

Fonctions polylogarithmes et intégrales itérées

Dorian Perrot

Université Strasbourg

26/08/2024

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

Applications $\delta_{\mathcal{E}}$ et $\Phi_{\mathcal{E}}$

On se donne $(\mathcal{E}, d)$ une dg-algèbre commutatives graduées.

Definition

On définit les applications linéaires

$$\delta_{\mathcal{E}} : \left| \begin{array}{ll} Sh(\mathcal{E}^1) & \longrightarrow Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^1 \\ [\omega_1 | \cdots | \omega_k] & \longmapsto [\omega_1 | \cdots | \omega_{k-1}] \otimes \omega_k \\ 1 & \longmapsto 0 \end{array} \right.$$

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \left| \begin{array}{ll} Sh(\mathcal{E}^1) & \longrightarrow Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \\ [\omega_1 | \cdots | \omega_k] & \longmapsto \sum_{i=1}^{k-1} [\omega_1 | \cdots | \omega_{i-1}] \otimes (\omega_i \triangle \omega_{i+1}) \otimes [\omega_{i+2} | \cdots | \omega_k] \\ & \quad + \sum_{i=1}^k [\omega_1 | \cdots | \omega_{i-1}] \otimes d\omega_i \otimes [\omega_{i+1} | \cdots | \omega_k] \\ 1 & \longmapsto 0 \end{array} \right.$$

avec $\triangle$ le produit de $\mathcal{E}$ et la convention que le tenseur vide vaut 1.

Definition

On pose $Z^1(\mathcal{E}) := \ker(\Phi_{\mathcal{E}})$.

Proposition

- On a $\delta_{\mathcal{E}}(Z^1(\mathcal{E})) \subset Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1$.
- Soient $a, b \in Sh(\mathcal{E}^1(M))$ alors

$$\Phi_{\mathcal{E}}(a \sqcup b) = \Phi_{\mathcal{E}}(a) * \Delta_c(b) + \Phi_{\mathcal{E}}(b) * \Delta_c(a). \quad (1)$$

où Δ_c est la comultiplication de $Sh(\mathcal{E}^1)$

et $(a \otimes \Omega \otimes a') * (b \otimes b') := (a \sqcup b) \otimes \Omega \otimes (a' \sqcup b')$.

Corollary

L'ensemble $Z^1(\mathcal{E})$ est une sous-algèbre de $Sh(\mathcal{E}^1(M))$.

Définition I_{χ_0}

$\varphi : (\mathcal{E}, d) \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}}, d)$ un morphisme de dg-algèbre commutatives graduées. On suppose que $H^0(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathbb{C}$ et $H^1(\tilde{\mathcal{E}}) = 0$ où $H^i(\tilde{\mathcal{E}})$ désigne le i -ème groupe de la cohomologie de $\tilde{\mathcal{E}}$. Notons $X(\tilde{\mathcal{E}}) := \text{Hom}_{\text{alg}}(\tilde{\mathcal{E}}^0, \mathbb{C})$.

Theorem

(num.1.5) Soit $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0)$, il existe une unique application linéaire « intégrale itérée » $I_{\chi_0} : Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ telle que les diagrammes A et B soient commutatifs.

$$\begin{array}{ccc}
 Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad I_{\chi_0} \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\
 \downarrow \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow d \\
 Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{\quad m(I_{\chi_0} \otimes \varphi) \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^1
 \end{array}$$

FIGURE 2 – Diagramme A

$$\begin{array}{ccc}
 Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad I_{\chi_0} \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \chi_0 \\
 \text{Sh}(\mathcal{E}^1) & \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

FIGURE 3 – Diagramme B

Idée démonstration

Considérer la filtration croissante totale de $Z^1(\mathcal{E})$

$$F_n Z^1(\mathcal{E}) := F_n \text{Sh}(\mathcal{E}^1) \cap Z^1(\mathcal{E}).$$

Posons $F_{-1} Z^1(\mathcal{E}) := 0$, alors pour tout entier n positif ou nul

$$\delta_{\mathcal{E}}(F_n Z^1(\mathcal{E})) \subset F_{n-1} Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1$$

Par récurrence sur $n \geq 0$. Notons $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence au rang n : « Il existe une unique collection d'applications $F_k I : F_k Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ pour $k = 0, \dots, n$ telles que pour tout $k = 0, \dots, n$, les diagrammes A_k et B_k commutent.

$$\begin{array}{ccc} F_k Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{F_k I} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow d \\ F_{k-1} Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{m(F_{k-1} I \otimes \varphi)} & \tilde{\mathcal{E}}^1 \end{array}$$

FIGURE 4 – Diagramme A_k

$$\begin{array}{ccc} F_k Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{F_k I} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \iota_k & & \downarrow \chi_0 \\ \text{Sh}(\mathcal{E}^1) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{C} \end{array}$$

FIGURE 5 – Diagramme B_k

Plan

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

Definition

Soit M une variété algébrique connexe, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ un chemin et $[\omega_1 | \dots | \omega_n] \in Sh(\mathcal{E}^1(M))$. **L'intégrale itérée** de $[\omega_1 | \dots | \omega_n] \in Sh(\mathcal{E}^1(M))$ suivant γ est

$$\int_{\gamma} \omega_1 \dots \omega_n := \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \gamma^*(\omega_1(t_1)) \dots \gamma^*(\omega_n(t_n)).$$

Si $n = 0$ alors on définit $\int_{\gamma} 1 = 1$.

Proposition

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ deux chemins avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, et $\alpha \in Z^1(\mathcal{E})$ alors

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Idée démonstration

$$\begin{array}{lcl} \text{int} : & \text{Sh}(\mathcal{E}^1([0, 1])) & \longrightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 1]) \\ & [\omega_1 | \cdots | \omega_k] & \longmapsto \left(y \mapsto \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq y} \omega_1(t_1) \cdots \omega_n(t_n) \right) \\ & 1 & \longmapsto 1 \end{array}$$

On a alors $\int_{\gamma_1} \alpha = \text{ev}_1 \circ \text{int} \circ \gamma_1^*(\alpha)$

Lemma

- Avec $M = [0, 1]$ et $\chi_0 = \text{ev}_0$ on a l'égalité des applications linéaires $I_{\text{ev}_0} = \text{int}$ dans $\mathcal{L}(\text{Sh}(\mathcal{E}_{\text{lisse}}^1([0, 1])), \mathcal{C}^\infty([0, 1]))$.
- Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{E}(M)) & \xrightarrow{I_{\text{ev}_0}} & \mathcal{E}^0(\widetilde{M}) \\ \downarrow (p \circ \gamma)^* & & \downarrow \gamma^* \\ Z^1(\mathcal{E}_{\text{lisse}}([0, 1])) & \xrightarrow{\text{int}} & \mathcal{E}_{\text{lisse}}^0([0, 1]) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \text{ev}_x \\ \searrow \text{ev}_1 \end{array} \quad \mathbb{C}$$

Plan

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

on se donne $(\mathcal{E}, d)$ une dg-algèbre commutative graduée et $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie graduée.

Definition

Un **élément de Maurer-Cartan** de degré 1 de $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ est un élément $A \in \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}_1$ telle que

$$dA + \frac{1}{2}A \wedge A = 0$$

On note $MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan de $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ de degré 1.

Morphisme associé à un élément de MC

on suppose que $\mathfrak{a}$ est de dimension finie en chaque degré. $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$ est une algèbre de Hopf graduée de dimension finie en chaque degré. Le dual gradué $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^*$ est également une algèbre de Hopf.

Definition

Donnons nous $J := \sum_{i \in I} a_i \otimes \omega_i$ un élément de $MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$.

$$\Psi_J : \begin{array}{l|l} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ & \longrightarrow Sh(\mathcal{E}^1) \\ \xi & \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i_1, \dots, i_k \in I} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \end{array}$$

Proposition

- $Im(\Psi_J) \subset Z^1(\mathcal{E})$.
- Ψ_J est un morphisme d'algèbres.

Plan

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

Équation $dF = F \cdot \varphi(A)$

Definition

Donnons nous $A \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ et considérons

$$S_A := \{F \in \tilde{\mathcal{E}}^0 \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \mid dF = F \cdot \varphi(A), (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) = F^{12} \cdot F^{13} \\ \text{et } (\text{id} \otimes \varepsilon)F = 1 \text{ dans } \mathcal{E}^0\} \quad (2)$$

avec $\cdot$ le produit tensoriel du produit dans $\tilde{\mathcal{E}}$ et du produit dans $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$, et avec $x \mapsto x^{12}$ et $x \mapsto x^{13}$ les morphismes d'algèbres de $\tilde{\mathcal{E}} \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ dans $\tilde{\mathcal{E}} \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ donnés respectivement par $e \otimes u \mapsto e \otimes u \otimes 1$ et $e \otimes u \mapsto e \otimes 1 \otimes u$.

Theorem

Soient $A \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ alors pour tout $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0)$, il existe un unique $F_{\chi_0} \in S_A$ tel que $(\chi_0 \otimes \text{id})(F_{\chi_0}) = 1$.

Préliminaires à la démonstration (existence)

$\mathcal{B} := (\varepsilon_j)_{j \in J}$ une base graduée de $\mathfrak{a}$.

Definition

On définit $\delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} : \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \otimes \mathfrak{a}^\circ$ comme le dual des produits $m_n : \bigoplus_{k=0}^n (\mathcal{U}(\mathfrak{a})[k] \otimes \mathfrak{a}[n-k]) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]$:

Lemma

- Pour tout $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$ la somme $\sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^* \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \otimes \mathfrak{a}^\circ$ est finie (où $e_j^{k*}_{\varepsilon_i} = e_j^{k*}(\bullet \cdot \varepsilon_i)$ et est égale à $\delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(\xi)$).
- le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ & \xrightarrow{\Psi_A} & Z^1(\mathcal{E}) \\ \downarrow \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} & & \downarrow \delta_{\mathcal{E}} \\ \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \otimes \mathfrak{a}^\circ & \xrightarrow{\Psi_A \otimes A} & Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 \end{array}$$

Démonstration partie 1

Notons $(e_j^k)_{j \in J_k}$ une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})[k]$, ainsi $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (e_j^k)_{j \in J_k}$ est une base graduée de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$. Considérons $\mu_A := I_{\chi_0} \circ \Psi_A : \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ (possible car A est MC) et

$$F := \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k$$

Montrons que $dF = F \cdot \varphi(A)$. On a

$$\begin{aligned} dF &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} d \circ \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} d \circ I_{\chi_0} \circ \Psi_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} \circ \Psi_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k && \text{par le théorème 1.5} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ (\Psi_A \otimes A) \circ \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(e_j^{k*}) \otimes e_j^k && \text{lemme précédent} \end{aligned}$$

Démonstration partie 2

$$\begin{aligned}
 dF &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ (\Psi_A \otimes A) \circ \delta_{\mathcal{U}(a)}(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (\mu_A \otimes (\varphi \circ A)) \circ \delta_{\mathcal{U}(a)}(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} \mu_A(e_j^{k*} \varepsilon_i) \cdot \varphi(A(\varepsilon_i^*)) \otimes e_j^k \text{ car } \delta_{\mathcal{U}(a)}(e_j^{k*}) = \sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} e_j^{k*} \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j^* \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} \mu_A(e_j^{k*}) \cdot \varphi(A(\varepsilon_i^*)) \otimes e_j^k \varepsilon_i \\
 &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \right) \cdot \left(\sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} \varphi(A(\varepsilon_i^*)) \otimes \varepsilon_i \right) \\
 &= F \cdot \varphi(A)
 \end{aligned}$$

Plan

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

Morphisme associé à une solution

Definition

À un élément $F \in S_A$ on peut lui associer

$$\left| \begin{array}{ll} S_A & \longrightarrow \text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0) \\ F & \longmapsto (\xi \mapsto \langle \xi, F \rangle) := \langle \cdot, F \rangle \end{array} \right.$$

Objectif

Connaitre les images des $\langle \cdot, F \rangle$ pour tout $F \in S_A$.

Simplification

En fait il suffit de connaitre une seule image pour les connaitre toutes.

Détails simplification

Notons $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ le groupe des éléments primitifs de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$.

Si $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ et $F \in S_A$ alors $(1 \otimes g) \cdot F \in S_A$. On a donc une action de $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur S_A .

Proposition

L'action de $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur S_A est libre et transitive.

On peut faire agir $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur $\text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ par $g \bullet \gamma(\xi) = (\gamma \otimes g) \circ \Delta(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$. Si $F \in S_A$ et $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ alors

$$g \bullet \langle \cdot, F \rangle = \langle \cdot, g \bullet F \rangle \quad (3)$$

Proposition

Soit $\gamma \in \text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ et $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ alors $\text{Im}(\gamma) = \text{Im}(g \bullet \gamma)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}^0$.

Plan

- 1 Intégrales itérées
- 2 Application : homotopie invariance des intégrales itérées
- 3 Morphisme associé à un élément MC
- 4 Résolution $dF = F \cdot \varphi(A)$
- 5 Algèbre Image
- 6 Application : équation KZ_3

On note $P_{\mathbb{C}}^1$ la droite projective sur $\mathbb{C}$.

Definition

L'espace de configuration à n points de $P_{\mathbb{C}}^1$, noté $C_n(P_{\mathbb{C}}^1)$, est l'ensemble des n -uplets de $(P_{\mathbb{C}}^1)^n$ privé des diagonales, autrement dit

$$C_n(P_{\mathbb{C}}^1) := \{(x_1, \dots, x_n) \in (P_{\mathbb{C}}^1)^n \mid x_i \neq x_j (i \neq j)\}.$$

Definition

L'espace de modules de $P_{\mathbb{C}}^1$, noté $\mathfrak{M}_{0,n}$ est le quotient de $C_n(P_{\mathbb{C}}^1)$ par $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, autrement dit

$$\mathfrak{M}_{0,n} := \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \backslash C_n(P_{\mathbb{C}}^1).$$

Cadre : notre cas

$n = 4$, $M = \mathfrak{M}_{0,4} \simeq P_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, $\alpha = \mathrm{Lie}(A, B)$ et $A = \Omega_{KZ}^m$.

Definition

Notons $F_{as} \in \tilde{\mathcal{E}}^0 \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ la solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} F(z) = \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) F(z) \\ F(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^A \end{cases}$$

où $z^{-\alpha}$ est définie comme $\exp(-\alpha \log(z))$.

Proposition

La fonction F_{as} appartient à S_A .

Conséquence

Afin d'identifier les images des $\langle \cdot, F \rangle$ pour $F \in S_A$, il suffit de connaître $Im(\langle \cdot, F_{as} \rangle) = Im(\mu_{as})$.

Sélection des mots convergents

$\mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge = \mathbb{C} \oplus B \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge =$ ensemble des mots « réguliers »

$\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge = \mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge \oplus A \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge = \pi : \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge$ l'application de projection correspondant à cette décomposition.

But

Obtenir une expression de F avec seulement des mots convergents

Definition

Introduisons α une indéterminée de degré 1 qui commute avec les variables A et B . On a deux applications :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \xrightarrow{u} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge[[\alpha]] \xrightarrow{v} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$$

avec u est l'unique morphisme d'algèbres complètes vérifiant $u(A) = A - \alpha$ et $u(B) = B$

et v est l'unique morphisme d'espaces vectoriels complets tel que $v(w\alpha^n) = A^n w$ pour tout $w \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$.

Seconde équation de F

Proposition

On a $v \circ u(A \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge) = 0$.

On en déduit l'égalité $v \circ u = v \circ u \circ \pi$.

Proposition

On a

$$u(F(z)) = F(z)z^{-\alpha}.$$

Démonstration

$z \mapsto u(F(z))$ et $z \mapsto F(z)z^{-\alpha}$ sont solutions du système

$$\frac{d}{dz} G(z) = \left(\frac{A - \alpha}{z} + \frac{B}{z - 1} \right) G(z) \quad G(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{(A - \alpha)}$$

Théorème

On a

$$(v \circ u \circ \pi)(F(z)) = (v \circ u)(F(z)) = z^{-A} F(z)$$

Expression de $\pi(F(z))$

Parallèlement, on sait que

$$\pi(F(z)) = 1 + \sum_{w \in B \cdot W_+^*} I_w(z) w \quad \text{avec } w = BA^{n_1} BA^{n_2} \dots BA^{n_r}.$$

- W_+^* est l'ensemble des mots de longueur au moins 1 formé avec les lettres A et B .

- $I_w(z) := \int_0^z \underbrace{\frac{dt}{t-1} \circ \frac{dt}{t} \circ \dots \circ \frac{dt}{t}}_{n_1+1 \text{ termes}} \circ \dots \circ \underbrace{\frac{dt}{t-1} \circ \frac{dt}{t} \circ \dots \circ \frac{dt}{t}}_{n_m+1 \text{ termes}},$ ce
sont des polylogarithmes.

Théorème

$$F(z) = z^A(v \circ u) \left(1 + \sum_{w \in B \cdot W_+^*} I_w(z) w \right) \quad (4)$$

Expression de F

Après calcul on obtient

$$F(z) = 1 + \sum_{w \in W_+^*} F_w(z) w$$

avec

$$F_w(z) = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{w' \in W^*, \\ w_0 \in J_k(w')}} (-1)^k \frac{\log(z)^{m-k}}{(m-k)!} l_{w'}(z)$$

pour $w = A^m B A^{n_1} B A^{n_2} \dots B A^{n_r} = A^m w_0$

et où $J_k(w) := \{m \in W^* \mid |m|_B = |w|_B, |m| = |w| - k \text{ et } m \preceq w\}$.

Conclusion

L'image de $\mu_{as} = \langle \cdot, F_{as} \rangle$ est l'algèbre engendrée par les fonctions polylogarithmes multiples l_w et les puissances du logarithmes.