprimant une cellule de  $V(c)$  avec une probabilité  $E^-$ , appelée *taux de liens manquants*.

Cette perturbation correspond à la modélisation du fait qu'une cellule peut ne pas "voir" une de ses voisines. Il existe d'autres façons de perturber la topologie d'un automate cellulaire, le cas le plus employé étant sans doute celui de la redirection de liens où on applique des constructions de graphe de type graphe "petit monde" [SV02]. Dans le cas des perturbations avec suppression de lien, il est important de noter que la localité des interactions est conservée : cette façon d'opérer permet de garantir que seules des cellules proches se retrouvent dans un même voisinage.

Le Jeu de la Vie est alors défini sous forme de règle totalisante-externe (cf. définition 30 page 29) selon :

$$f(0, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{règle de naissance})$$

et

$$f(1, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{2, 3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{règle de survie})$$

où  $i$  représente le nombre de cellules de  $V(c)$  se trouvant dans l'état 1.

Cette définition permet d'appliquer le Jeu de la Vie pour des voisinages de taille quelconque et on voit que d'après la définition que nous avons donné, une définition équivalente du Jeu de la Vie avec perturbations de topologie serait de considérer les cellules "manquantes" comme des cellules qui renvoient toujours l'état 0.

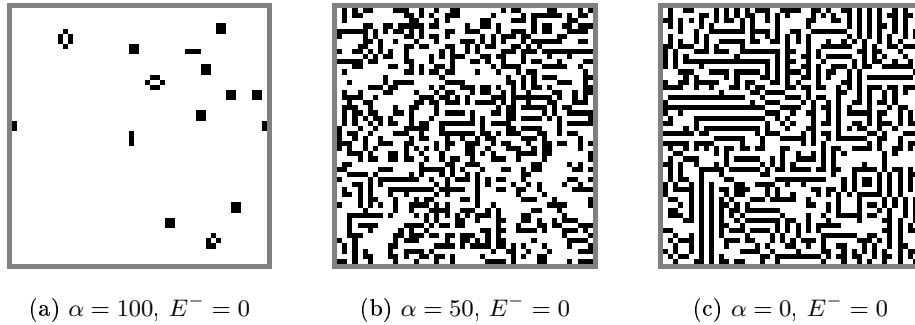


FIG. 6.3 – Exemple de configurations du jeu de la vie pour  $n = 50$  obtenue à un temps  $t = 1000$ . (a) Dynamique synchrone : le système a atteint un point fixe de faible densité. (b) Dynamique asynchrone  $\alpha = 0.50$  : le système a atteint un état stationnaire. (c) Dynamique séquentielle : le système a atteint un état stationnaire (après 1000 passes de  $n^2 = 2500$  pas de calcul chacun). Les conditions initiales sont aléatoires de paramètre densité initiale  $1/2$ .

### 6.2.2 Premières observations

Les variations de comportement lors de l’ajout d’asynchronisme sont illustrées sur la figure 6.3. On voit que le passage de la dynamique synchrone à la dynamique asynchrone produit un changement qualitatif de comportement. En dynamique synchrone, le système converge lentement vers des cycles (éventuellement dégénérés en points fixes). L’attracteur est de faible densité (i.e., inférieur à 0.1) et il est constitué de zones qui n’interagissent pas entre elles. Ces zones peuvent être constituées de motifs qui sont fixes ou de motifs qui clignotent (“cycles locaux” de longueur 2), les cycles de longueur supérieure à 2 étant rarement observés. Ce type d’attracteur est appelé la phase *inactive-dispersée* (“inactive-sparse” dans [HZTJ03]). En dynamique asynchrone, pour des taux de synchronisme  $\alpha$  inférieurs à 0.90, nous observons un comportement tout autre. Le système ne semble pas converger ; il se maintient dans un état stationnaire où des lignes parallèles de faible longueur semblent se former. Ce type d’attracteur est appelé la phase *labyrinthe* (“labyrinth phase” dans [KA86, HZTJ03] et “overcrowding” dans [MA97]). Nous verrons dans la suite comment nous caractérisons ces deux phases.

La figure 6.4 montre l’évolution du comportement en dynamique synchrone lorsqu’on ajoute des perturbations. Nous voyons qu’il n’y a pas de



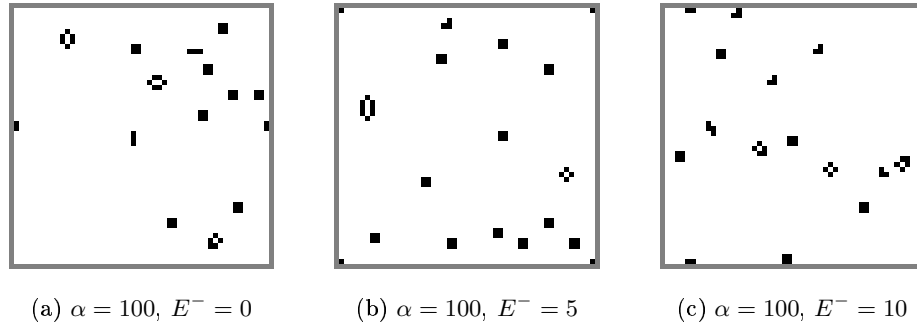


FIG. 6.4 – Exemples de configurations limites du jeu de la vie pour la dynamique synchrone et  $E^-$  variable.

changement qualitatif observable (en termes d'attracteurs). On peut néanmoins noter que le système atteint plus rapidement un cycle dans le cas où l'on augmente le taux de perturbation  $E^-$  : pour  $n = 50$ , dans le cas de la topologie régulière, il est fréquent d'observer des transitoires de longueur supérieure à  $t = 1000$  alors que pour  $E^- \geq 0.05$ , le système semble toujours converger en moins de  $t = 100$  pas.

L'effet des variations conjointes du taux de synchronisme  $E^-$  et du taux de liens manquants  $E^-$  est montré sur la figure 6.5. On peut observer que pour  $E^- = 0$ , la transition entre la phase inactive-dispersée et la phase labyrinthe se produit pour des valeurs du taux de synchronisme comprises dans l'intervalle  $[0.75, 0.90]$ . Lorsqu'on augmente le taux de liens manquants, pour  $E^- = 0.05$ , on voit que la transition a lieu dans l'intervalle  $[0.50, 0.75]$ . Enfin, on constate que pour  $E^- = 0.10$ , la transition de phase n'est plus observable. Nous voyons donc qu'il existe un lien étroit entre la topologie et le synchronisme des transitions dans le comportement du Jeu de la Vie ; dans le prochain paragraphe, nous examinons ces liens de manière plus détaillée.

### 6.2.3 Approche quantitative

Pour détecter l'apparition de la phase de "labyrinthe", nous souhaitons également utiliser un paramètre macroscopique. Les observations montrent que les configurations de la phase de labyrinthe contiennent plus de 1 que les configurations de la phase inactive-dispersée. Aussi, nous reprenons la densité moyenne  $\tilde{\rho}$  (cf définition 37 page 77) comme paramètre macroscopique de caractérisation du changement de phase.

La figure 6.6 montre comment les surfaces d'échantillonnage se modifient

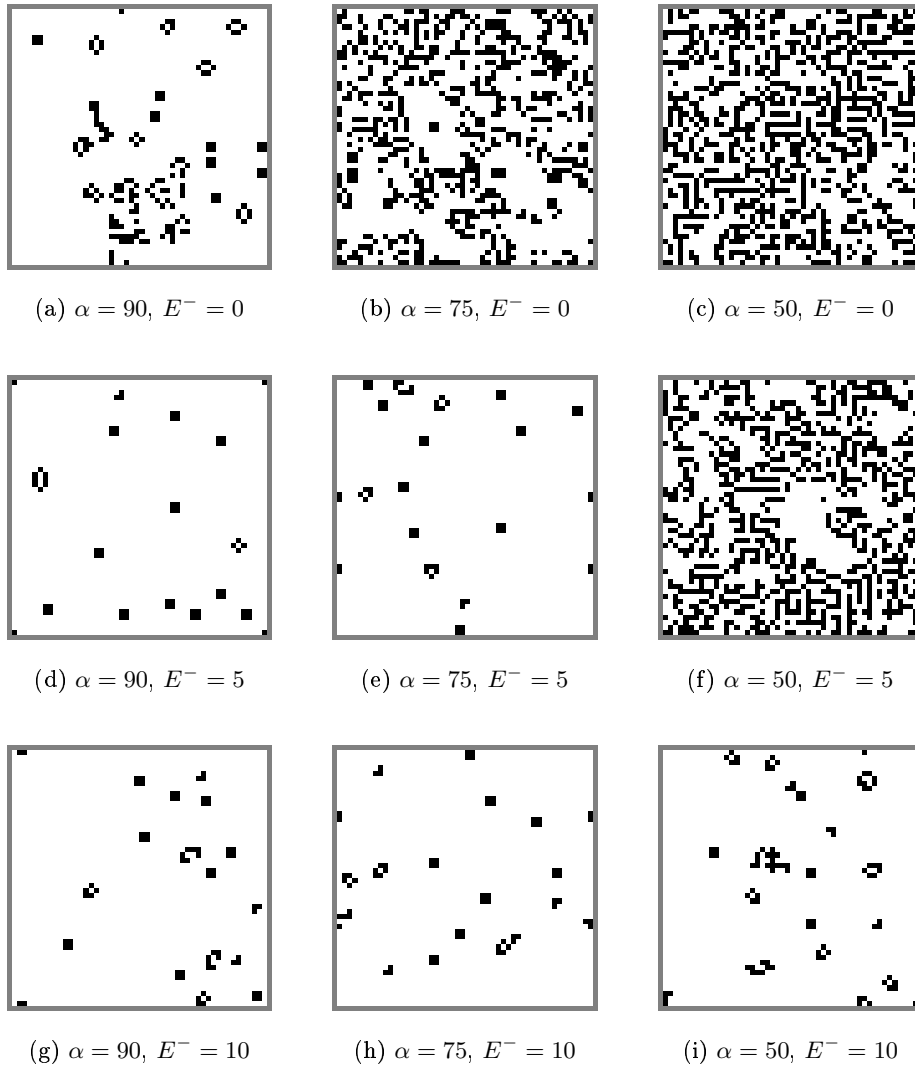


FIG. 6.5 – Exemples de configurations du jeu de la vie en dynamique asynchrone avec  $\alpha$  et  $E^-$  variables.

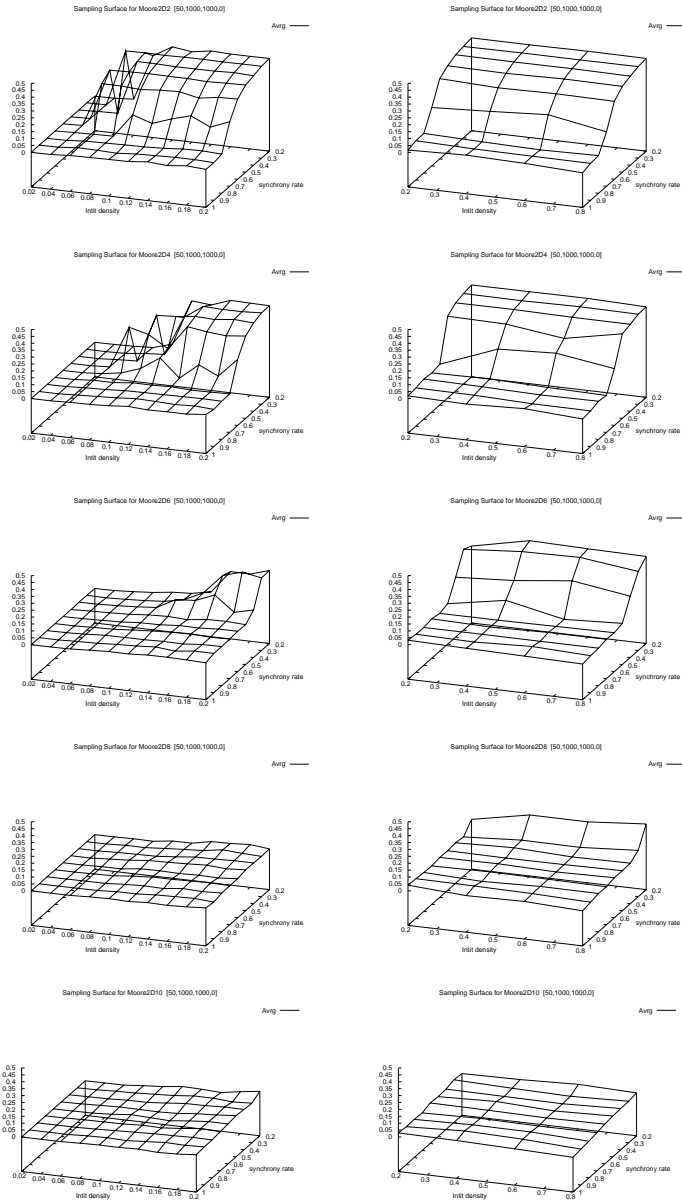


FIG. 6.6 – Surfaces d'échantillonnage obtenues pour  $E^- \in \{0, 0.02, \dots, 0.10\}$  (du haut vers le bas),  $n = 50$ ,  $T_{tr} = 1000$ ,  $T_{ech} = 1000$ . Dans la colonne de gauche, les surfaces sont obtenues avec une échelle  $d_{ini}$  différente afin de permettre d'étudier plus précisément le comportement de l'automate pour des faibles densités.

lorsque le taux de liens manquants  $E^-$  augmente. Afin de bien mettre en évidence les deux types de changements observables, nous avons séparé la surface en deux parties : la partie de gauche représente les faibles densités initiales avec un intervalle  $d_{\text{ini}} = [0, 0.2](0.02)$  ; la partie de droite représente les autres densités initiales avec un intervalle  $d_{\text{ini}} = [0.2, 0.8](0.2)$ .

Examinons tout d'abord ce qui se produit pour la colonne de droite et  $d_{\text{ini}} \in [0.2, 0.8]$ . L'invariance de la surface par rapport à l'axe des  $d_{\text{ini}}$  traduit le fait que dans cet intervalle, l'état stationnaire atteint par l'automate ne dépend pas de la densité initiale. Dans le cas de la topologie perturbée, nous voyons que la transition de phase a lieu pour  $\alpha_c \sim 0.9$ . Blok et Birgersen [BB99] ont étudié ce changement de phase pour des valeurs de  $n$  allant de 32 à 512 et leur mesures donnent  $\alpha_c = 0.9060 \pm 0.0004$ . Pour la densité, l'exposant critique calculé vaut  $\beta = 0.595 \pm 0.004$  et pour l'activité (i.e., le nombre de cellules dans un état instable), l'exposant critique vaut  $\beta' = 0.595 \pm 0.006$ . Ces mesures sont pleinement compatibles avec les résultats prévus pour le phénomène de percolation dirigée (cf. tableau 6.1 page 144).

Les figures montrent que lorsque le taux de liens manquants  $E^-$  augmente, la valeur de  $\alpha_c$  décroît. Ceci peut s'interpréter comme un gain de robustesse vis-à-vis de notre paramètre d'observation : la plage des valeurs pour lesquels le paramètre  $\tilde{\rho}$  reste constant grandit avec  $E^-$ . On voit également que pour  $E^- = 0.08$ , la hauteur maximale de la surface baisse considérablement et que pour  $E^- = 0.10$ , il n'y a plus de changement de phase observable. Ces observations semblent indiquer que le passage de la phase inactive-dispersée à la phase labyrinthe est un phénomène qui dépend fortement de la topologie.

Examinons maintenant ce qu'il se produit pour les surfaces de la colonne de gauche qui correspondent aux faibles densités initiales  $d_{\text{ini}} \in [0, 0.2]$ . Dans le cas où la topologie n'est pas perturbée, nous observons que la surface atteint sa hauteur maximale de saturation pour une valeur de  $d_{\text{ini}}$  supérieure à un seuil donné  $d_{\text{ini}}^c$ . On observe également qu'au fur et à mesure que le taux de liens manquants augmente, le seuil  $d_{\text{ini}}^c$  semble se déplacer vers de plus fortes valeurs. De même que précédemment, la transition de phase devient moins visible pour  $E^- = 0.08$  et disparaît pour  $E^- = 0.10$ , rendant alors invisible une transition en fonction de la densité initiale.

Ces expériences ont été conduites pour différentes valeurs de tailles de grilles  $n$  : on observe que les valeurs du seuil critique  $\alpha_c$  restent constantes alors que les valeurs du seuil critique  $d_{\text{ini}}^c$  diminuent lorsque  $n$  augmente. Le prochain paragraphe propose une première explication qui permet de saisir la différence de nature entre ces deux transitions.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E^- = 0$	0	0	0	1.28	4.34	7.88	14.52	21.76	29.92	40.90
$E^- = 2$	0	0	0	0.28	2.17	3.93	7.22	11.18	15.34	21.70
$E^- = 4$	0	0	0	0.19	0.72	1.24	2.40	3.96	5.52	8.00
$E^- = 6$	0	0	0	0.02	0.06	0.09	0.24	0.34	0.63	1.30

TAB. 6.4 – Probabilité  $P_{\text{germe}}(k)$  pour une micro-configuration d’être un “germe” (en %) en fonction du nombre  $k$  de 1 qu’elle contient et pour différents taux de liens manquants  $E^-$  (en %).

### 6.2.4 Analyse à l’aide des micro-configurations

L’observation des orbites asynchrones du Jeu de la Vie montre que la phase de labyrinthe peut dans certains cas se développer à partir de parties de la grille très localisées puis s’étendre sur toute la grille jusqu’à ce que le système ait atteint un état stationnaire. Par analogie avec la formation d’un cristal, nous désignons par le termes de “germes” ces sous-configurations qui ont la possibilité de donner naissance à une phase de labyrinthe.

Nous avons examiné l’existence de germes en procédant à une analyse de l’évolution de tous les motifs de taille  $3 \times 3$  qui sont placés dans une grille où toutes les autres cellules se trouvent à l’état 0. L’évolution de ces motifs, que nous désignons par le terme de *micro-configurations*, est testée avec différentes histoires afin de connaître quelle est la probabilité pour qu’une micro-configuration donnée serve de germe.

En fixant le taux de synchronisme arbitrairement à la valeur  $\alpha = 0.5$ , nous avons estimé la probabilité  $P_{\text{germe}}[i]$  pour qu’une micro-configuration  $i$  soit un germe en prenant 1000 histoires différentes. Le critère que nous avons choisi pour dire que nous avons atteint la phase de labyrinthe est que la densité atteint  $d_{\text{lim}} = 0.1$ . En effet, nous avons observé que si le développement du germe est capable d’augmenter le nombre de 1 en partant de la micro-configuration jusqu’à un taux constant, cela signifie presque toujours que ce développement va continuer à se développer pour remplir toute la grille et donc que l’automate va atteindre la phase de labyrinthe.

L’examen exhaustif du comportement des  $2^9$  micro-configurations montre bien que certaines micro-configurations n’ont pas la possibilité d’être des germes alors que d’autres micro-configurations ont une probabilité non-nulle de donner naissance à la phase de labyrinthe. Afin de présenter ces résultats de manière synthétique, nous avons regroupé les micro-configurations en fonction du nombre  $k$  de 1 qu’elles contiennent. L’estimation expérimentale de la probabilité  $P_{\text{germe}}[k]$  qu’une micro-configuration  $k$  serve de germe

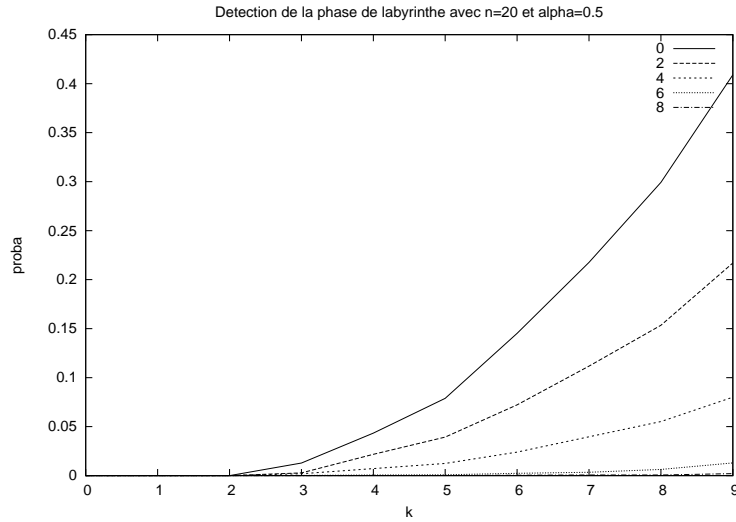


FIG. 6.7 – Représentation graphique de la probabilité  $P_{\text{germe}}(k)$  pour une micro-configuration d’être un “germe” (en %) en fonction du nombre  $k$  de 1 qu’elle contient et pour différents taux de liens manquants  $E^-$  (en %).

dans une grille ayant un taux de liens manquants  $E^-$  est montrée sur le tableau 6.4 et représenté graphiquement sur la figure 6.7. Nous voyons que pour les micro-configurations où  $k$  inférieur à 2, on n’observe jamais de germes : cela peut se déduire facilement de l’application des règles du Jeu de la Vie. Pour des valeurs de  $k$  supérieures ou égales à 3, on voit que la croissance du nombre  $k$  de 1 dans la micro-configuration augmente la probabilité d’être un germe.

### 6.2.5 Des micro-configurations au comportement global

Idéalement, on souhaiterait pouvoir disposer d’outils analytiques afin de déduire le comportement global avec des techniques similaires à celles du chapitre 5. Malheureusement, le cas du Jeu de la Vie est plus difficile à traiter. Aussi, nous effectuons une hypothèse de “développement indépendant des germes” : les interactions entre les germes potentiels sont négligées et nous supposons que la phase de labyrinthe est atteinte s’il se trouve au moins un germe dans la configuration initiale. Nous examinons donc les cellules de la configuration initiale une par une et si nous désignons par  $P_{\text{LP1}}$  la probabilité *par cellule* d’avoir un germe, la probabilité  $P_{\text{LP}}$  d’atteindre la phase de labyrinthe est :  $P_{\text{LP}} = 1 - (1 - P_{\text{LP1}})^{n \times n}$ . Pour calculer  $P_{\text{LP1}}$ , nous

utilisons la formule  $P_{LP1} = \sum_{k=0}^9 P_{germe}(k) \cdot P_{app}(k, d_{ini})$ , où  $P_{app}(k, d_{ini})$  est la probabilité pour qu'une micro-configuration initialisée avec une densité initiale  $d_{ini}$  contienne  $k$  cellules à l'état 1. Cette dernière quantité est simplement obtenue avec la formule du binôme :  $P_{app}(k, d_{ini}) = \binom{9}{k} d_{ini}^k (1-d_{ini})^{9-k}$ .

Les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales de  $P_{LP}(d_{ini}, E^-)$  sont présentées sur les courbes de la figure 6.8. La comparaison des deux courbes montre un accord qualitatif, même si les prédictions semblent plus justes pour les petites valeurs de  $E^-$ .

Cette hypothèse nous permet d'interpréter le comportement du Jeu de la Vie lorsque les deux types de perturbations se conjuguent. Considérons dans un premier temps le changement observé pour  $d_{ini} \in [0, 0.20]$  : un tel changement peut provenir du fait que lorsque  $d_{ini}$  augmente, les micro-configurations contiennent plus de 1 en moyenne, ce qui augmente statistiquement la probabilité d'observer d'apparition d'un germe. Nous pouvons également comprendre l'invariance des surfaces d'échantillonnage pour l'axe des  $d_{ini}$  pour  $d_{ini} \in [0.2, 0.80]$  : la figure 6.8 montre bien que la probabilité d'atteindre la phase de labyrinthe s'approche de 1 puis sature pour  $d_{ini} \sim 0.2$ . Par ailleurs, le décalage de la valeur critique  $d_{ini}^c$  observé sur la figure 6.6 peut s'expliquer en regardant les variations de  $P_{germe}(k)$  en fonction de  $E^-$  : ces probabilités sont décroissantes avec  $E^-$ . De plus, si notre hypothèse est valide, nous pouvons déduire qualitativement la variation de  $d_{ini}^c$  en fonction de  $n$  : lorsque  $d_{ini}^c$  et  $P_{LP}$  sont relativement petits (i.e., inférieurs à 0.1), la probabilité  $P_{LP}$  d'atteindre la phase de labyrinthe varie linéairement en fonction du nombre de cellules  $n^2$  alors que lorsque  $P_{LP}$  est proche de la saturation, les variations tendent à devenir négligeables en fonction de  $n$ .

### 6.3 Conclusion et perspectives

Ce chapitre nous a permis de développer une approche expérimentale des phénomènes de transition de phase du second ordre. Dans le cas des automates cellulaires unidimensionnels, les mesures semblent indiquer que le changement de phase observé est bien une transition de phase et que cette transition de phase appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée pour sept des huit automates identifiés lors des expérimentations du chapitre 4. Enfin, pour le huitième automate, l'ACE **178**, l'analyse des symétries supplémentaires et l'observation de ses diagrammes espace-temps laissent penser que sa transition de phase appartient à une variante de la percolation dirigée qui est la percolation dirigée " $\mathbb{Z}_2$  symétrique". Ces résultats semblent donc confirmer l'idée que dans une certaine mesure, les expériences

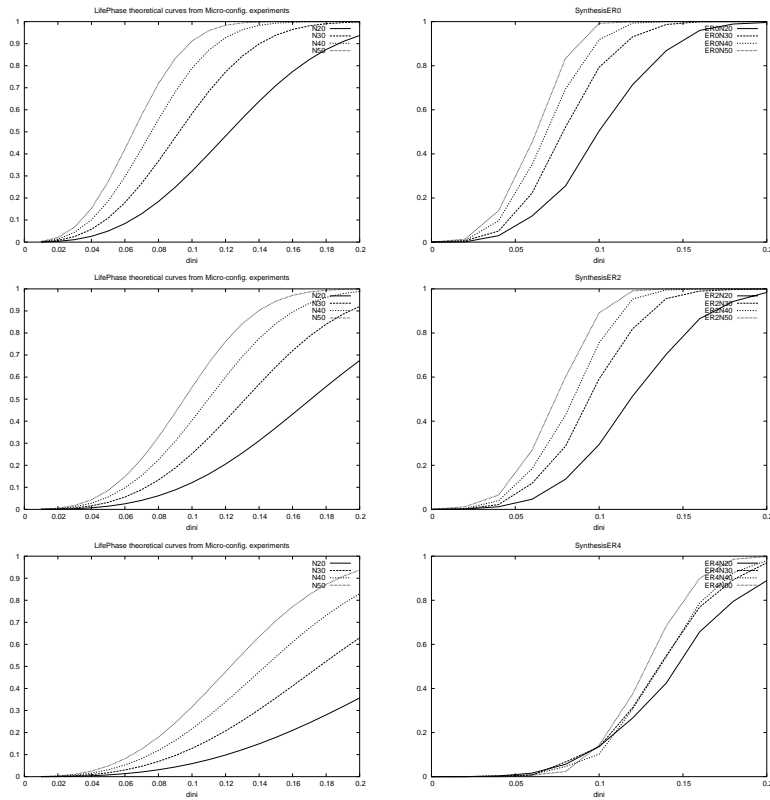


FIG. 6.8 – Probabilité d’atteindre la phase de labyrinthe en fonction de  $d_{ini}$  pour différentes tailles de grille  $n \in \{20, 30, 40, 50\}$  et différents taux de liens manquants :  $E^- = 0$ ,  $E^- = 0.02$ ,  $E^- = 0.04$  de haut en bas. La colonne de gauche montre les courbes calculées avec l’hypothèse de “développement indépendant des germes”. La colonne de droite montre les résultats expérimentaux.



conduites au chapitre 4 permettent bien d'identifier des comportements intrinsèques à la règle, qui restent observables pour des tailles de grille qui tendent vers l'infini.

Quant à l'application de ces méthodes sur le Jeu de la Vie, elle nous a permis de mettre en évidence deux phénomènes intéressants. Le premier est que la conjugaison des perturbations est une opération dont les résultats ne peuvent être prédits trivialement. On observe en effet que cet automate cellulaire semble être robuste, pour notre protocole, aux perturbations de topologie seules mais non robuste aux perturbations de synchronisme seules. Dans le cas où les deux perturbations sont appliquées simultanément, on constate que la valeur du seuil critique pour lequel le changement de phase a lieu se déplace de manière à ce que la plage de robustesse devienne plus grande. Le second phénomène est que le type de transition observé pour la densité initiale  $d_{\text{ini}}$  est de nature différente. L'analyse de la façon dont la transition de phase se produit (i.e., à partir de "germes") laisse penser qu'il ne s'agit que d'un effet de taille finie et que pour  $\alpha < \alpha_c$ , pour toute valeur non-nulle de  $d_{\text{ini}}$ , la probabilité d'observer la transition de phase tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Ces observations amènent un certain nombre de questions. On peut en effet, se demander quels sont les "ingrédients" qui conduisent à l'apparition d'une transition de phase du second ordre. On peut par exemple remarquer que les codes de transition des règles de SPT (cf. partie 4.3.4 page 96) sont très proches les uns des autres. On peut dès lors se demander si cela est dû à la notation que nous employons ou si cela résulte, comme pour le cas des automates doublement quiescents, de l'existence de propriétés particulières. En ce qui concerne le Jeu de la Vie, de nombreux points restent à étudier plus en détail. S'il paraît hautement improbable d'arriver à une description analytique de son fonctionnement asynchrone, l'approfondissement des hypothèses examinées dans ce chapitre permettra sûrement d'aller plus loin et de comprendre de façon plus précise les mécanismes de changement de phase. Une question qui est essentielle consisterait à déterminer si les effets ici observés sont couramment rencontrés pour les automates de dimension 2 ou s'ils sont spécifiquement reliés à la propriété d'universalité du Jeu de la Vie.

---

# Conclusion

Notre objectif initial, qui était de proposer un cadre formel afin d'étudier la robustesse à l'asynchronisme des automates cellulaires, nous a conduit à choisir des paramètres d'étude et à construire des protocoles qui ont permis de distinguer clairement des comportements différents vis-à-vis de la notion de robustesse.

Dans un premier temps, l'approche expérimentale a mis en évidence de nombreux phénomènes de nature différente : changement continu, transitions de phase du premier ordre, transition de phase du second ordre, etc.

Dans un second temps, après nous être restreints à un espace particulier de règles, nous avons abordé l'étude de la robustesse par des techniques analytiques afin de pouvoir assurer théoriquement les résultats expérimentaux.

Nous nous sommes alors focalisés sur les transitions de phase du second ordre en réalisant une étude plus détaillée; ceci nous a permis d'identifier la classe d'universalité de ces transitions de phase et nous avons montré, dans le cas du Jeu de la Vie, que les perturbations de synchronisme et les perturbations de topologie étaient très fortement interdépendantes.

La richesse des phénomènes observés nous permet donc de conclure positivement quant à la pertinence de la notion de robustesse pour les automates cellulaires. Vis-à-vis de la question initiale qui était de savoir comment estimer quantitativement les changements de comportements, nous avons montré que le choix d'un paramètre simple, la densité, permettait effectivement d'aboutir à une description adéquate des phénomènes. Les résultats fournis par l'utilisation de ce paramètre doivent désormais être affinés et il faut maintenant croiser les mesures effectuées avec la densité avec d'autres paramètres macroscopiques tels que la corrélation spatiale, l'entropie, etc.

Concernant les définitions formelles des différents types de perturbations, nous nous sommes attachés, pour l'asynchronisme, à étudier deux types de dynamiques stochastiques qui nous paraissaient "naturelles". Il existe bien entendu de nombreuses autres façons d'introduire de l'asynchronisme dans le fonctionnement d'un automate cellulaire, notamment en prenant en compte des délais dans les communications entre cellules. A ce stade, il nous paraît important de rechercher dans quelle mesure les différents types d'asynchronisme peuvent conduire à des résultats similaires ou différents de ceux que nous avons obtenus. En effet, l'identification des propriétés fondamentales qui permettent d'obtenir qu'un système soit robuste à l'asynchronisme con-

stitue un enjeu de taille, tant d'un point de vue théorique que d'un point de vue pratique.

Nous avons également observé que les perturbations de topologie, qui ont été introduites pour l'automate bidimensionnel du Jeu de la Vie, pouvaient modifier substantiellement la façon dont cet automate réagissait à l'ajout d'asynchronisme. Cela ouvre une piste de recherche intéressante puisque les perturbations de topologie peuvent conduire à nous rapprocher d'autres modèles utilisés pour traiter de systèmes complexes, tels que les réseaux de neurones, les réseaux d'interactions de gènes ou les graphes dynamiques.

Ces observations amènent naturellement la question de savoir si la démarche que nous avons adoptée est généralisable à d'autres modèles, voire à l'ensemble des modèles qui décrivent des systèmes complexes. Il n'existe évidemment pas de réponse universelle à cette question mais il nous paraît important de continuer à chercher dans ce sens afin de pouvoir élargir les techniques pour parvenir à englober des classes de modèles de plus en plus grandes.

---

## Références bibliographiques

- [APL04] Susumu Adachi, Ferdinand Peper, and Jia Lee. Computation by asynchronously updating cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 114(1-2) :261–289, Janvier 2004.
- [BB99] Hendrik J. Blok and Birger Bergersen. Synchronous versus asynchronous updating in the “game of life”. *Physical Review E*, 59 :3876–9, 1999.
- [BCFQV95] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, and C. Quaranta Vogliotti. Pattern growth in elementary cellular automata. *Theor. Comput. Sci.*, 145(1-2) :1–26, 1995.
- [BCV02] Jacques M. Bahi and Sylvain Contassot-Vivier. Stability of fully asynchronous discrete-time discrete-state dynamic networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(6) :1353–1363, Novembre 2002.
- [BD94] Hugues Bersini and Vincent Detours. Asynchrony induces stability in cellular automata based models. In Brooks, R. A, Maes, and Pattie, editors, *Proceedings of the 4th International Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems ArtificialLifeIV*, pages 382–387. MIT Press, Juillet 1994.
- [Bré99] Pierre Brémaud. *Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Springer, 1999.
- [BS00] John T. Baldwin and Saharon Shelah. On the classifiability of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 230(1-2) :117–129, 2000.
- [CCNC97] Parimal Pal Chaudhuri, Dipanwita Roy Chowdhury, Sukumar Nandi, and Santanu Chattopadhyay. *Additive Cellular Automata : Theory and Applications, Vol. 1*. Wiley-IEEE Computer Society, 1997. ISBN : 0818677171.
- [Cer02] Julien Cervelle. *Complexité structurelle et algorithmique des pavages et des automates cellulaires*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2002.
- [CFM99] G. Cattaneo, E. Formenti, and L. Margara. Topological chaos and cellular automata. In M. Delorme and J. Mazoyer, editors, *Cellular Automata - A Parallel model*, volume 460, pages 213–259. Kluwer Academic Publishers, 1999.

- [CM98] G. Cattaneo and L. Margara. Generalized sub-shifts in elementary cellular automata : The "strange case" of chaotic rule 180. *Theoretical Computer Science*, 201 :171–187, 1998.
- [CY88] K. Culik and S. Yu. Undecidability of CA classification schemes. *Complex Systems*, 2 :177–190, 1988.
- [DDF01] Jean-Christophe Dubacq, Bruno Durand, and Enrico Formenti. Kolmogorov complexity and cellular automata classification. *Theoretical Computer Science*, 259(1–2) :271–285, Mai 2001.
- [Eva96] Kellie M. Evans. *Larger than Life ; it's so nonlinear*. Thèse de doctorat, University of Wisconsin - Madison, 1996.
- [Fat01] Nazim Fatès. Les automates cellulaires : vers une nouvelle épistémologie? DEA D'Histoire et Philosophie des sciences - UFR 10 - Paris I Sorbonne, 2001. <http://nazim.fates.free.fr>.
- [Fat03] Nazim Fatès. Experimental study of elementary cellular automata dynamics using the density parameter. In *Discrete models for complex systems, DMCS '03 (Lyon)*, Discrete Mathematics Theoretical Computer Science Proceedings, AB, pages 155–165. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2003.
- [FHL01] Per Fröjdh, Martin Howard, and Kent Bækgaard Lauritsen. Directed percolation and other systems with absorbing states : Impact of boundaries. *International Journal of Modern Physics B*, 15(12) :1761–1797, 2001.
- [FM04a] Nazim Fatès and Michel Morvan. An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. Submitted to *Complex Systems*, [arxiv:nlin.CG/0402016](https://arxiv.org/abs/nlin.CG/0402016), 2004.
- [FM04b] Nazim Fatès and Michel Morvan. Perturbing the topology of the game of life increases its robustness to asynchrony. In *Accepted for publication in Proc. of ACRI 2004*, Octobre 2004.
- [FMMN00] Pablo A. Ferrari, Alejandro Maas, Servet Martinez, and Peter Ney. Cesaro mean distribution of group automata starting from measures with summable decay. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 20 :1657–1670, 2000.
- [FMST] Nazim A. Fatès, Michel Morvan, Nicolas Schabanel, and Eric Thierry. Asynchronous behavior of double-quiescent elementary cellular automata. *subm. STACS05*.

- [Fuk04] Henryk Fukś. Probabilistic cellular automata with conserved quantities. *Nonlinearity*, 17(1) :159–173, Janvier 2004.
- [Gác03] P. Gács. Deterministic computations whose history is independent of the order of asynchronous updating. <http://arXiv.org/abs/cs/0101026>, 2003.
- [Gar95] Max Garzon. *Models of massive parallelism : analysis of cellular automata and neural networks*. Springer-Verlag, 1995.
- [GF96] F. Geurts and P. Flocchini. Searching for chaos in cellular automata : New tools for classification. *Complexity International*, 2, 1996.
- [GH90] J.A.C. Gallas and H.J. Herrmann. Investigating an automaton of “class 4”. *International Journal of Modern Physics C*, 1 :181–191, 1990.
- [GKvdT84] Peter Grassberger, Friedrich Krause, and Tassilo von der Twer. A new type of kinetic critical phenomenon. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 17(3) :L105–L109, 1984.
- [GM91] Eric Golès and Servet Martinez. *Neural and Automata Networks*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [Gra83] Peter Grassberger. New mechanism for deterministic diffusion. *Physical Review A*, 28 :3666–3667, 1983.
- [Gra86] Peter Grassberger. appendix. In Stephan Wolfram, editor, *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, 1986.
- [Gra99] Peter Grassberger. Synchronization of coupled systems with spatiotemporal chaos. *Physical Review E*, 59(3) :R2520, Mars 1999.
- [Gut91] Howard Gutowitz. Transients, cycles and complexity in cellular automata. *Physical Review A*, 44(12) :7881–7884, Décembre 1991.
- [HC92] James E. Hanson and James P. Crutchfield. The attractor-basin portrait of a cellular automaton. *Journal of Statistical Physics*, 66 :1415–1462, 1992.
- [Hed69] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical Systems Theory*, 3 :320–375, 1969.

- [HG93] Bernardo A. Huberman and Natalie Glance. Evolutionary games and computer simulations. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 90 :7716–7718, Août 1993.
- [Hin00a] Haye Hinrichsen. Nonequilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, 49 :815–958, 2000.
- [Hin00b] Haye Hinrichsen. On possible experimental realizations of directed percolation. *Brazilian Journal of Physics*, 30(1) :69–82, Mars 2000.
- [HK95] A. Hof and O. Knill. Cellular automata with almost periodic initial conditions. *Nonlinearity*, 8 :477–491, 1995.
- [Hol03] Alexander E. Holroyd. Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 125(2) :195–224, 2003.
- [HZTJ03] Sheng-You Huang, Xian-Wu Zou, Zhi-Jie Tan, and Zhun-Zhi Jin. Network-induced nonequilibrium phase transition in the "game of life". *Physical Review E*, 67 :026107, 2003.
- [IH87] Andrew Ilachinski and Paul Halpern. Structurally dynamic cellular automata. *Complex Systems*, 1, 1987.
- [Ill01] Andrew Illachinski. *Cellular Automata - A discrete universe*. World Scientific, 2001.
- [KA86] Kunihiko Kaneko and Yasuhiro Akutsu. Phase transitions in two-dimensional stochastic cellular automata. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 19 :L69–L75, 1986.
- [Kan86] Kunihiko Kaneko. Attractors, basin structures and information processing in cellular automata. In S. Wolfram, editor, *Theory and applications of cellular automata*. World Scientific, Singapore, 1986.
- [Kan94] Yasusi Kanada. The effects of randomness in asynchronous 1d cellular automata (poster). *Artificial Life IV*, 1994.
- [Kar94] Jarkko Kari. Rice's theorem for the limit set of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 127(2) :229–254, 1994.
- [Lan90] Cristopher G. Langton. Computation at the edge of chaos. *Physica D*, 42, 1990.
- [LAPM03] Jia Lee, Susumu Adachi, Ferdinand Peper, and Kenichi Morita. Embedding universal delay-insensitive circuits in asynchronous

- cellular spaces. *Fundamenta Informaticae*, 58(3-4) :295–320, 2003.
- [Li92] Wentian Li. Phenomenology of nonlocal cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 68(5 / 6) :829, Septembre 1992.
- [Lou02] Pierre-Yves Louis. *Automates Cellulaires Probabilistes : mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et ergodicité*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Septembre 2002.
- [LP90] Wentian Li and Norman Packard. The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex Systems*, 4(3) :281, 1990.
- [LPL90] Wentian Li, Norman Packard, and Cristopher G. Langton. Transition phenomena in CA rule space. *Physica D*, 45 :77, 1990.
- [MA97] Roberto A. Monetti and Ezequiel V. Albano. On the emergence of large-scale complex behavior in the dynamics of a society of living individuals : the stochastic game of life. *Journal of Theoretical Biology*, 187 :183–194, 1997.
- [Maj94] Stephen M. Majercik. Structurally dynamic cellular automata. Mémoire de DEA, University of Southern Maine, Department of Computer Science, 1994.
- [Mar01] Bruno Martin. *Automates cellulaires, information et chaos*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2001.
- [MBG04] Andrés Moreira, Nino Boccara, and Eric Goles. On conservative and monotone one-dimensional cellular automata and their particle representation. *Theoretical Computer Science*, 325 :285–316, 2004.
- [MH90] Mario Markus and Benno Hess. Isotropic cellular automaton for modelling excitable media. *Nature*, 347 :56 – 58, 1990.
- [MHK97] Mario Markus, Tomas Hahn, and Ingo Kusch. A novel quantification of cellular automata. *Parallel Computing*, 23(11) :1635–1642, 1997.
- [Moo62] Edward F. Moore. Machine models of self-reproduction. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 14 :17–33, 1962. (Reprinted in *Essays on Cellular Automata*, A.W. Burks (ed.), University of Illinois Press, 1970).



- [Mor03] Andrés Moreira. Universality and decidability of number-conserving cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 292 :711–721, 2003.
- [MOW84] Olivier Martin, Andrew M. Odlyzko, and Stephen Wolfram. Algebraic properties of cellular automata. *Communications in Mathematical Physics*, 93 :219, 1984.
- [MP04] Laurent Fribourg and Stéphane Messika and Claudine Picaronny. Coupling and self-stabilization. In *Proceedings of the 18th International Conference on Distributed Computing (DISC 2004)*, number 3274 in Lecture Notes in Computer Science, Amsterdam, Octobre 2004.
- [MR99] Jacques Mazoyer and Ivan Rapaport. Global fixed points attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane : undecidability results. *Discrete Mathematics*, 199 :103–122, 1999.
- [MS92] M. Markus and H.E. Schepers. Two types of performance of an isotropic cellular automaton : stationary (turing) patterns and spiral waves. *Physica A*, 188 :337–343, Septembre 1992.
- [NM92] Martin A. Nowak and Robert M. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature (London)*, 359 :826–829, 1992.
- [Oll02] Nicolas Ollinger. *Automates cellulaires : structures*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [Paj01] Stéphane Pajot. *Percolation et économie*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2001. <http://percolation.free.fr/index.html>.
- [PBDG94] Yves Pomeau Pierre Bergé and Monique Dubois-Gance. *Des rythmes au chaos*. Odile Jacob, 1994.
- [Pet96] Plamen Petrov. Non-replicative fredkin’s rules in homogeneous cellular spaces. In J.Leão T.Toffoli, M.Biafore, editor, *Proceedings of the Fourth Workshop on Physics and Computation (PhysComp96)*, Boston University, Novembre 1996. New England Complex Systems Institute.
- [Pom86] Yves Pomeau. Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics. *Physica D*, 23 :3–11, 1986. ISBN 2-7381-0234-4.
- [Pou85] William Poundstone. *The Recursive Universe*. William Morrow and Company, New York, 1985. ISBN 0-688-03975-8.

- [PW85] Norman H. Packard and Stephen Wolfram. Two-dimensional cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 38 :901–946, 1985.
- [RZ02] Andrea Roli and Franco Zambonelli. Emergence of macro spatial structures in dissipative cellular automata. In *Proc. of ACRI2002 : Fifth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, volume 2493 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 144–155. Springer, 2002.
- [Sar00] Palash Sarkar. A brief history of cellular automata. *ACM Comput. Surv.*, 32(1) :80–107, 2000.
- [Sch97] Birgitt Schönfisch. Anisotropy in cellular automata. *Biosystems*, 41 :29–41, 1997.
- [SdR99] Birgitt Schönfisch and André de Roos. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems*, 51 :123–143, 1999.
- [SH00] W. Richard Stark and William H. Hughes. Asynchronous, irregular automata nets : the path not taken. *BioSystems*, 55 :107–117, 2000.
- [SJ57] Broadbent S.R. and Hammersley J.M. Percolation processes i. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(3) :629–641, 1957.
- [SJ89] A. Sinha and C. Jayaprakash. A numerical study of one-dimensional cellular automata. *Physica D*, 39 :352–364, 1989.
- [SKS04] Sunao Sakai, Megumi Kanno, and Yukari Saito. Quiescent string dominance parameter  $f$  and classification of one-dimensional cellular automata. *Physical Review E*, (69) :066117, Juin 2004.
- [Sut90] Klaus Sutner. Classifying circular CA. *Physica D*, 45 :386, 1990.
- [SV02] Roberto Serra and Marco Villani. Perturbing the regular topology of cellular automata : Implications for the dynamics. In *Proc. of ACRI2002 : Fifth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, volume 2493 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 168–177. Springer, 2002.
- [T.E84] R. L. Buvel T.E. Ingerson. Structure in asynchronous cellular automata. *Physica D*, 1 :59–68, 1984.
- [The04] Guillaume Theyssier. Captive cellular automata. In *Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 427–438. Lecture Notes in Computer Science, 2004.

- [Tur52] Alan Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions Of the Royal Society (London)*, 237 :5–72, 1952.
- [Voo96] Burton Voorhees. *Computational Analysis of One-Dimensional Cellular Automata*. World Scientific, 1996. ISBN 981-02-2221-1.
- [WL92] Andrew Wuensche and Mike Lesser. *The Global Dynamics of Cellular Automata*. Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity. Addison-Wesley, 1992. ISBN 0-201-55740-1.
- [Wol83] Stephen Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55 :601–644, 1983.
- [Wol84] Stephen Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10 :1–35, 1984.
- [Wol86] Stephen Wolfram. Random sequence generation by cellular automata. *Advances in Applied Mathematics*, 7(2) :123–169, Juin 1986.
- [Wol02] Stephen Wolfram. *A new kind of science*. Wolfram Media Inc., 2002.
- [Wue99] Andrew Wuensche. Classifying cellular automata automatically : Finding gliders, filtering, and relating space-time patterns, attractor basins, and the Z parameter. *Complexity*, 4(3) :47–66, 1999.