
MÉMOIRE DE M2 :

FONCTIONS
POLYLOGARITHMES
ET
INTÉGRALES ITÉRÉES

EFFECTUÉ PAR
DORIAN PERROT
Université de Strasbourg

ENCADRÉ PAR
BENJAMIN ENRIQUEZ
IRMA Strasbourg



ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023/2024

Table des matières

0	Introduction	2
0.1	Résumé	2
0.2	Notations	2
1	Intégrales itérées pour des dg-algèbres	5
1.1	Algèbre $Z^1(\mathcal{E})$ associée à une dg-algèbre $\mathcal{E}$	5
1.2	Morphisme d'algèbres de $Z(\mathcal{E}^1)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}^0$	7
1.3	Cas particulier des variétés connexes	18
2	Éléments de Maurer-Cartan	21
2.1	Définition et fonctorialité	21
2.2	Morphisme associé à un élément de Maurer-Cartan	23
3	Intégration d'éléments de Maurer-Cartan	25
4	Étude de certains éléments de Maurer-Cartan	30
4.1	Algèbre de tresses infinitésimales	30
4.2	Espace des modules $\mathfrak{M}_{0,n+1}$	32
4.3	dg-algèbres associées	33
4.4	Formes KZ	34
5	Equation (KZ_3) et fonctions hyperlogarithmiques.	37
5.1	Notations utilisées	37
5.2	Solutions de (KZ_3)	37
5.3	Calcul de l'image de μ_{as}	39
	Bibliographie	41

0 Introduction

0.1 Résumé

Le mémoire se décline en cinq sections. Les résultats principaux sont le théorème 3.6 situé dans la troisième section et la caractérisation des images d'une certaine famille de morphismes situé en cinquième section. Pour le théorème, il s'agit de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution (avec certaines propriétés) à une équation du type $\ll dF = F.A \gg$ où A est fixé et est un élément dit de Maurer-Cartan.

Les deux premières parties ont pour but de construire le cadre et les objets qui serviront dans la troisième section.

La première partie a pour objectif d'introduire une algèbre particulière, notée $Z^1(\mathcal{E})$, associée à une algèbre différentielle graduée sur laquelle on pourra définir et étudier une fonction I_{χ_0} dites intégrales itérées. Cette dernière sera nécessaire afin de démontrer le théorème 3.6.

On se donnera ensuite plus de structure en deuxième section en y ajoutant des algèbres de Lie graduées. On y introduira les éléments de Maurer-Cartan d'une algèbre différentielle graduée commutative et d'une algèbre de Lie graduée. Puis à chacun de ses éléments on lui associera un certain morphisme dont l'image est dans une algèbre du type $Z^1(\mathcal{E})$ étudiée dans la partie précédente. La construction et les propriétés des morphismes Ψ_A constituent les résultats principaux de cette deuxième section et seront utilisées après.

La troisième partie utilise donc les deux sections précédentes afin de démontrer le théorème 3.6.

Enfin, les deux dernière sections concernent un cas particulier de ce qui a été fait précédemment. Il s'agit d'introduire l'équation dites KZ_n pour la quatrième section. On s'attardera plus particulièrement sur les solutions et leur image de l'équation KZ_3 dans la dernière section. En particulier, on effectuera un raisonnement inspiré de [LM96] qui permettra d'obtenir une caractérisation complète des images de morphisme associés aux solutions.

0.2 Notations

Dans toute la suite du mémoire et sans précision spécifique, K désignera un corps de caractéristique nulle, M une variété lisse ou holomorphe connexe, $\widetilde{M}$ son revêtement universel et on notera $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ la projection associée.

On rappelle que si $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf [Kas95], alors $x \in H$ est dit **primitif** si $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. On notera $Pri(H)$ l'ensemble des éléments primitifs de H . On dit également qu'un élément $x \in H$ est **grouplike** si x est non nul et $\Delta(x) = x \otimes x$, l'ensemble des éléments grouplike de H forme un groupe noté $\mathcal{G}(H)$ dont l'inverse est donné par l'antipode.

Si E est un K -espace vectoriel, on notera $T(E)$ (resp. $S(E), \bigwedge E$) l'algèbre tensorielle de E (resp. algèbre symétrique de E , algèbre extérieure de E) [Kas95; War83]. On peut munir $T(E)$ d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative graduée avec

- La multiplication $\text{conc} : T(E) \otimes T(E) \rightarrow T(E)$ qui a $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m)$ associe $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$.
- L'unité $\mu : K \rightarrow T(E)$ qui est le plongement de K dans $T(E)$ (i.e. dans $T^0(E)$).
- La comultiplication $\Delta : T(E) \rightarrow T(E) \otimes T(E)$ qui est l'unique coproduit tel que les éléments de E soit tous primitifs, i.e. $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ pour tout x de E .

- La counité $\varepsilon : T(E) \rightarrow K$ qui est la projection sur $T^0(E) = K$.
- L'antipode $S : T(E) \rightarrow T(E)$ qui à $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \otimes x_n$ associe $(-1)^n x_n \otimes x_{n-1} \otimes \dots \otimes x_2 \otimes x_1$.

Pour tout entier n , on note $T^n(E)$ le sous-espace vectoriel de $T(E)$ engendré par les éléments de degré n de $T(E)$. On a donc $T(E) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(E)$.

Soient p, q des entiers, on dira qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$ est un (p, q) -**shuffle** si $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$. On notera $Sh(p, q)$ l'ensemble des (p, q) -shuffles. En particulier on peut munir $T(E)$ d'une autre multiplication que la concaténation appelée **shuffle** et notée $\sqcup : T(E) \otimes T(E) \rightarrow T(E)$ telle que

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \sqcup (a_{p+1} \otimes \dots \otimes a_{p+q}) = \sum_{\sigma \in Sh(p, q)} (a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}).$$

De manière équivalente, on peut définir le produit shuffle récursivement par

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \sqcup 1 := a_1 \otimes \dots \otimes a_p, \quad 1 \sqcup (b_1 \otimes \dots \otimes b_q) := b_1 \otimes \dots \otimes b_q,$$

et

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \sqcup (b_1 \otimes \dots \otimes b_q) := \text{conc}(a_1, (a_2 \otimes \dots \otimes a_p) \sqcup (b_1 \otimes \dots \otimes b_q)) \\ + \text{conc}(b_1, (a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \sqcup (b_2 \otimes \dots \otimes b_q)) \quad (1)$$

L'algèbre $T(E)$ possède alors une structure d'algèbre de Hopf commutative notée $Sh(E)$, l'**algèbre shuffle** de E . Dans cette algèbre on notera $[\omega_1 | \dots | \omega_k]$ au lieu de $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_k$ les différents éléments de $Sh(E)$. Les différentes lois de $Sh(E)$ sont données par :

- La multiplication « shuffle » $\sqcup : Sh(E) \otimes Sh(E) \rightarrow Sh(E)$ qui à $[x_1 | \dots | x_n] \otimes [y_1 | \dots | y_m]$ associe $[x_1 | \dots | x_n] \sqcup [y_1 | \dots | y_m]$. C'est une loi est commutative, associative et sans diviseur de zéro.
- L'unité $\mu : K \rightarrow Sh(E)$ qui est le plongement de K dans $Sh(E)$ (i.e. dans $Sh^0(E)$).
- La comultiplication $\Delta_c : Sh(E) \rightarrow Sh(E) \otimes Sh(E)$ qui à $[x_1 | \dots | x_n]$ associe $\sum_{i=0}^n [x_1 | \dots | x_i] \otimes [x_{i+1} | \dots | x_n]$ avec la convention que le tenseur vide vaut 1.
- La counité $\varepsilon : Sh(E) \rightarrow K$ qui est la projection sur $Sh^0(E) = K$.
- L'antipode $S : Sh(E) \rightarrow Sh(E)$ qui à $[x_1 | x_2 | \dots | x_{n-1} | x_n]$ associe $(-1)^n [x_n | x_{n-1} | \dots | x_2 | x_1]$.

En fait, ces opérations sont les opérations « duales » de l'algèbre de Hopf cocommutative $T(E)$ (cf [Reu93, chap 1.5] pour plus de détails). En outre si E est un K -espace vectoriel de dimension finie alors $T(E)^\circ$ –le dual gradué de $T(E)$ – est isomorphe en tant qu'algèbres de Hopf à $Sh(E^*)$.

Pour tout entier n , on note $Sh^n(E)$ le sous-espace vectoriel de $Sh(E)$ engendré par les éléments de degré n de $Sh(E)$, et on pose $F_n Sh(E) := \bigoplus_{k=0}^n Sh^k(E)$. La suite $(F_n Sh(E))_n$ est une filtration croissante totale de $Sh(E)$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie alors on notera $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante [Boua ; Kas95]. Cette dernière possède une structure d'algèbre de Hopf cocommutative héritée de celle de $T(E)$. Aussi le théorème PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) [Boua] permet de montrer que $Pri(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \simeq \mathfrak{g}$. Enfin si E est un espace vectoriel alors on notera $\mathfrak{Lie}(E)$ l'**algèbre de Lie libre** de E et l'on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre $\mathcal{U}(\mathfrak{Lie}(E))$ et $T(E)$ [Boub].

Enfin si A est un K -espace vectoriel et $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$ un K -espace vectoriel gradué alors on définit le **produit tensoriel complétée** de A , noté $A \widehat{\otimes} B^\wedge$ par

$$A \widehat{\otimes} B^\wedge := \prod_{n \geq 0} A \otimes B_n.$$

Une **algèbre différentielle graduée**, abrégée en **dg-algèbre** la donnée d'un triplet (F, Δ, d) avec

- F un K -espace vectoriel $\mathbb{Z}$ -gradué, i.e. $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F^n$,
- une multiplication associative $\Delta: F^n \otimes F^m \rightarrow F^{n+m}$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$ et unité $1 \in F^0$.
- une différentielle $d: F \rightarrow F$ telle que $d \circ d = 0$, $d(F^n) \subset F^{n+1}$, et $d(x \Delta y) = dx \Delta y + (-1)^k x \Delta dy$ où $x \in F^k$.

On dit que (F, Δ, d) est : **commutative** si pour tout $x \in F^n$ et $y \in F^m$ on a $x \Delta y = (-1)^{mn} y \Delta x$; **positivement graduée** si F est juste $\mathbb{N}$ -gradué.

Par exemple, si $K = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et M est une variété lisse (resp. holomorphe) alors l'algèbre $\mathcal{E}_{lisse}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) des k -formes différentielles lisses (resp. holomorphes) sur M munit du produit extérieur ($\wedge$) et de la dérivée extérieure (d) est une dg-algèbre commutative. En particulier $\mathcal{E}_{lisse}^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ (resp. $\mathcal{E}^0(M) = \mathcal{O}_{hol}(M)$).

Un morphisme de dg-algèbres $f: F \rightarrow G$ est un morphisme d'algèbres qui commute avec la différentielle, i.e. $f \circ d_F = d_G \circ f$.

1 Intégrales itérées pour des dg-algèbres

On se donne K un corps de caractéristique nulle. Toutes les K -algèbres considérées dans cette section seront également supposées unitaires.

L'objectif de cette section est de définir algébriquement une intégrale itérée définie sur une algèbre associée à des dg-algèbres munies d'un caractère (théorème 1.9). On montrera de plus que les intégrales itérées ainsi définies sont des morphismes d'algèbres. Enfin on étudiera ces intégrales itérées dans le cas particulier des variétés connexes algébriques ou lisses avec les outils construits précédemment.

1.1 Algèbre $Z^1(\mathcal{E})$ associée à une dg-algèbre $\mathcal{E}$

On se donne $(\mathcal{E}, d)$ une dg-algèbre commutatives graduées.

Definition 1.1. On définit les applications linéaires

$$\delta_{\mathcal{E}} : \begin{array}{ccc} Sh(\mathcal{E}^1) & \longrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^1 \\ [\omega_1 | \cdots | \omega_k] & \longmapsto & [\omega_1 | \cdots | \omega_{k-1}] \otimes \omega_k \\ 1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

et

$$\Phi_{\mathcal{E}} : \begin{array}{ccc} Sh(\mathcal{E}^1) & \longrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \\ [\omega_1 | \cdots | \omega_k] & \longmapsto & \sum_{i=1}^{k-1} [\omega_1 | \cdots | \omega_{i-1}] \otimes (\omega_i \Delta \omega_{i+1}) \otimes [\omega_{i+2} | \cdots | \omega_k] \\ & & + \sum_{i=1}^k [\omega_1 | \cdots | \omega_{i-1}] \otimes d\omega_i \otimes [\omega_{i+1} | \cdots | \omega_k] \\ 1 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

avec Δ le produit de $\mathcal{E}$ et la convention que le tenseur vide vaut 1.

Definition 1.2. On pose $Z^1(\mathcal{E}) := \ker(\Phi_{\mathcal{E}})$.

Par définition $Z^1(\mathcal{E})$ est donc un sous-espace vectoriel de $Sh(\mathcal{E}^1)$, montrons que c'est une sous-algèbre de $Sh(\mathcal{E}^1)$.

Definition 1.3. On définit l'application

$*$: $(Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1)) \otimes (Sh(\mathcal{E}^1) \otimes Sh(\mathcal{E}^1)) \rightarrow Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$ qui a $(a \otimes \Omega \otimes a') \otimes (b \otimes b')$ associe $(a \otimes \Omega \otimes a') * (b \otimes b') := (a \sqcup b) \otimes \Omega \otimes (a' \sqcup b')$.

En particulier l'application $*$ permet de munir $Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$ d'une structure de $(Sh(\mathcal{E}^1) \otimes Sh(\mathcal{E}^1))$ -module.

Proposition 1.4. Soient $a, b \in Sh(\mathcal{E}^1(M))$ alors

$$\Phi_{\mathcal{E}}(a \sqcup b) = \Phi_{\mathcal{E}}(a) * \Delta_c(b) + \Phi_{\mathcal{E}}(b) * \Delta_c(a). \quad (2)$$

où Δ_c est la comultiplication de $Sh(\mathcal{E}^1)$ définie dans la section 0.2.

Remark 1.5. Dit autrement, la proposition précédente montre que $\Phi_{\mathcal{E}}$ est une dérivation de l'anneau $Sh(\mathcal{E}^1)$ dans $Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$. La structure de $Sh(\mathcal{E}^1)$ -module de ce dernier est donnée par le pullback du coproduit de $Sh(\mathcal{E}^1)$ de la structure naturelle de $(Sh(\mathcal{E}^1) \otimes Sh(\mathcal{E}^1))$ -module de $Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$.

La proposition 1.4 est une démonstration détaillée de la restriction à $Sh(\mathcal{E}^1) \subset Sh(\oplus_{i>0} \mathcal{E}^i)$ de l'égalité $(d \circ \nabla = \nabla \circ d_{\otimes})$ (notations de [BF]) dans la démonstration de [BF, lem 3.256].

Démonstration. Soient $a = [a_1 | \dots | a_p]$ et $b = [b_1 | \dots | b_q]$ des éléments de $Sh(\mathcal{E}^1)$. Introduisons l'application $\Delta_c^2 := (\Delta_c \otimes \text{id}) \circ \Delta_c : Sh(\mathcal{E}^1) \rightarrow Sh(\mathcal{E}^1) \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$, écrivons $\Delta_c^2(a)$ et $\Delta_c^2(b)$ sous la forme

$$\Delta_c^2(a) = \sum_i a_i \otimes a'_i \otimes a''_i \quad \text{et} \quad \Delta_c^2(b) = \sum_j b_j \otimes b'_j \otimes b''_j.$$

L'application Δ_c^2 est un morphisme d'algèbres comme composé de morphismes d'algèbres et donc

$$\Delta_c^2(a \sqcup b) = \Delta_c^2(a) \sqcup \Delta_c^2(b) = \sum_{i,j} (a_i \sqcup b_j) \otimes (a'_i \sqcup b'_j) \otimes (a''_i \otimes b''_j) \quad (3)$$

Définissons également $\Phi_1, \Phi_2 : Sh(\mathcal{E}^1) \rightarrow Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$ par

$$\Phi_1([\omega_1 | \dots | \omega_n]) = \sum_{k=1}^n [\omega_1 | \dots | \omega_{k-1}] \otimes d\omega_k \otimes [\omega_{k+1} | \dots | \omega_n],$$

$$\Phi_2([\omega_1 | \dots | \omega_n]) = \sum_{k=1}^{n-1} [\omega_1 | \dots | \omega_{k-1}] \otimes (\omega_k \Delta_{\mathcal{E}} \omega_{k+1}) \otimes [\omega_{k+2} | \dots | \omega_n].$$

On a donc $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Remarquons que la projection $pr_1 : Sh(\mathcal{E}^1) \rightarrow \mathcal{E}^1$ et la composé $\wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2 : Sh(\mathcal{E}^1) \rightarrow \wedge^2 \mathcal{E}^1$ (où pr_2 désigne la projection de $Sh(\mathcal{E}^1)$ sur $Sh_2(\mathcal{E}^1)$ et $\wedge_{\mathcal{E}} : Sh_2(\mathcal{E}^1) = \mathcal{E}^1 \otimes \mathcal{E}^1 \rightarrow \wedge^2 \mathcal{E}^1$ est l'antisymétrisation) sont des dérivations de $Sh(\mathcal{E}^1)$ à valeurs dans les $Sh(\mathcal{E}^1)$ -modules triviaux $\mathcal{E}^1$ et $\wedge^2 \mathcal{E}$ respectivement. Autrement-dit

$$\forall x, y \in Sh(\mathcal{E}^1), \quad pr_1(x \sqcup y) = pr_1(x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)pr_1(y)$$

et

$$\begin{aligned} \forall x, y \in Sh(\mathcal{E}^1), \quad \wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2(x \sqcup y) &= \wedge_{\mathcal{E}}(pr_2(x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)pr_2(y) + pr_1(x) \sqcup pr_1(y)) \\ &= \wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2(x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x) \wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2(y). \end{aligned}$$

La seconde égalité vient du fait que pour tout $a, b \in \mathcal{E}^1$ on a $a \sqcup b \in S^2(\mathcal{E}^1) \subset (\mathcal{E}^1 \otimes \mathcal{E}^1) = Sh_2(\mathcal{E}^1)$ et que la restriction de $\wedge_{\mathcal{E}}$ à $S^2(\mathcal{E}^1)$ est nulle.

Ainsi, $d \circ pr_1 : Sh(\mathcal{E}^1) \rightarrow \mathcal{E}^2$ et $m_{11} \circ \wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2$ (où $m_{11} : \wedge^2 \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2$ est l'application donnée par les compositions $\wedge^2 \mathcal{E}^1 \hookrightarrow \mathcal{E}^1 \otimes \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}^2$ qui est bien définie par commutativité du produit dans $\mathcal{E}$) sont des dérivations de $Sh(\mathcal{E}^1)$ dans $\mathcal{E}^2$ vu comme module trivial. Par suite

$$(\text{id} \otimes (d \circ pr_1) \otimes \text{id}) \circ \Delta_c^2(a \sqcup b) = \sum_{i,j} (a_i \sqcup b_j) \otimes (pr_1(a'_i)\varepsilon(b'_j) + \varepsilon(a'_i)pr_1(b'_j)) \otimes (a''_i \sqcup b''_j) \quad (4)$$

or

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \otimes \varepsilon(a'_i) \otimes a''_i &= \sum_k a_k \otimes 1 \otimes a'_k \quad \text{où } \Delta_c(a) = \sum_k a_k \otimes a'_k \\ \sum_j b_j \otimes \varepsilon(b'_j) \otimes b''_j &= \sum_l b_l \otimes 1 \otimes b'_l \quad \text{où } \Delta_c(b) = \sum_l b_l \otimes b'_l \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
(\text{id} \otimes (d \circ pr_1) \otimes \text{id}) \circ \Delta_c^2(a \sqcup b) &= \sum_k \sum_{j=1}^q (a_k \sqcup [b_1 | \dots | b_{q-1}]) \otimes db_j \otimes (a'_k \sqcup [b_{j+1} | \dots | b_q]) \\
&+ \sum_l \sum_{i=1}^p ([a_1 | \dots | a_{p-1}] \sqcup b_l) \otimes da_i \otimes ([a_{i+1} | \dots | a_p] \sqcup b'_l) \quad (5)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$(\text{id} \otimes (d \circ pr_1) \otimes \text{id}) \circ \Delta_c^2(a \sqcup b) = \Phi_1(a) * \Delta_c(b) + \Delta_c(a) * \Phi_1(b). \quad (6)$$

De même

$$\begin{aligned}
(\text{id} \otimes (m_{11} \circ \wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2) \otimes \text{id}) \circ \Delta_c^2(a \sqcup b) &= \sum_k \sum_{j=1}^{q-1} (a_k \sqcup [b_1 | \dots | b_{q-1}]) \otimes (b_j \wedge_{\mathcal{E}} b_{j+1}) \otimes (a'_k \sqcup [b_{j+2} | \dots | b_q]) \\
&+ \sum_l \sum_{i=1}^{p+1} ([a_1 | \dots | a_{p-1}] \sqcup b_l) \otimes (a_i \wedge_{\mathcal{E}} a_{i+1}) \otimes ([a_{i+2} | \dots | a_p] \sqcup b'_l) \quad (7)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$(\text{id} \otimes (m_{11} \circ \wedge_{\mathcal{E}} \circ pr_2) \otimes \text{id}) \circ \Delta_c^2(a \sqcup b) = \Phi_2(a) * \Delta_c(b) + \Delta_c(a) * \Phi_2(b). \quad (8)$$

Le résultat découle des égalités 6 et 8. $\square$

Corollary 1.6. *L'ensemble $Z^1(\mathcal{E})$ est une sous-algèbre de $Sh(\mathcal{E}^1(M))$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $a, b \in Z^1(\mathcal{E})$ alors $a \sqcup b \in Z^1(\mathcal{E})$. Par la proposition précédente on a $\Phi_{\mathcal{E}}(a \sqcup b) = \Phi_{\mathcal{E}}(a) * \Delta_c(b) + \Phi_{\mathcal{E}}(b) * \Delta_c(a)$, or $a, b \in Z^1(\mathcal{E})$ et donc le membre de droite est nul, ce qui conclut. $\square$

1.2 Morphisme d'algèbres de $Z(\mathcal{E}^1)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}^0$

On se donne un morphisme de dg-algèbre commutatives graduées $\varphi : (\mathcal{E}, d) \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}}, d)$. On suppose que $H^0(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathbb{C}$ et $H^1(\tilde{\mathcal{E}}) = 0$ où $H^i(\tilde{\mathcal{E}})$ désigne le i -ème groupe de la cohomologie de $\tilde{\mathcal{E}}$. Notons $X(\tilde{\mathcal{E}}) := Hom_{alg}(\tilde{\mathcal{E}}^0, \mathbb{C})$.

Avant de pouvoir construire l'intégrale itérée I_{χ_0} (théorème 1.9), on a besoin de propriétés supplémentaires sur les algèbres $Z(\mathcal{E}^1)$.

Lemma 1.7. *On a $\delta_{\mathcal{E}}(Z^1(\mathcal{E})) \subset Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1$.*

Démonstration. On a le diagramme (figure 1) dont les lignes horizontales sont exactes car $Z^1(\mathcal{E})$ est le noyau de $\Phi_{\mathcal{E}}$. Montrons de plus qu'il est commutatif. Comme $Sh(\mathcal{E}^1)$ est linéairement engendré par 1 et les éléments de la forme $[x|\omega]$ avec $x \in Sh(\mathcal{E}^1)$ et $\omega \in \mathcal{E}^1$, il suffit de montrer la commutativité en restriction à ces éléments.

On a $\Phi_{\mathcal{E}}(1) = 0$ et $\delta_{\mathcal{E}}(1) = 0$ donc le diagramme (figure 1) en restriction à 1 est commutatif.

Soit $x \in Sh(\mathcal{E}^1)$ et $\omega \in \mathcal{E}^1$, on écrit $\Phi_{\mathcal{E}}(x)$ et $\delta_{\mathcal{E}}(x)$ sous la forme

$$\Phi_{\mathcal{E}}(x) = \sum_i x'_i \otimes \alpha_i \otimes x''_i \quad \text{et} \quad \delta_{\mathcal{E}}(x) = \sum_i x'''_i \otimes \omega_i$$

avec $x'_i, x''_i, x'''_i \in Sh(\mathcal{E}^1)$, $\alpha_i \in \mathcal{E}^2$ et $\omega_i \in \mathcal{E}^1$. Et alors

$$\Phi_{\mathcal{E}}([x|\omega]) = \sum_i x'_i \otimes \alpha_i \otimes [x''_i|\omega] + \sum_i x'''_i \otimes (\omega_i \triangle \omega) \otimes 1 + x \otimes d\omega \otimes 1.$$

Le terme $\sum_i x'''_i \otimes (\omega_i \triangle \omega) \otimes 1 + x \otimes d\omega \otimes 1$ est dans $Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh^0(\mathcal{E}^1)$ donc annulé par $\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \delta_{\mathcal{E}}$. De plus

$$(\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \delta_{\mathcal{E}}) \left(\sum_i x'_i \otimes \alpha_i \otimes [x''_i|\omega] \right) = \sum_i x'_i \otimes \alpha_i \otimes x''_i \otimes \omega$$

donc

$$(\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \delta_{\mathcal{E}}) \circ \Phi_{\mathcal{E}}([x|\omega]) = \sum_i x'_i \otimes \alpha_i \otimes x''_i \otimes \omega = \Phi_{\mathcal{E}}(x) \otimes \omega = (\Phi_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}}([x|\omega])$$

et donc le diagramme (figure 1) en restriction à $[x|\omega]$ est commutatif.

Par suite si $y \in Z^1(\mathcal{E})$ alors par commutativité du diagramme (figure 1) $\delta_{\mathcal{E}}(y)$ est dans $\ker(\Phi_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1})$ d'où $\delta_{\mathcal{E}}(Z^1(\mathcal{E}))$ est inclus dans $Z^1(\mathcal{E}) \otimes Sh(\mathcal{E}^1)$. $\square$

$$\begin{array}{ccccc} Z^1(\mathcal{E}) & \hookrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}} & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \\ & & \downarrow \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow \text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \delta_{\mathcal{E}} \\ Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 & \hookrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}} & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^1 \end{array}$$

FIGURE 1 –

Lemma 1.8. *On a l'égalité suivante dans $\mathcal{L}(Sh(\mathcal{E}^1), Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2)$*

$$(\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \varepsilon) \circ \Phi_{\mathcal{E}} = ((\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}}.$$

Démonstration. Par linéarité des expressions, il suffit de vérifier l'égalité pour une élément $[\omega_1 | \dots | \omega_n]$ de $Sh(\mathcal{E}^1)$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{E}}([\omega_1 | \dots | \omega_n]) &= \sum_{i=1}^{k-1} [\omega_1 | \dots | \omega_{i-1}] \otimes (\omega_i \triangle \omega_{i+1}) \otimes [\omega_{i+2} | \dots | \omega_k] \\ &\quad + \sum_{i=1}^k [\omega_1 | \dots | \omega_{i-1}] \otimes d\omega_i \otimes [\omega_{i+1} | \dots | \omega_k], \end{aligned} \quad (9)$$

et donc

$$(\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \varepsilon) \circ \Phi_{\mathcal{E}}([\omega_1 | \dots | \omega_n]) = [\omega_1 | \dots | \omega_{n-2}] \otimes (\omega_{n-1} \triangle \omega_n) + [\omega_1 | \dots | \omega_{n-1}] \otimes d\omega_n. \quad (10)$$

D'autre part, on a

$$\delta_{\mathcal{E}}([\omega_1 | \dots | \omega_n]) = [\omega_1 | \dots | \omega_{n-1}] \otimes \omega_n, \quad (11)$$

et donc

$$\begin{aligned} ((\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}}([\omega_1 | \dots | \omega_n]) \\ = [\omega_1 | \dots | \omega_{n-2}] \otimes (\omega_{n-1} \Delta \omega_n) + [\omega_1 | \dots | \omega_{n-1}] \otimes d\omega_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Le résultat souhaité s'en déduit. $\square$

Le théorème suivant nous permet de construire l'intégrale itérée I_{χ_0} souhaitée. On remarquera que le lemme 1.7 nous permet d'écrire la ligne verticale à gauche dans la figure 2 (diagramme A).

Theorem 1.9. *Soit $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0)$, il existe une unique application linéaire « intégrale itérée » $I_{\chi_0} : Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ telle que les diagrammes A et B soient commutatifs.*

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad I_{\chi_0} \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow d \\ Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{\quad m(I_{\chi_0} \otimes \varphi) \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^1 \end{array}$$

FIGURE 2 – Diagramme A

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad I_{\chi_0} \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \iota & & \downarrow \chi_0 \\ Sh(\mathcal{E}^1) & \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

FIGURE 3 – Diagramme B

où $\iota : Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow Sh(\mathcal{E}^1)$ est l'injection canonique.

Démonstration. Posons pour tout entier n

$$F_n Z^1(\mathcal{E}) := F_n Sh(\mathcal{E}^1) \cap Z^1(\mathcal{E})$$

la suite $(F_n Z^1(\mathcal{E}))_n$ est une filtration croissante et totale de $Z^1(\mathcal{E})$, en particulier $F_0 Z^1(\mathcal{E}) = \mathbb{C}$. Par convention posons $F_{-1} Z^1(\mathcal{E}) := 0$, alors pour tout entier n positif ou nul $\delta_{\mathcal{E}}(F_n Z^1(\mathcal{E})) \subset F_{n-1} Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1$.

Procédons par récurrence sur $n \geq 0$. Notons $HR(n)$ l'hypothèse de récurrence au rang n : « Il existe une unique collection d'applications $F_k I : F_k Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ pour $k = 0, \dots, n$ telles que pour tout $k = 0, \dots, n$, les diagrammes A_k et B_k commutent (figure 4 et 5) ».

$$\begin{array}{ccc} F_k Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad F_k I \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow d \\ F_{k-1} Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{\quad m(F_{k-1} I \otimes \varphi) \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^1 \end{array}$$

FIGURE 4 – Diagramme A_k

$$\begin{array}{ccc} F_k Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\quad F_k I \quad} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \iota_k & & \downarrow \chi_0 \\ Sh(\mathcal{E}^1) & \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

FIGURE 5 – Diagramme B_k

où $\iota_k : F_k Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow Sh(\mathcal{E}^1)$ est l'injection canonique.

Montrons $HR(0)$.

Par le diagramme A_0 , on a $d(F_0(1)) = m(F_{-1}I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}(1) = 0$ car $\delta_{\mathcal{E}}(1) = 0$. Par suite $F_0I(1)$ appartient à $\ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^1) = \mathbb{C} \cdot 1$ car $H^0(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathbb{C}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $F_0I(1) = \lambda \cdot 1$. De plus $1 = \chi_0(F_0I(1)) = \lambda$ d'où $F_0I(1) = 1$.

On définit donc $F_0I : F_0Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ comme la composition de $F_0Z^1(\mathcal{E}) \simeq Sh_0(\mathcal{E}^1) = \mathbb{C}$ avec l'unique morphisme d'algèbres $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}^0$. On vérifie que F_0I fait commuter les diagrammes A_0 et B_0 , et est unique par ce qui précède.

A présent, donnons-nous un entier strictement positif n , supposons $HR(n)$ et montrons $HR(n+1)$, autrement dit construisons une unique famille $F'_kI : F_kZ^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ avec $k = 1, \dots, n+1$ qui fasse commuter les diagrammes A_k et B_k (dans lesquels on remplace F_kI par F'_kI) pour tout $k = 0, \dots, n$. L'énoncé d'unicité contenue dans $HR(n)$ implique qu'une telle famille est telle que $F'_kI = F_kI$ pour $k = 1, \dots, n$. Il reste à montrer l'existence et unicité d'une application $F'_{n+1}I : F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ telle que A_{n+1} et B_{n+1} commutent. On introduit donc l'ensemble

$$E_{n+1} := \{f \in \mathcal{L}(F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}), \tilde{\mathcal{E}}^0) \mid \text{les diagrammes } A_{n+1} \text{ et } B_{n+1} \text{ dans lesquels} \\ \text{on remplace } F_{n+1}I \text{ par } f \text{ soient commutatifs} \}$$

et on veut montrer qu'il est de cardinal égal à un.

Avant cela rappelons que $H^1(\tilde{\mathcal{E}}^1) = 0$, donc les 1-formes fermées de $\tilde{\mathcal{E}}^1$ sont exactement les 1-formes exactes de $\tilde{\mathcal{E}}^1$ et alors l'application $d : \tilde{\mathcal{E}}^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^1$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\ker(\chi_0) \rightarrow \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)$, notons

$$int_{\chi_0} : \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2) \rightarrow \ker(\chi_0) \quad (13)$$

l'isomorphisme inverse, i.e $int_{\chi_0} \circ d|_{\ker(\chi_0)}^{\ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)} = \text{id}_{\ker(\chi_0)}$ et $d|_{\ker(\chi_0)}^{\ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)} \circ int_{\chi_0} = \text{id}_{\ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)}$. Ainsi le diagramme 6 est commutatif et est exact verticalement.

$$\begin{array}{ccc} \ker(\chi_0) & \xleftarrow{int_{\chi_0}} & \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{E}}^0 & \xrightarrow{d} & \tilde{\mathcal{E}}^1 \\ \downarrow \chi_0 & & \downarrow d \\ \mathbb{C} & & \tilde{\mathcal{E}}^2 \end{array}$$

FIGURE 6 – Application int_{χ_0}

Revenons à la démonstration de ce que E_{n+1} est de cardinal égal à 1. On considère

$$Z_+^1(\mathcal{E}) := Z^1(\mathcal{E}) \cap Sh_+(\mathcal{E}^1) \quad (14)$$

on en déduit la décomposition $Z^1(\mathcal{E}) = \mathbb{C} \oplus Z_+^1(M)$.

De même, pour tout entier k considérons

$$F_k^+ Z^1(\mathcal{E}) := F_k Z^1(\mathcal{E}) \cap Sh_+(\mathcal{E}^1) \quad (15)$$

et alors on a la décomposition

$$F_k Z^1(\mathcal{E}) = \mathbb{C} \oplus F_k^+ Z^1(\mathcal{E}) \quad (16)$$

Posons

$$g := m(F_n I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} : F_{n+1} Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}^2. \quad (17)$$

Montrons que si l'on a

$$d \circ g = 0 \quad (18)$$

alors E_{n+1} est de cardinal égal à un. En effet si $d \circ g = 0$ alors on peut corestreindre g en $g_{cor} : F_{n+1} Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)$ et restreindre cette dernière en $g_{cor}^+ : F_{n+1}^+ Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)$.

Posons

$$F_{n+1}^+ I_{\chi_0} := \text{int}_{\chi_0} \circ g_{cor}^+ : F_{n+1}^+ Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0 \quad (19)$$

où int_{χ_0} est l'application définie en (13).

Définissons également l'application linéaire

$$F_{n+1} I_{\chi_0} := F_0 I \oplus F_{n+1}^+ I_{\chi_0} : F_{n+1} Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0 \quad (20)$$

où l'on utilise la décomposition (16).

Montrons que $F_{n+1} I_{\chi_0}$ appartient à E_{n+1} , autrement dit vérifions que $F_{n+1} I_{\chi_0}$ fait commuter les diagrammes A_{n+1} et B_{n+1} . Pour cela il faut et il suffit de vérifier les égalités $d \circ F_{n+1} I_{\chi_0} = 0 \oplus g$ en tant qu'applications de $\mathbb{C} \oplus F_{n+1}^+ Z_1(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^1$ et de $\chi_0 \circ F_{n+1} I_{\chi_0} = \text{id}_{\mathbb{C}} \oplus 0$ en tant qu'applications de $\mathbb{C} \oplus F_{n+1}^+ Z_1(M) \rightarrow \mathbb{C}$.

Pour le premier point, soit $(z, \omega) \in \mathbb{C} \times F_{n+1}^+ Z^1(\mathcal{E})$. Par linéarité des applications, il suffit d'étudier les images de $(z, 0)$ et $(0, \omega)$. D'une part $d \circ F_{n+1} I_{\chi_0}(z, 0) = d \circ F_0 I(z) = 0 = (0 \oplus g)(z, 0)$. D'autre part, $d \circ F_{n+1} I_{\chi_0}(0, \omega) = d \circ \text{int}_{\chi_0} \circ g_{cor}^+(\omega)$, or $g_{cor}^+(\omega) \in \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)$, rappelons que l'on a $d \circ \text{int}_{\chi_0} = \text{id}_{\ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2)}$, d'où $d \circ \text{int}_{\chi_0} \circ g_{cor}^+(\omega) = g_{cor}^+(\omega) = (0 \oplus g)(0, \omega)$.

En conclusion on a bien $d \circ F_{n+1} I_{\chi_0} = 0 \oplus g$.

Pour le second point, soit $(z, \omega) \in \mathbb{C} \times F_{n+1}^+ Z^1(\mathcal{E})$. Par linéarité des applications, il suffit d'étudier les images de $(z, 0)$ et $(0, \omega)$. D'une part $F_{n+1} I_{\chi_0}(z, 0) = \chi_0 \circ F_0 I(z) = (\text{id}_{\mathbb{C}} \oplus 0)(z, 0)$. D'autre part $\chi_0 \circ F_{n+1} I_{\chi_0}(0, \omega) = \chi_0 \circ \text{int}_{\chi_0} \circ g_{cor}^+(\omega)$, or l'image de int_{χ_0} est contenue dans $\ker(\chi_0)$ et alors $\chi_0 \circ \text{int}_{\chi_0} \circ g_{cor}^+(\omega) = 0 = (\text{id}_{\mathbb{C}} \oplus 0)(0, \omega)$.

En conclusion on a bien $\chi_0 \circ F_{n+1} I_{\chi_0} = \text{id}_{\mathbb{C}} \oplus 0$.

On en déduit que $F_{n+1} I_{\chi_0}$ appartient à E_{n+1} , ce-dernier est donc de cardinal au moins 1. Montrons qu'il est aussi de cardinal au plus 1.

En effet, si $F_{n+1} I$ et $F_{n+1} I'$ sont dans E_{n+1} alors $\Psi := F_{n+1} I - F_{n+1} I'$ vérifie $d \circ \Psi = 0$ et $\chi_0 \circ \Psi = 0$. Par suite, si $\alpha \in F_{n+1} Z^1(\mathcal{E})$ alors $d \circ \Psi(\alpha) = 0$. De plus $H^0(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathbb{C}$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Psi(\alpha) = \lambda \cdot 1_{\tilde{\mathcal{E}}}$. En outre $\lambda = \chi_0 \circ \Psi(\alpha) = 0$ et donc $\Psi(\alpha) = 0$. On en déduit que $\Psi = 0$ et donc $F_{n+1} I = F_{n+1} I'$.

On vient de montrer que E_{n+1} est de cardinal exactement 1, d'où l'existence et l'unicité recherchées.

Montrons à présent l'égalité (18) ce qui terminera la preuve grâce à l'argument précédent. Considérons l'injection canonique $j_n : F_{n-1}Z^1(\mathcal{E}) \hookrightarrow F_nZ^1(\mathcal{E})$ et l'application

$$((j_n \circ \text{id}_{F_{n-1}Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{F_nZ^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} : F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow F_nZ^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^2 \quad (21)$$

qui est bien définie grâce au lemme 1.7. De plus, en composant cette application à gauche par $\iota_n \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^2}$ on a l'égalité des applications dans $\mathcal{L}(F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}), Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2)$

$$\begin{aligned} (\iota_n \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^2}) \circ ((\text{id}_{F_{n-1}Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{F_nZ^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ = (\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes (\Delta) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \circ \iota_{n+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

En composant avec ι_{n+1} l'égalité du lemme 1.8 on obtient

$$(\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes (\Delta) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1)} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \circ \iota_{n+1} = (\text{id}_{Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2} \otimes \varepsilon) \circ \Phi_{\mathcal{E}} \circ \iota_{n+1}. \quad (23)$$

Or $F_nZ^1(\mathcal{E})$ est inclus dans $Z^1(\mathcal{E}) = \ker \Phi_{\mathcal{E}}$ et donc le membre de droite de l'équation (23) est nul. On en déduit que le membre de gauche de l'équation (22) est également nul, par injectivité de $\iota_n \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^2}$ on a donc l'égalité suivante dans $\mathcal{L}(F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}), F_nZ^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^2)$

$$((\text{id}_{F_{n-1}Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + \text{id}_{F_nZ^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} = 0 \quad (24)$$

Parallèlement, on a les égalités dans $\mathcal{L}(F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}), \tilde{\mathcal{E}}^2)$

$$\begin{aligned} d \circ g &= d \circ m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &= m \circ ((d \circ F_n I \otimes \varphi) + (F_n I \otimes d \circ \varphi)) \circ \delta_{\mathcal{E}} \quad \text{car } \mathcal{E} \text{ est une dg-algèbre} \\ &= m \circ (m \circ ((F_{n-1} I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}) \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} + m \circ (F_n I \otimes d \circ \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} \quad \text{par commutativité de } A_n \\ &= m \circ (m \circ ((F_{n-1} I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}) \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} + m \circ (F_n I \otimes \varphi \circ d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \quad \text{car } \varphi \circ d = d \circ \varphi \\ &= m \circ (m \circ ((F_{n-1} I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}) \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &= m \circ (F_{n-1} I \otimes ((\Delta) \circ \varphi)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}} + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &\quad \text{car } m \text{ est associative} \\ &= m \circ (F_{n-1} I \otimes (\varphi \circ (\Delta))) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}} + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &\quad \text{car } \varphi \circ (\Delta) = (\Delta) \circ (\varphi \otimes \varphi) \\ &= m \circ (F_{n-1} I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_{n-1} Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &\quad + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Remarquons que la collection d'applications $(F_{k+1}I|_{F_kZ^1(\mathcal{E})})_{0 \leq k \leq n-1}$ fait commuter les diagrammes A_k et B_k pour tout $k = 0, \dots, n-1$. Par l'énoncé d'unicité dans $HR(n)$, on en déduit que $F_{k+1}I|_{F_kZ^1(\mathcal{E})} = F_kI$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$. En particulier $F_nI|_{F_{n-1}Z^1(\mathcal{E})} = F_{n-1}I$ et on peut poursuivre le calcul précédent

$$\begin{aligned} d \circ g &= m \circ (F_{n-1} I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_{n-1} Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &\quad + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &= m \circ (F_n I|_{F_{n-1} Z^1(\mathcal{E})} \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_{n-1} Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &\quad + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &= m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_{n-1} Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &\quad + m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d) \circ \delta_{\mathcal{E}} \\ &= m \circ (F_n I \otimes \varphi) \circ ((\text{id}_{F_{n-1} Z^1(\mathcal{E})} \otimes (\Delta)) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id}_{\mathcal{E}^1}) + (\text{id}_{F_n Z^1(\mathcal{E})} \otimes d)) \circ \delta_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Par l'égalité (24) on en déduit que le terme de droite est nul, ainsi on a montré que $d \circ g = 0$ ce qui montre l'égalité (18).

Il reste à construire I_{χ_0} et montrer son unicité.

Donnons-nous un entier m , la famille d'applications $(F_{n+m}I|_{F_n Z^1(\mathcal{E})})_{n \in \mathbb{N}}$ fait commuter les diagrammes A_n et B_n (avec $F_n I = F_{n+m} I|_{F_n Z^1(\mathcal{E})}$ dans les diagrammes) pour tout entier n car ce sont les diagrammes A_{n+m} et B_{n+m} en restriction à $F_n Z^1(\mathcal{E})$. Or on a montré que $(F_n I)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique famille d'applications vérifiant cette propriété. On en déduit que $F_n I = F_{n+m} I|_{F_n Z^1(\mathcal{E})}$ pour tout entier n et m .

Introduisons l'application $\deg : Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \{-1\} \cup \mathbb{N}$ définie par $\deg^{-1}(k) = F_k Z^1(\mathcal{E}) \setminus F_{k-1} Z^1(\mathcal{E})$ pour tout $k \geq -1$ et avec $F_{-2} Z^1(\mathcal{E}) := \emptyset$.

Pour tout $\omega \in Z^1(\mathcal{E})$, posons alors $I_{\chi_0}(\omega) := F_{\deg(\omega)} I(\omega)$ avec par convention $F_{-1} I$ qui est l'application nulle de $F_{-1} Z^1 = \{0\}$ dans $\tilde{\mathcal{E}}^0$. On définit ainsi une application $I_{\chi_0} : Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$. Montrons que I_{χ_0} est linéaire.

Remarquons que si $\omega, \omega' \in Z^1(\mathcal{E})$ alors $\deg(\omega + \omega') \leq \max(\deg(\omega), \deg(\omega'))$. Par suite

$$\begin{aligned} I_{\chi_0}(\omega + \omega') &= F_{\deg(\omega + \omega')} I(\omega + \omega') \\ &= F_{\max(\deg(\omega), \deg(\omega'))} I(\omega + \omega') \quad \text{par l'énoncé de restriction précédent} \\ &= F_{\max(\deg(\omega), \deg(\omega'))} I(\omega) + F_{\max(\deg(\omega), \deg(\omega'))} I(\omega') \\ &\quad \text{par linéarité de } F_{\max(\deg(\omega), \deg(\omega'))} I \\ &= F_{\deg(\omega)} I(\omega) + F_{\deg(\omega')} I(\omega') \quad \text{par l'énoncé de restriction précédent} \\ &= I_{\chi_0}(\omega) + I_{\chi_0}(\omega') \end{aligned}$$

De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ alors $\deg(\lambda\omega) = \deg(\omega)$ et donc

$$\begin{aligned} I_{\chi_0}(\lambda\omega) &= F_{\deg(\lambda\omega)} I(\lambda\omega) \\ &= \lambda F_{\deg(\lambda\omega)} I(\omega) \quad \text{par linéarité de } F_{\deg(\lambda\omega)} I \\ &= \lambda F_{\deg(\omega)} I(\omega) \quad \text{car } \deg(\lambda\omega) = \deg(\omega) \\ &= \lambda I_{\chi_0}(\omega) \end{aligned}$$

Enfin, $I_{\chi_0}(0) = F_{\deg(0)} I(0) = F_{-1} I(0) = 0$.

On a montré que I_{χ_0} est linéaire.

Si $\omega \in Z^1(\mathcal{E})$ et $\omega \neq 0$ alors $\delta_{\mathcal{E}}(\omega) \in F_{\deg(\omega)-1} Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1$. De plus $I_{\chi_0}|_{F_{\deg(\omega)-1} Z^1(\mathcal{E})} = F_{\deg(\omega)-1} I$ et alors

$$(I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}(\omega) = (F_{\deg(\omega)-1} I \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}(\omega) \quad (25)$$

donc

$$m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}(\omega) = m \circ (F_{\deg(\omega)-1} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}(\omega) = d \circ F_{\deg(\omega)} I(\omega) = d \circ I_{\chi_0}(\omega).$$

Et

$$\chi_0 \circ I_{\chi_0}(\omega) = \chi_0 \circ F_{\deg(\omega)} I(\omega) = \varepsilon \circ \iota_{\deg(\omega)}(\omega) = \varepsilon \circ \iota(\omega).$$

On a encore $d \circ I_{\chi_0}(0) = m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}}(0) = 0$ et $\chi_0 \circ I_{\chi_0}(0) = \varepsilon \circ \iota(0) = 0$.

L'application I_{χ_0} fait donc commuter les diagrammes A et B .

Enfin, l'application I_{χ_0} est unique. En effet, si J fait également commuter les diagrammes A et B alors la famille d'applications $(J|_{F_n Z^1(\mathcal{E})})_{n \in \mathbb{N}}$ fait commuter les diagrammes A_n et B_n pour tout

entier n . Par unicité de la collection d'applications, on a $J_{|F_n Z^1(\mathcal{E})} = F_n I = I_{\chi_0|F_n Z^1(\mathcal{E})}$ pour tout entier n , d'où $J = I_{\chi_0}$. $\square$

Proposition 1.10. (a) Soit $(\mathcal{E}, d_{\mathcal{E}}), (\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ deux dg-algèbres et $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de dg-algèbres, alors

$$g(Z^1(\mathcal{E})) \subset Z^1(\mathcal{F}). \quad (26)$$

(b) Si de plus $\varphi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}, \varphi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ sont des morphismes de dg-algèbres avec $H^0(\tilde{\mathcal{E}}) = H^0(\tilde{\mathcal{F}}) = 1$ et $H^1(\tilde{\mathcal{E}}) = H^1(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathbb{C}$, donnons nous aussi $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{E}})$ et $\mu_0 \in X(\tilde{\mathcal{F}})$. S'il existe un morphisme de dg-algèbres $\tilde{g} : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ tel que les diagrammes 7 et 8 soient commutatifs alors le diagramme 9 est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{E}}} & \tilde{\mathcal{E}} \\ \downarrow g & & \downarrow \tilde{g} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{F}}} & \tilde{\mathcal{F}} \end{array}$$

FIGURE 7 –

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{E}}^0 & & \\ \downarrow \tilde{g} & \searrow \chi_0 & \\ \tilde{\mathcal{F}}^0 & \nearrow \mu_0 & \mathbb{C} \end{array}$$

FIGURE 8 –

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{I_{\chi_0}} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow g & & \downarrow \tilde{g} \\ Z^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{I_{\mu_0}} & \tilde{\mathcal{F}}^0 \end{array}$$

FIGURE 9 –

Démonstration. (a) Le diagramme 10 est commutatif et les lignes horizontales sont exactes. On en déduit l'inclusion désirée par une chasse au diagramme.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^1(\mathcal{E}) & \longrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}} & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \\ & & & & \downarrow g & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & Z^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & Sh(\mathcal{F}^1) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{F}}} & Sh(\mathcal{F}^1) \otimes \mathcal{F}^2 \otimes Sh(\mathcal{F}^1) \end{array}$$

FIGURE 10 –

(b) Pour tout entier n , introduisons

$$F_n Z^1(\mathcal{E}) := F_n Sh(\mathcal{E}^1) \cap Z^1(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad F_n Z^1(\mathcal{F}) := F_n Sh(\mathcal{F}^1) \cap Z^1(\mathcal{F}).$$

Les suites $(F_n Z^1(\mathcal{E}))_n$ et $(F_n Z^1(\mathcal{F}))_n$ sont des filtrations croissantes et totales de $Z^1(\mathcal{E})$ et $Z^1(\mathcal{F})$ respectivement. En particulier pour tout entier n on a $g(F_n Z^1(\mathcal{E})) \subset F_n Z^1(\mathcal{F})$ car g est un morphisme de dg-algèbres. Montrons par récurrence sur n que le diagramme 11 est commutatif pour

tout entier n , ce qui démontrera le résultat.

$$\begin{array}{ccc}
F_n Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{I_{\chi_0}} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\
\downarrow g & & \downarrow \tilde{g} \\
F_n Z^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{I_{\mu_0}} & \tilde{\mathcal{F}}^0
\end{array}$$

FIGURE 11 –

Montrons le pour $n = 0$, d'une part $\tilde{g}(I_{\chi_0}(1_{\mathcal{E}})) = \tilde{g}(1_{\tilde{\mathcal{E}}}) = 1_{\tilde{\mathcal{F}}}$, et d'autre part $I_{\mu_0}(g(1_{\mathcal{E}})) = I_{\mu_0}(1_{\mathcal{F}}) = 1_{\tilde{\mathcal{F}}}$. D'où $\tilde{g} \circ I_{\chi_0} = I_{\mu_0} \circ g$ dans $\mathcal{L}(F_0 Z^1(\mathcal{E}), \tilde{\mathcal{F}}^0)$ ce qui termine l'initialisation.

Supposons que pour un entier n fixé le diagramme 11 soit commutatif. Dans $\mathcal{L}(F_{n+1} Z^1(\mathcal{E}), \tilde{\mathcal{F}}^1)$ on a les égalités

$$\begin{aligned}
d_{\tilde{\mathcal{F}}} \circ \tilde{g} \circ I_{\chi_0} &= \tilde{g} \circ d_{\tilde{\mathcal{E}}} \circ I_{\chi_0} \quad \text{car } \tilde{g} \text{ est un morphisme de dg-algèbres} \\
&= \tilde{g} \circ m \circ (\varphi_{\mathcal{E}} \otimes I_{\chi_0}) \circ \delta_{\mathcal{E}} \quad \text{par le théorème 1.9} \\
&= m \circ (\tilde{g} \circ \varphi_{\mathcal{E}} \otimes \tilde{g} \circ I_{\chi_0}) \circ \delta_{\mathcal{E}} \quad \text{car } \tilde{g} \text{ est un morphisme de dg-algèbres}
\end{aligned}$$

or par hypothèse on a $\tilde{g} \circ \varphi_{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathcal{F}} \circ g$. De plus, comme l'image de $\delta_{\mathcal{E}}$ est incluse dans $\mathcal{E}^1 \otimes F_n Z^1(\mathcal{E})$ (lemme 1.7) alors par hypothèse de récurrence (diagramme 7) on a $(\text{id}_{\mathcal{E}^1} \otimes \tilde{g} \circ I_{\chi_0}) \circ \delta_{\mathcal{E}} = (\text{id}_{\mathcal{E}^1} \otimes I_{\mu_0} \circ g) \circ \delta_{\mathcal{E}}$ d'où

$$m \circ (\tilde{g} \circ \varphi_{\mathcal{E}} \otimes \tilde{g} \circ I_{\chi_0}) \circ \delta_{\mathcal{E}} = m \circ (\varphi_{\mathcal{F}} \circ g \otimes I_{\mu_0} \circ g) \circ \delta_{\mathcal{E}} \quad (27)$$

comme g est un morphisme de dg-algèbres alors

$$m \circ (\varphi_{\mathcal{F}} \circ g \otimes I_{\mu_0} \circ g) \circ \delta_{\mathcal{E}} = m \circ (\varphi_{\mathcal{F}} \otimes I_{\mu_0}) \circ \delta_{\mathcal{F}} \circ g. \quad (28)$$

Enfin par le théorème 1.9 on en déduit que

$$m \circ (\varphi_{\mathcal{F}} \otimes I_{\mu_0}) \circ \delta_{\mathcal{F}} \circ g = d_{\tilde{\mathcal{F}}} \circ I_{\mu_0} \circ g. \quad (29)$$

Par suite, on obtient l'égalité dans $\mathcal{L}(F_{n+1} Z^1(\mathcal{E}), \tilde{\mathcal{F}}^1)$

$$d_{\tilde{\mathcal{F}}} \circ \tilde{g} \circ I_{\chi_0} = d_{\tilde{\mathcal{F}}} \circ I_{\mu_0} \circ g \quad (30)$$

En particulier, si $\alpha \in F_{n+1} Z^1(\mathcal{E})$ alors

$$(\tilde{g} \circ I_{\chi_0} - I_{\mu_0} \circ g)(\alpha) \in \ker(d_{\tilde{\mathcal{F}}} : \tilde{\mathcal{F}}^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^1) \quad (31)$$

comme $H^0(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\tilde{g} \circ I_{\chi_0} - I_{\mu_0} \circ g)(\alpha) = \lambda \cdot 1_{\tilde{\mathcal{F}}}$. Cependant, on a les égalités dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \mu_0(\tilde{g} \circ I_{\chi_0} - I_{\mu_0} \circ g)(\alpha) \\
&= \mu_0(\tilde{g} \circ I_{\chi_0}(\alpha)) - \mu_0(I_{\mu_0} \circ g(\alpha)) \quad \text{car } \mu_0 \in X(\tilde{\mathcal{F}}^0) \\
&= \chi_0(I_{\chi_0}(\alpha)) - \mu_0(I_{\mu_0} \circ g(\alpha)) \quad \text{par commutativité du diag 8} \\
&= \varepsilon_{Sh(\mathcal{E}^1)}(\alpha) - \varepsilon_{Sh(\mathcal{F}^1)}(g(\alpha))
\end{aligned}$$

Notons α sous la forme $l \cdot 1_{\mathcal{E}} + \alpha'$ avec $l \in \mathbb{C}$ et $\alpha' \in Sh(\mathcal{E}^1)$ sans terme constant, alors $g(\alpha) = l \cdot 1_{\mathcal{F}} + g(\alpha')$ avec $g(\alpha')$ sans terme constant et donc

$$\lambda = \varepsilon_{Sh(\mathcal{E}^1)}(\alpha) - \varepsilon_{Sh(\mathcal{F}^1)}(g(\alpha)) = l - l = 0.$$

Il en découle que $\tilde{g} \circ I_{\chi_0} - I_{\mu_0} \circ g = 0$ dans $\mathcal{L}(F_{n+1}Z^1(\mathcal{E}), \tilde{\mathcal{F}}^0)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 1.11. *L'application intégrale itérée $I_{\chi_0} : Z^1(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $I_{\chi_0}(\alpha \sqcup \beta) - I_{\chi_0}(\alpha)I_{\chi_0}(\beta) = 0$ pour tout $(\alpha, \beta) \in (Z^1(\mathcal{E}))^2$, pour cela considérons l'application

$$\begin{aligned} D : \quad Z^1(\mathcal{E}^1) \otimes Z^1(\mathcal{E}^1) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto I_{\chi_0}(\alpha \sqcup \beta) - I_{\chi_0}(\alpha)I_{\chi_0}(\beta) \end{aligned}$$

et montrons que $D = 0$.

Posons pour tout entier n

$$F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})) := \sum_{p+q=n} F_p Z^1(\mathcal{E}) \otimes F_q Z^1(\mathcal{E})$$

avec $F_p Z^1(\mathcal{E}) = F_p Sh(\mathcal{E}^1) \cap Z^1(\mathcal{E})$.

La suite $(F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})))_n$ est une filtration croissante et totale de $Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})$.

Montrons par récurrence sur n que $D(F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) = 0$, ce qui terminera la preuve.

On a $F_0(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})) = 1 \otimes 1$ et donc

$$D(1) = I_{\chi_0}(1) - I_{\chi_0}(1)I_{\chi_0}(1) = 1_{\tilde{\mathcal{E}}} - 1_{\tilde{\mathcal{E}}} \cdot 1_{\tilde{\mathcal{E}}} = 0 \quad (32)$$

Supposons que pour un certain entier n on ait $D(F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) = 0$ et montrons que $D(F_{n+1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) = 0$.

Commençons par montrer que le diagramme 12 est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{D} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow d \\ \mathcal{E}^1 \otimes Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}) & \xrightarrow{m(\text{id} \otimes D)} & \tilde{\mathcal{E}}^1 \end{array}$$

FIGURE 12 –

Soit $\alpha \otimes \beta \in Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})$, par linéarité de d on a l'égalité

$$d \circ D(\alpha \otimes \beta) = d \circ I_{\chi_0}(\alpha \sqcup \beta) - d \circ I_{\chi_0}(\alpha) \cdot I_{\chi_0}(\beta) - I_{\chi_0}(\alpha) \cdot d \circ I_{\chi_0}(\beta) \quad (33)$$

Rappelons que $Z^1(\mathcal{E})$ est une algèbre (corolaire 1.6), la définition récursive du shuffle donne alors accès à l'égalité dans $\mathcal{L}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}), Z^1(\mathcal{E}))$

$$\sqcup = \text{conc} \circ (\text{id} \otimes \sqcup) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \delta_{\mathcal{E}}). \quad (34)$$

Écrivons $\delta_{\mathcal{E}}(\alpha) = \sum_i \omega_i \otimes \alpha_i$ et $\delta_{\mathcal{E}}(\beta) = \sum_j \omega'_j \otimes \beta_j$, dès lors

$$\begin{aligned} d \circ I_{\chi_0}(\alpha \sqcup \beta) &= m \circ (\varphi \otimes I_{\chi_0})(\alpha \sqcup \beta) = \sum_i \varphi(\omega_i) I_{\chi_0}(\alpha_i \sqcup \beta) + \sum_j \varphi(\omega'_j) I_{\chi_0}(\alpha \sqcup \beta_j), \quad \text{par (34)} \\ d \circ I_{\chi_0}(\alpha) \cdot I_{\chi_0}(\beta) &= m \circ (\varphi \otimes I_{\chi_0})(\alpha) \cdot I_{\chi_0}(\beta) = \sum_i \varphi(\omega_i) I_{\chi_0}(\alpha_i) \cdot I_{\chi_0}(\beta), \\ I_{\chi_0}(\alpha) \cdot d \circ I_{\chi_0}(\beta) &= I_{\chi_0}(\alpha) \cdot m \circ (\varphi \otimes I_{\chi_0})(\beta) = \sum_j I_{\chi_0}(\alpha) \cdot \varphi(\omega'_j) I_{\chi_0}(\beta_j). \end{aligned}$$

En combinant ces trois égalités avec l'égalité 33 on obtient

$$\begin{aligned} d \circ D(\alpha \otimes \beta) &= m \circ (\varphi \otimes D) \left(\sum_i \omega_i \otimes \alpha_i \otimes \beta + \sum_j \omega'_j \otimes \alpha \otimes \beta_j \right) \\ &= m \circ (\varphi \otimes D) (\delta_{\mathcal{E}}(\alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes \delta_{\mathcal{E}}(\beta)) \\ &= m \circ (\varphi \otimes D) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \delta_{\mathcal{E}})(\alpha \otimes \beta) \end{aligned}$$

ce qui montre que le diagramme 12 est commutatif.

Pour tout entier strictement positif n , le diagramme 12 en restriction à $F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))$ donne le diagramme 13 qui est donc commutatif.

$$\begin{array}{ccc} F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})) & \xrightarrow{D} & \tilde{\mathcal{E}}^0 \\ \downarrow \delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \delta_{\mathcal{E}} & & \downarrow d \\ \mathcal{E}^1 \otimes F_{n-1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E})) & \xrightarrow{m(\text{id} \otimes D)} & \tilde{\mathcal{E}}^1 \end{array}$$

FIGURE 13 –

On en déduit que

$$\begin{aligned} d \circ D(F_{n+1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) &= m \circ (\text{id} \otimes D) \circ (\delta_{\mathcal{E}} \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \delta_{\mathcal{E}})(F_{n+1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) \\ &= m \circ (\text{id} \otimes D)(\mathcal{E}^1 \otimes F_n(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) \\ &= m \circ (\mathcal{E}^1 \otimes 0) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit $\alpha \otimes \beta \in F_{n+1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))$, par ce qui précède on a $D(\alpha \otimes \beta) \in \ker(d : \tilde{\mathcal{E}}^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^1)$. Or $H^0(\tilde{\mathcal{E}}^0) = \mathbb{C}$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $D(\alpha \otimes \beta) = \lambda \cdot 1_{\tilde{\mathcal{E}}}$. Cependant on a les égalités dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \lambda &= \chi_0 \circ D(\alpha \otimes \beta) = \chi_0 \circ I_{\chi_0}(\alpha \sqcup \beta) - \chi_0 \circ I_{\chi_0}(\alpha) \cdot \chi_0 \circ I_{\chi_0}(\beta) \quad \text{car } \chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0) \\ &= \varepsilon(\alpha \sqcup \beta) - \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon(\beta) \quad \text{car } \varepsilon = \chi_0 \circ I_{\chi_0} \text{ (th 1.9)} \\ &= \varepsilon(\alpha \sqcup \beta) - \varepsilon(\alpha \sqcup \beta) \quad \text{car } \varepsilon \text{ est un morphisme d'algèbres} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $\alpha \otimes \beta \in F_{n+1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))$ on a $D(\alpha \otimes \beta) = 0$, dit autrement $D(F_{n+1}(Z^1(\mathcal{E}) \otimes Z^1(\mathcal{E}))) = 0$. $\square$

1.3 Cas particulier des variétés connexes

On se place dans le cas particulier où $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{lisse}([0, 1])$ et $\chi_0 := ev_0 : \mathcal{E}_{lisse}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ l'application évaluation en 0. Dans cette situation on a en particulier, $Z^1(\mathcal{E}_{lisse}([0, 1]) = Sh(\mathcal{E}_{lisse}^1([0, 1]))$ et donc l'application I_{ev_0} construite dans le théorème 1.9 est un élément de $\mathcal{L}(Sh(\mathcal{E}_{lisse}^1([0, 1])), \mathcal{C}^\infty([0, 1]))$.

Définition 1.12. Définissons l'application linéaire intégrale itérée par

$$int : \begin{cases} Sh(\mathcal{E}^1([0, 1])) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty([0, 1]) \\ [\omega_1 | \dots | \omega_k] & \longmapsto & \left(y \mapsto \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq y} \omega_1(t_1) \dots \omega_n(t_n) \right) \\ 1 & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

Lemma 1.13. Avec $M = [0, 1]$ et $\chi_0 = ev_0$ on a l'égalité des applications linéaires $I_{ev_0} = int$ dans $\mathcal{L}(Sh(\mathcal{E}_{lisse}^1([0, 1])), \mathcal{C}^\infty([0, 1]))$.

Démonstration. Tout d'abord,

$$\forall \omega \in Sh(\mathcal{E}_{lisse}^1([0, 1]), \quad int(\omega)(0) = \varepsilon(\omega) \quad (35)$$

autrement-dit, avec $M = [0, 1]$ et $\chi_0 = ev_0$, le diagramme B (figure 3) en remplaçant I_{χ_0} par int de la définition précédente commute.

De plus,

$$\forall [\omega_1 | \dots | \omega_k] \in Sh(\mathcal{E}_{lisse}^1([0, 1]), \quad d \circ int([\omega_1 | \dots | \omega_k]) = \omega_k \cdot int([\omega_1 | \dots | \omega_{k-1}]) \quad (36)$$

Par linéarité de int on en déduit que le diagramme A (figure 2) en remplaçant I_{χ_0} par int commute. Par l'énoncé d'unicité dans le théorème 1.9, on en déduit le résultat. $\square$

Définition 1.14. Soit M une variété algébrique connexe, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ un chemin et $[\omega_1 | \dots | \omega_n] \in Sh(\mathcal{E}^1(M))$. **L'intégrale itérée** de $[\omega_1 | \dots | \omega_n] \in Sh(\mathcal{E}^1(M))$ suivant γ est

$$\int_\gamma \omega_1 \dots \omega_n := \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \gamma^*(\omega_1(t_1)) \dots \gamma^*(\omega_n(t_n)).$$

Si $n = 0$ alors on définit $\int_\gamma 1 = 1$.

Pour plus d'approfondissements sur les intégrales itérées et leurs propriétés on pourra consulter [BF ; Bro11]

Donnons nous à présent M une variété lisse (resp. algébrique) connexe. On a alors $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{lisse}(M)$ et $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{lisse}(\widetilde{M})$ (resp. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{alg}(M)$ et $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{alg}(\widetilde{M})$), le morphisme de $\mathcal{E} \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}$ est donnée par le pullback de la projection de $\widetilde{M}$ sur M . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira seulement $\mathcal{E}(M)$ au lieu de $\mathcal{E}_{lisse}(M)$, $\mathcal{E}_{alg}(M)$ ou $\mathcal{E}_{hol}(M)$.

De plus $\widetilde{M}$ est simplement connexe et on a $H^0(\mathcal{E}_{lisse}^0(\widetilde{M})) = \mathbb{C}$, $H^1(\mathcal{E}_{lisse}^1(\widetilde{M})) = 0$ (resp. $H^0(\mathcal{E}^0(\widetilde{M})) = \mathbb{C}$, $H^1(\mathcal{E}^1(\widetilde{M})) = 0$).

Proposition 1.15. Soient $x_0, x \in \widetilde{M}$ et $\alpha \in Z^1(\mathcal{E}_{lisse}^1(M))$ (resp. $\alpha \in Z^1(\mathcal{E}^1(M))$) alors pour tout $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ un chemin avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$ on a

$$I_{ev_{x_0}}(\alpha)(x) = int((p \circ \gamma)^* \alpha)(1) \quad (37)$$

avec $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ la projection et $\gamma^* \in \mathcal{L}(Z^1(\mathcal{E}_{lisse}(\widetilde{M})), Sh(\mathcal{C}^\infty([0, 1]) \cdot dx)$
(resp. $\gamma^* \in \mathcal{L}(Z^1(\mathcal{E}(\widetilde{M})), Sh(\mathcal{C}^\infty([0, 1]) \cdot dx)$) induit par $\mathcal{E}^1(\widetilde{M}) \rightarrow \mathcal{E}_{lisse}^1(\widetilde{M}) \rightarrow \mathcal{E}_{lisse}^1([0, 1])$.

Démonstration. Traitons le cas M variété algébrique, le cas lisse se démontrant exactement de la même manière en changeant $\mathcal{E}(M)$ et $\mathcal{E}(\widetilde{M})$ par $\mathcal{E}_{\text{lisse}}(M)$ et $\mathcal{E}_{\text{lisse}}(\widetilde{M})$ respectivement. Montrons que le diagramme 14 est commutatif ce qui terminera la preuve.

$$\begin{array}{ccccc}
Z^1(\mathcal{E}(M)) & \xrightarrow{I_{ev_{x_0}}} & \mathcal{E}^0(\widetilde{M}) & & \\
\downarrow (p \circ \gamma)^* & & \downarrow \gamma^* & \searrow ev_x & \\
Z^1(\mathcal{E}_{\text{lisse}}([0, 1])) & \xrightarrow{int} & \mathcal{E}_{\text{lisse}}^0([0, 1]) & \nearrow ev_1 & \mathbb{C}
\end{array}$$

FIGURE 14 –

Remarquons que les diagrammes 15 et 16 sont commutatifs. En effet, par fonctorialité du pull-back et que $\gamma^* \circ p^* = (p \circ \gamma)^*$ le diagramme 15 est commutatif. De plus toutes les flèches de ce diagramme sont des morphismes de dg-algèbres. Aussi comme $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$ alors le diagramme 16 et le triangle de droite du diagramme 14 sont commutatifs. Par la proposition 1.10 le diagramme 17 est commutatif. Combiné avec le lemme 1.13, on en déduit que le carré du diagramme 14 est commutatif, ce qui conclut.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}(M) & \xrightarrow{p^*} & \mathcal{E}(\widetilde{M}) \\
\downarrow (p \circ \gamma)^* & & \downarrow \gamma^* \\
\mathcal{E}_{\text{lisse}}([0, 1]) & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{E}_{\text{lisse}}([0, 1])
\end{array}$$

FIGURE 15 –

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}^0(\widetilde{M}) & & \\
\downarrow \gamma^* & \searrow ev_{x_0} & \\
\mathcal{E}_{\text{lisse}}^0([0, 1]) & \nearrow ev_0 & \mathbb{C}
\end{array}$$

FIGURE 16 –

$$\begin{array}{ccc}
Z^1(\mathcal{E}(M)) & \xrightarrow{I_{ev_{x_0}}} & \mathcal{E}^0(\widetilde{M}) \\
\downarrow (p \circ \gamma)^* & & \downarrow \gamma^* \\
Z^1(\mathcal{E}_{\text{lisse}}([0, 1])) & \xrightarrow{I_{ev_0}} & \mathcal{E}_{\text{lisse}}^0([0, 1])
\end{array}$$

FIGURE 17 –

□

De la proposition précédente, on en déduit (corollaire 1.16) une démonstration alternative de [BF, th 3.265] qui n'utilise pas le théorème de Stokes.

Corollary 1.16. *Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ deux chemins avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, et $\alpha \in Z^1(\mathcal{E})$ alors*

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

où $\int_{\gamma_1} \alpha$ désigne l'intégrale itérée définie en 1.14

Démonstration. Posons $x_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $x := \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ on a

$$\int_{\gamma_1} \alpha = ev_1 \circ int \circ \gamma_1^*(\alpha). \tag{38}$$

Par commutativité du diagramme 14

$$ev_1 \circ int \circ \gamma_1^*(\alpha) = ev_{x_1} \circ I_{x_0}(\alpha) \quad (39)$$

De même

$$ev_1 \circ int \circ \gamma_2^*(\alpha) = ev_{x_1} \circ I_{x_0}(\alpha) \quad (40)$$

On en déduit que

$$\int_{\gamma_1} \alpha = ev_1 \circ int \circ \gamma_1^*(\alpha) = ev_1 \circ int \circ \gamma_2^*(\alpha) = \int_{\gamma_2} \alpha. \quad (41)$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

2 Éléments de Maurer-Cartan

Dans toute cette section on fixe $(\mathcal{E}, d)$ une dg-algèbre commutative graduée et $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie graduée.

En section 2.1, nous associons à tout couple $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ d'une dg-algèbre et d'une algèbre de Lie l'ensemble $MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ de ses éléments de Maurer-Cartan de degré 1. En section 2.2, nous associons un morphisme d'algèbres à tout éléments de Maurer-Cartan de degré 1 du couple $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$.

2.1 Définition et fonctorialité

On peut munir $\mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathfrak{a}^\wedge$ du produit $\wedge : (\mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathfrak{a}^\wedge) \widehat{\otimes} (\mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathfrak{a}^\wedge) \rightarrow \mathcal{E} \widehat{\otimes} \mathfrak{a}^\wedge$ qui à $(\omega_1 \widehat{\otimes} a_1) \widehat{\otimes} (\omega_2 \widehat{\otimes} a_2)$ associe $(\omega_1 \wedge \omega_2) \widehat{\otimes} [a_1, a_2]$.

Définition 2.1. Un **élément de Maurer-Cartan** de degré 1 de $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ est un élément $A \in \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}_1$ telle que $dA + \frac{1}{2}A \wedge A = 0$.

On note $MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan de degré 1 de $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$.

On se donne à présent deux dg-algèbres commutatives graduées $(\mathcal{E}, d_{\mathcal{E}})$, $(\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ et deux algèbres de Lie $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ positivement graduées.

Lemma 2.2. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de dg-algèbre, alors

$$(f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})) \subset MC_1(\mathcal{F}, \mathfrak{a}).$$

Démonstration. Par hypothèse f est un morphisme de dg-algèbre et donc les figures 18 et 19 sont des diagrammes commutatifs. En particulier si $\theta \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ alors par commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}) \otimes (\mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}) & \xrightarrow{\wedge_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E}^2 \otimes \mathfrak{a} \\ \downarrow (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}}) \otimes (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}}) & & \downarrow f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}} \\ (\mathcal{F}^1 \otimes \mathfrak{a}) \otimes (\mathcal{F}^1 \otimes \mathfrak{a}) & \xrightarrow{\wedge_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}^2 \otimes \mathfrak{a} \end{array}$$

FIGURE 18 – .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a} & \xrightarrow{d_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E}^2 \otimes \mathfrak{a} \\ \downarrow f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}} & & \downarrow f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}} \\ \mathcal{F} \otimes \mathfrak{a} & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}^2 \otimes \mathfrak{a} \end{array}$$

FIGURE 19 – .

on a

$$d_{\mathcal{F}} \circ (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) = (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}}) \circ d_{\mathcal{E}}(\theta) \quad (42)$$

et

$$(f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) \wedge_{\mathcal{F}} (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) = (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta \wedge_{\mathcal{E}} \theta). \quad (43)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}} \circ (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) + \frac{1}{2}(f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) \wedge_{\mathcal{F}} (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) &= (f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(d_{\mathcal{E}}\theta + \frac{1}{2}\theta \wedge_{\mathcal{E}} \theta) \\ &= 0 \quad \text{car } \theta \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

En conclusion $(f \otimes \text{id}_{\mathfrak{a}})(\theta) \in MC_1(\mathcal{F}, \mathfrak{a})$, d'où le résultat. $\square$

Lemma 2.3. Soit $g : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ un morphisme d'algèbres de Lie, alors g induit une application

$$g_* : \begin{array}{ccc} MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a}) & \rightarrow & MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{b}) \\ A & \mapsto & (\text{id}_{\mathcal{E}(M)} \otimes g)(A) \end{array}$$

qu'on appelle **push-forward** de g .

Démonstration. On sait que g est un morphisme d'algèbres de Lie, de plus $\text{id}_{\mathcal{E}}$ commute avec $d_{\mathcal{E}}$, les figures 20 et 21 sont donc des diagrammes commutatifs.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}) \otimes (\mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}) & \xrightarrow{\wedge_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E}^2 \otimes \mathfrak{a} \\ \downarrow (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g) \otimes (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g) & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g \\ (\mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{b}) \otimes (\mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{b}) & \xrightarrow{\wedge_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E}^2 \otimes \mathfrak{b} \end{array}$$

FIGURE 20 – .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a} & \xrightarrow{d_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E}^2 \otimes \mathfrak{a} \\ \downarrow \text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g \\ \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{b} & \xrightarrow{d_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E}^2 \otimes \mathfrak{b} \end{array}$$

FIGURE 21 – .

En particulier, si $\theta \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ alors par commutativité des diagrammes on a

$$d_{\mathcal{E}} \circ (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta) = (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g) \circ d_{\mathcal{E}}(\theta), \quad (44)$$

et

$$(\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta) \wedge_{\mathcal{E}} (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta) = (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta \wedge_{\mathcal{E}} \theta). \quad (45)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{E}} \circ (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta) + \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta) \wedge_{\mathcal{E}} (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\theta) &= (\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(d_{\mathcal{E}}\theta + \frac{1}{2}\theta \wedge_{\mathcal{E}} \theta) \\ &= 0 \quad \text{car } \theta \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a}) \end{aligned}$$

En conclusion $(\text{id}_{\mathcal{E}} \otimes g)(\omega \otimes a) \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{b})$, d'où le résultat. $\square$

Les énoncés 2.2 et 2.3 montrent que $MC_1(\bullet, \bullet)$ est un foncteur de la catégorie produit $DGA \times LA$ des dg-algèbres et algèbres de Lie dans la catégorie Ens des ensembles.

Terminons la section avec la proposition suivante qui sera utile pour étudier certains éléments de Maurer-Cartan dans la suite du mémoire.

Proposition 2.4. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de dg-algèbres et $g : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ un morphisme d'algèbres de Lie. Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}$ on a

$$d_{\mathcal{F}}(f \otimes g)(\alpha) + (f \otimes g)(\alpha) \wedge_{\mathcal{F}} (f \otimes g)(\alpha) = (f \otimes g)(d_{\mathcal{E}}\alpha + \alpha \wedge_{\mathcal{E}} \alpha) \quad (46)$$

Démonstration. Comme f est un morphisme de dg-algèbres alors

$$d_{\mathcal{F}}(f \otimes g)(\alpha) = (f \otimes g)(d_{\mathcal{E}}\alpha).$$

De plus, f et g sont respectivement des morphismes de dg-algèbres et d'algèbres de Lie et donc

$$(f \otimes g)(\alpha) \wedge_{\mathcal{F}} (f \otimes g)(\alpha) = (f \otimes g)(\alpha \wedge_{\mathcal{E}} \alpha).$$

Le résultat en découle. $\square$

2.2 Morphisme associé à un élément de Maurer-Cartan

Dans cette sous-section on suppose que $\mathfrak{a}$ est de dimension finie en chaque degré. Ainsi $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$ est une algèbre de Hopf graduée de dimension finie en chaque degré donc son dual gradué $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^*$ est également une algèbre de Hopf.

Donnons nous $J \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ et écrivons le sous la forme $J = \sum_{i \in I} a_i \otimes \omega_i$ avec I un ensemble d'indexation fini. Le fait que J soit un élément de Maurer-Cartan de $(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ se traduit dans $\mathcal{U}(\mathfrak{a}) \otimes \mathcal{E}^2$ par l'égalité

$$\sum_{i \in I} a_i \otimes d\omega_i + \frac{1}{2} \sum_{(s,t) \in I^2} [a_s, a_t] \otimes (\omega_s \wedge \omega_t) = 0. \quad (47)$$

Cela permet de définir l'application linéaire

$$\Psi_J : \begin{cases} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ & \longrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) \\ \xi & \longmapsto & \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i_1, \dots, i_k \in I} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \end{cases}$$

La somme a bien un sens. En effet, quitte à décomposer ξ en ses composantes homogènes, on peut supposer que ξ est homogène de degré n , i.e. $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^*$. Mais alors si k est strictement plus grand que n la contribution des termes $\sum_{i_1, \dots, i_k \in I} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}]$ dans $\Psi_J(\xi)$ est nulle. Ainsi,

comme I est finie on en déduit que la somme $\Psi_J(\xi)$ est en fait finie.

Étudions les propriétés de Ψ_J .

Proposition 2.5. *On a l'inclusion $Im(\Psi_J) \subset Z^1(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Donnons $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$ et montrons que $\Phi_{\mathcal{E}}(\Psi_J(\xi)) = 0$.

Introduisons l'application linéaire

$$G_\xi : \begin{cases} \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \otimes \mathcal{E}^2 & \longrightarrow & Sh(\mathcal{E}^1) \otimes \mathcal{E}^2 \otimes Sh(\mathcal{E}^1) \\ u \otimes e & \longmapsto & \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, \\ j_1, \dots, j_l \in I}} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k} u a_{j_1} \dots a_{j_l}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \otimes e \otimes [\omega_{j_1} | \dots | \omega_{j_l}] \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{E}}(\Psi_J(\xi)) &= \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, i, \\ j_1, \dots, j_l}} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k} a_i a_{j_1} \dots a_{j_l}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \otimes d\omega_i \otimes [\omega_{j_1} | \dots | \omega_{j_l}] \\ &\quad + \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k, s, t, \\ j_1, \dots, j_l}} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k} a_s a_t a_{j_1} \dots a_{j_l}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \otimes (\omega_s \wedge \omega_t) \otimes [\omega_{j_1} | \dots | \omega_{j_l}] \\ &= G_\xi(dJ + \frac{1}{2} J \wedge J) \\ &= 0 \quad \text{car } J \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a}) \end{aligned}$$

ce qui conclut □

Proposition 2.6. *L'application Ψ_J est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. Afin d'alléger les notations, si k est un entier et $i \in I^{[1,k]}$ où I est l'ensemble d'indexation des éléments de J , on notera $a_{\underline{i}}$ et $\omega_{\underline{i}}$ les éléments $a_{i(1)} \dots a_{i(k)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$ et $[\omega_{i(1)} | \dots | \omega_{i(n)}] \in$

$Sh(\mathcal{E}^1)$ respectivement.

Soient $\xi, \eta \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$, on a

$$\begin{aligned}
\Psi_J(\xi * \eta) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k]} \xi * \eta(a_{\underline{i}}) \omega_{\underline{i}} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k]} \sum_{\mathbb{[1, k]} = A \sqcup B} \xi(a_{\underline{i}|_A}) \eta(a_{\underline{i}|_B}) \omega_{\underline{i}} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\mathbb{[1, k]} = A \sqcup B} \sum_{\substack{\underline{u} \in I^A \\ \underline{v} \in I^B}} \sum_{\substack{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k] \\ \underline{i}|_A = \underline{u} \\ \underline{i}|_B = \underline{v}}} \xi(a_{\underline{u}}) \eta(a_{\underline{v}}) \omega_{\underline{i}} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{k', k'' \\ k' + k'' = k}} \sum_{\substack{A, B, \\ \mathbb{[1, k]} = A \sqcup B \\ (|A|, |B|) = (k', k'')}} \sum_{\substack{\underline{u} \in I^A \\ \underline{v} \in I^B}} \sum_{\substack{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k] \\ \underline{i}|_A = \underline{u} \\ \underline{i}|_B = \underline{v}}} \xi(a_{\underline{u}}) \eta(a_{\underline{v}}) \omega_{\underline{i}}
\end{aligned}$$

□

remarquons qu'à k' et k'' fixées on a une bijection entre $Sh(k', k'')$ et l'ensemble $\{(A, B) \mid A \sqcup B = \mathbb{[1, k]}\text{ et }(|A|, |B|) = (k', k'')\}$ donnée par $\sigma \mapsto (\sigma(\mathbb{[1, k']}), \sigma(k' + \mathbb{[1, k'']}))$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\Psi_J(\xi * \eta) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{k', k'' \\ k' + k'' = k}} \sum_{\sigma \in Sh(k', k'')} \sum_{\substack{\underline{u} \in I^{\sigma(\mathbb{[1, k']})} \\ \underline{v} \in I^{\sigma(k' + \mathbb{[1, k'']})}}} \sum_{\substack{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k] \\ \underline{i}|_{\sigma(\mathbb{[1, k']})} = \underline{u} \\ \underline{i}|_{\sigma(k' + \mathbb{[1, k'']})} = \underline{v}}} \xi(a_{\underline{u}}) \eta(a_{\underline{v}}) \omega_{\underline{i}} \\
&= \sum_{(k', k'') \in \mathbb{N}^2} \sum_{\substack{\underline{u} \in I^{\mathbb{[1, k']}} \\ \underline{v} \in I^{k' + \mathbb{[1, k'']}}}} \sum_{\sigma \in Sh(k', k'')} \sum_{\substack{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k] \\ \underline{i}|_{\sigma(\mathbb{[1, k']})} = \underline{u} \circ \sigma^{-1} \\ \underline{i}|_{\sigma(k' + \mathbb{[1, k'']})} = \underline{v} \circ \sigma^{-1}}} \xi(a_{\underline{u}}) \eta(a_{\underline{v}}) \omega_{\underline{i}} \\
&= \sum_{(k', k'') \in \mathbb{N}^2} \sum_{\substack{\underline{u} \in I^{\mathbb{[1, k']}} \\ \underline{v} \in I^{k' + \mathbb{[1, k'']}}}} \xi(a_{\underline{u}}) \eta(a_{\underline{v}}) \sum_{\sigma \in Sh(k', k'')} \sum_{\substack{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k] \\ \underline{i}|_{\sigma(\mathbb{[1, k']})} = \underline{u} \circ \sigma^{-1} \\ \underline{i}|_{\sigma(k' + \mathbb{[1, k'']})} = \underline{v} \circ \sigma^{-1}}} \omega_{\underline{i}}
\end{aligned}$$

or à $\underline{u}$ et $\underline{v}$ fixées on a $\sum_{\sigma \in Sh(k', k'')} \sum_{\substack{\underline{i} \in I[\mathbb{1}, k] \\ \underline{i}|_{\sigma(\mathbb{[1, k']})} = \underline{u} \circ \sigma^{-1} \\ \underline{i}|_{\sigma(k' + \mathbb{[1, k'']})} = \underline{v} \circ \sigma^{-1}}} \omega_{\underline{i}} = \omega_{\underline{u}} \sqcup \omega_{\underline{v}}$ et donc

$$\begin{aligned}
\Psi_J(\xi * \eta) &= \sum_{(k', k'') \in \mathbb{N}^2} \sum_{\substack{\underline{u} \in I^{\mathbb{[1, k']}} \\ \underline{v} \in I^{k' + \mathbb{[1, k'']}}}} \xi(a_{\underline{u}}) \eta(a_{\underline{v}}) \omega_{\underline{u}} \sqcup \omega_{\underline{v}} \\
&= \Psi_J(\xi) \sqcup \Psi_J(\eta)
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

3 Intégration d'éléments de Maurer-Cartan

On se donne un morphisme de dg-algèbre commutatives graduées $\varphi : (\mathcal{E}, d) \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}}, d)$ et $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie graduée positivement. On suppose que $H^0(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathbb{C}$ et $H^1(\tilde{\mathcal{E}}) = 0$. Le but de cette section est de démontrer le théorème 3.6.

Definition 3.1. Si $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$ et $\varepsilon \in \mathfrak{a}$, on définit l'application linéaire $\xi_\varepsilon : \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathbb{C}$ qui à $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$ associe $\xi(x \cdot \varepsilon) \in \mathbb{C}$.

En particulier si $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})[k]^*$ et $\mathfrak{a}[l]$ alors $\xi_\varepsilon \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})[k-l]^*$.

Definition 3.2. Pour tout entier $n \geq 0$ on a l'application linéaire donnée par le produit

$$\bigoplus_{k=0}^n (\mathcal{U}(\mathfrak{a})[k] \otimes \mathfrak{a}[n-k]) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n], \text{ notons là } m_n. \text{ En passant au dual, on obtient l'application}$$

$$\text{linéaire } {}^t m_n : \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^* \rightarrow \bigoplus_{k=0}^n (\mathcal{U}(\mathfrak{a})[k]^* \otimes \mathfrak{a}[n-k]^*).$$

En faisant la somme direct sur les entiers $n \geq 0$, on en déduit l'existence de l'application linéaire

$$\delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} : \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \otimes \mathfrak{a}^\circ$$

qui est donc telle que $\delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})|_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]}} = {}^t m_n$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^*, \bigoplus_{k=0}^n (\mathcal{U}(\mathfrak{a})[k]^* \otimes \mathfrak{a}[n-k]^*))$.

Fixons à présent $\mathcal{B} := (\varepsilon_j)_{j \in J}$ une base graduée de $\mathfrak{a}$, dit autrement $\mathcal{B}$ est l'union de bases des $(\mathfrak{a}[k])_{k \in \mathbb{N}}$.

Lemma 3.3. Pour tout $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$ la somme $\sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^* \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \otimes \mathfrak{a}^\circ$ est finie et on a

$$\delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(\xi) = \sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^*.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$, on peut supposer sans perte de généralité que ξ est homogène de degré n , i.e. $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^*$. Si $\varepsilon \in \mathfrak{a}[l]$ avec $l > n$ alors $n-l < 0$ et donc $\xi_\varepsilon = 0$. Ainsi seuls les ε_j appartenant à $\mathfrak{a}[l]$ avec $l \leq n$ contribuent à la somme $\sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^*$, et ceux-ci sont en nombre fini

par hypothèse sur $\mathfrak{a}$.

Soient $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$ et $a \in \mathfrak{a}$ de degré k et $n-k$ respectivement, on a

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(\xi)(u \otimes a) &= {}^t m_n(\xi)(u \otimes a) \quad \text{car } \xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})[n]^* \\ &= \xi \circ m_n(u \otimes a) \\ &= \xi(u \cdot a) \\ &= \xi_a(u) \\ &= \sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi(u(\varepsilon_j^*(a)\varepsilon_j)) \\ &= \left(\sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^* \right) (u \otimes a) \end{aligned}$$

$$\text{ainsi } \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(\xi) = \sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^*.$$

□

Lemma 3.4. Soit $A := \sum_{i \in I} a_i \otimes \omega_i \in \mathcal{E}^1 \otimes \mathfrak{a}$, le diagramme 22 est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ & \xrightarrow{\Psi_A} & Z^1(\mathcal{E}) \\ \downarrow \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} & & \downarrow \delta_{\mathcal{E}} \\ \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \otimes \mathfrak{a}^\circ & \xrightarrow{\Psi_A \otimes A} & Z^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{E}^1 \end{array}$$

FIGURE 22 –

Démonstration. Soit $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$ on a

$$\begin{aligned} (\Psi_A \otimes A) \circ \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(\xi) &= (\Psi_A \otimes A) \left(\sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \xi_{\varepsilon_j} \otimes \varepsilon_j^* \right) \\ &= \sum_{\varepsilon_j \in \mathcal{B}} \Psi_A(\xi_{\varepsilon_j}) \otimes A(\varepsilon_j^*) \\ &= \sum_{i \in I} \Psi_A(\xi_{a_i}) \otimes \omega_i \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(i_1, \dots, i_k, i) \in I^{k+1}} \xi(a_{i_1} \dots a_{i_k} a_i) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \otimes \omega_i \\ &= \delta_{\mathcal{E}} \circ \Psi_A(\xi). \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Definition 3.5. Donnons nous $A \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ et considérons

$$S_A := \{F \in \tilde{\mathcal{E}}^0 \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \mid dF = F \cdot \varphi(A), (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) = F^{12} \cdot F^{13} \text{ et } (\text{id} \otimes \varepsilon)F = 1 \text{ dans } \mathcal{E}^0\} \quad (48)$$

avec $\cdot$ le produit tensoriel du produit dans $\tilde{\mathcal{E}}$ et du produit dans $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$, et avec $x \mapsto x^{12}$ et $x \mapsto x^{13}$ les morphismes d'algèbres de $\tilde{\mathcal{E}} \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ dans $\tilde{\mathcal{E}} \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ donnés respectivement par $e \otimes u \mapsto e \otimes u \otimes 1$ et $e \otimes u \mapsto e \otimes 1 \otimes u$.

Le théorème suivant montre en particulier que S_A n'est pas vide.

Theorem 3.6. Soient $A \in MC_1(\mathcal{E}, \mathfrak{a})$ alors pour tout $\chi_0 \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0)$, il existe un unique $F_{\chi_0} \in S_A$ tel que $(\chi_0 \otimes \text{id})(F_{\chi_0}) = 1$.

Definition 3.7. Le théorème précédent permet de définir une application $F^A : X(\tilde{\mathcal{E}}^0) \rightarrow S_A$, qui à un caractère χ associe l'élément F_χ de S_A .

Démonstration. Commençons par montrer qu'il existe un unique $F \in \tilde{\mathcal{E}}^0 \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ avec $\chi_0(F) = 1$ et tel que dans $\tilde{\mathcal{E}}^1 \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ on ait $dF = F \cdot \varphi(A)$.

Notons pour chaque entier k , $(e_j^k)_{j \in J_k}$ une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})[k]$, ainsi $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (e_j^k)_{j \in J_k}$ est une base graduée de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$. Comme A est un élément de Maurer-Cartan, on peut définir l'application linéaire $\mu_A := I_{\chi_0} \circ \Psi_A : \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^0$. Pour tout entier k on a alors $\sum_{j \in J_k} \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \in \tilde{\mathcal{E}}^0 \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{a})[k]$. Posons

$$F := \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k$$

par ce qui précède on a $F \in \widetilde{\mathcal{E}}^0 \widehat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$.

Montrons que F satisfait les conditions dites.

On a bien $\chi_0(F) = 1$, il reste à montrer que $dF = F \cdot \varphi(A)$. On a

$$\begin{aligned}
dF &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} d \circ \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} d \circ I_{\chi_0} \circ \Psi_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{E}} \circ \Psi_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \quad \text{par le théorème 1.9} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (I_{\chi_0} \otimes \varphi) \circ (\Psi_A \otimes A) \circ \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \quad \text{par le lemme 3.4} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} m \circ (\mu_A \otimes (\varphi \circ A)) \circ \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} \mu_A(e_j^{k*} \cdot \varepsilon_i) \cdot \varphi(A(\varepsilon_i^*)) \otimes e_j^k \quad \text{car } \delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}(e_j^{k*}) = \sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} e_j^{k*} \otimes \varepsilon_i^* \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} \mu_A(e_j^{k*}) \cdot \varphi(A(\varepsilon_i^*)) \otimes e_j^k \varepsilon_i \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \mu_A(e_j^{k*}) \otimes e_j^k \right) \cdot \left(\sum_{\varepsilon_i \in \mathcal{B}} \varphi(A(\varepsilon_i^*)) \otimes \varepsilon_i \right) \\
&= F \cdot \varphi(A)
\end{aligned}$$

ce qui termine l'existence.

Pour l'unicité, supposons qu'ils existent $F, G \in \widetilde{\mathcal{E}}^0 \widehat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ satisfaisant les conditions de (a) et montrons que F est égale à G .

On a $d(FG^{-1}) = dF \cdot G^{-1} + F \cdot dG^{-1} = dF \cdot G^{-1} - F \cdot G^{-1}dG \cdot G^{-1}$. Or par hypothèse on a $dF = F \cdot \varphi(A)$ et $dG = G \cdot \varphi(A)$ et donc $dF \cdot G^{-1} - F \cdot G^{-1}dG \cdot G^{-1} = F \cdot \varphi(A) \cdot G^{-1} - F \cdot \varphi(A) \cdot G^{-1} = 0$. Comme $H^0(\widetilde{\mathcal{E}}) = \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ tels que $F \cdot G^{-1} = \lambda \cdot 1_{\widetilde{\mathcal{E}}} \otimes a$. Mais $\chi_0(FG^{-1}) = \chi_0(F)\chi_0(G^{-1}) = 1$ donc $\lambda \cdot 1_{\widetilde{\mathcal{E}}} \otimes a = 1$ et donc $F = G$.

Montrons que $(\text{id} \otimes \Delta_c)(F) = F^{12} \cdot F^{13}$.

Intéressons nous aux expressions $d \circ (\text{id} \otimes \Delta_c)(F)$ et $d(F^{12}F^{13})$, on a

$$\begin{aligned}
d \circ (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) &= (\text{id} \otimes \Delta_c) \circ d(F) \\
&= (\text{id} \otimes \Delta_c)(\varphi(A) \cdot F) \quad \text{car } dF = \varphi(A) \cdot F \\
&= (\text{id} \otimes \Delta_c)(\varphi(A)) \cdot (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \quad \text{car } \Delta_c \text{ est un morphisme d'algèbres} \\
&= (\varphi(A)^{12} + \varphi(A)^{13}) \cdot (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \quad \text{car } A \text{ est primitif dans } \mathcal{U}(\mathfrak{a})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d(F^{12} \cdot F^{13}) &= (dF)^{12} \cdot F^{13} + F^{12} \cdot (dF)^{13} \\
&= (\varphi(A) \cdot F)^{12} \cdot F^{13} + F^{12} \cdot (\varphi(A) \cdot F)^{13} \quad \text{car } dF = \varphi(A)F \\
&= \varphi(A)^{12} \cdot F^{12}F^{13} + F^{12} \cdot \varphi(A)^{13} \cdot F^{13} \\
&= (\varphi(A)^{12} + \varphi(A)^{13}) \cdot (F^{12} \cdot F^{13}) \quad \text{par commutativité du produit dans } \widetilde{\mathcal{E}}^0.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& d((\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1}) \\
&= (\varphi(A)^{12} + \varphi(A)^{13}) \cdot (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1} \\
&\quad + (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1} \cdot (\varphi(A)^{12} + \varphi(A)^{13}) \cdot (F^{12} \cdot F^{13}) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1} \\
&= (\varphi(A)^{12} + \varphi(A)^{13}) \cdot (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1} - (\varphi(A)^{12} + \varphi(A)^{13}) \cdot (\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1} \\
&\quad \text{par commutativité du produit dans } \tilde{\mathcal{E}}^0 \text{ et antisymétrie de } [\cdot, \cdot] \text{ dans } \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Or $H^0(\tilde{\mathcal{E}}^0) = \mathbb{C}$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ tels que $(\text{id} \otimes \Delta_c)(F) \cdot (F^{12} \cdot F^{13})^{-1} = \lambda \cdot 1_{\tilde{\mathcal{E}}^0} \otimes a$. Comme $\chi_0(F) = 1$ il en découle que $\lambda \cdot 1_{\tilde{\mathcal{E}}^0} \otimes a = 1$ ce qui termine la preuve. $\square$

Rappelons que $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ désigne le groupe des éléments primitifs de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$. En particulier, si $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ et $F \in S_A$ alors on vérifie que $(1 \otimes g) \cdot F \in S_A$. Ceci définit une action de $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur S_A .

Proposition 3.8. *L'action de $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur S_A est libre et transitive.*

Démonstration. Liberté : Soit $F \in S_A$ et $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$, commençons par montrer que F est inversible dans $\tilde{\mathcal{E}}^0 \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ d'inverse $(\text{id} \otimes S)(F)$. En effet,

$$\begin{aligned}
F \cdot (\text{id} \otimes S)(F) &= (\text{id} \otimes m \circ (\text{id} \otimes S))((F)^{12} \cdot (F)^{13}) \\
&= (\text{id} \otimes m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta)(F) \quad \text{car } (\text{id} \otimes \Delta)(F) = (F)^{12} \cdot (F)^{13} \\
&= (\text{id} \otimes \eta \circ \varepsilon)(F) \\
&= 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

Mais alors $g \bullet F \cdot (\text{id} \otimes S)(F) = 1 \otimes g$. On en déduit que l'action est libre.

Transitivité : Soient $F, G \in S_A$, lors de la démonstration du théorème 3.6 on a vu qu'il existait un $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ tel que $FG^{-1} = 1_{\tilde{\mathcal{E}}} \otimes a$, mais alors

$$(1_{\tilde{\mathcal{E}}} \otimes a)^{12} \cdot (1_{\tilde{\mathcal{E}}} \otimes a)^{13} = (FG^{-1})^{12} \cdot (FG^{-1})^{13} = (\text{id} \otimes \Delta_c)(FG^{-1}) = (\text{id} \otimes \Delta_c)(a)$$

On en déduit que $a \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ et donc que $F = a \bullet G$. $\square$

On dispose également d'une application

$$\begin{array}{ccc}
S_A & \longrightarrow & \text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0) \\
F & \longmapsto & (\xi \mapsto \langle \xi, F \rangle) := \langle \cdot, F \rangle
\end{array}$$

On peut faire agir $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur $\text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ par $g \bullet \gamma(\xi) = (\gamma \otimes g) \circ \Delta(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$. En particulier si $F \in S_A$ et $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ alors

$$g \bullet \langle \cdot, F \rangle = \langle \cdot, g \bullet F \rangle \quad (49)$$

ce qui montre que $S_A \rightarrow \text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ est équivariante sous cette action.

Proposition 3.9. *Soit $\gamma \in \text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ et $g \in \mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ alors $\text{Im}(\gamma) = \text{Im}(g \bullet \gamma)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}^0$.*

Démonstration. Par définition de l'action de $\mathcal{G}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge)$ sur $\text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ on en déduit que $\text{Im}(g \bullet \gamma) \subset \text{Im}(\gamma)$. On a également $\text{Im}(g^{-1} \bullet (g \bullet \gamma)) \subset \text{Im}(g \bullet \gamma)$. Ce qui montre l'égalité par double inclusions. $\square$

Proposition 3.10. *L'application composée $X(\tilde{\mathcal{E}}^0) \xrightarrow{F^A} S_A \rightarrow \text{Hom}((\mathcal{U}(\mathfrak{a}))^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ est donnée par $\chi \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0) \mapsto I_\chi \circ \Psi_A$.*

Démonstration. Soit $\chi \in X(\tilde{\mathcal{E}}^0)$, par construction de F_χ dans la démonstration du théorème 3.6 on en déduit que pour tout $\xi \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ$ on a

$$\begin{aligned} \langle \xi, F_\chi \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} I_\chi \circ \Psi_A(e_j^{k*}) \xi(e_j^k) \\ &= I_\chi \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J_k} \Psi_A(e_j^{k*}) \xi(e_j^k) \right) \\ &= I_\chi \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i_1, \dots, i_k \in I} \xi(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) [\omega_{i_1} | \dots | \omega_{i_k}] \right) \\ &= I_\chi \circ \Psi_A(\xi) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

4 Étude de certains éléments de Maurer-Cartan

On rappelle que K désigne un corps de caractéristique nulle, on se donne également un entier n supérieur ou égal à deux.

4.1 Algèbre de tresses infinitésimales

On note $\mathfrak{F}_n$ l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel engendré par les éléments $(a_{i,j})_{i \neq j \in \{1, \dots, n\}}$ que l'on munie de sa graduation naturellement associée. On va construire d'autres algèbres de Lie en imposant des relations entre les $(a_{i,j})_{i \neq j \in \{1, \dots, n\}}$.

Sur $\mathfrak{F}_n$, on définit le jeu de relations –appelé **relations infinitésimales des tresses**– suivant :

$$a_{i,j} - a_{j,i} = 0 \quad (\text{R0})$$

$$[a_{i,j}, a_{k,l}] = 0 \quad \text{avec } i, j, k, l \text{ distincts} \quad (\text{R1})$$

$$[a_{i,j}, a_{i,k} + a_{k,j}] = 0 \quad \text{avec } i, j, k \text{ distincts} \quad (\text{R2})$$

On peut alors définir l'**algèbre de Lie des tresses infinitésimales** (à n cordes) notée $\mathfrak{t}_n$ par

$$\mathfrak{t}_n := \mathfrak{F}_n / (R0, R1, R2).$$

Notons $t_{i,j}$ la classe de $a_{i,j}$ dans $\mathfrak{t}_n$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

Convention 4.1. Pour un entier m positif, on notera $\mathfrak{t}_n[m]$ le K –espace vectoriel engendré par les éléments de degré m de $\mathfrak{t}_n$. Ainsi $\mathfrak{t}_n = \bigoplus_{j \leq 0} \mathfrak{t}_n[j]$.

Exemple 4.2. 1. On a $\mathfrak{t}_2 = Kt_{1,2}$ et donc $\mathfrak{t}_2 \simeq K$.

2. Une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{t}_3[1]$ est $\{t_{1,2}, t_{1,3}, t_{2,3}\}$, et une base de $\mathfrak{t}_3[2]$ est $\{[t_{1,2}, t_{1,3}]\}$. Plus précisément $[t_{1,2}, t_{1,3}] = -[t_{1,2}, t_{2,3}] = [t_{1,3}, t_{2,3}]$.

3. Une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{t}_4[1]$ est $\{t_{1,2}, t_{1,3}, t_{1,4}, t_{2,3}, t_{2,4}, t_{3,4}\}$, et une base de $\mathfrak{t}_4[2]$ est $\{[t_{1,2}, t_{1,3}], [t_{1,2}, t_{1,4}], [t_{1,3}, t_{1,4}], [t_{2,3}, t_{2,4}]\}$.

4. De manière générale une base de $\mathfrak{t}_n[1]$ est $(t_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ qui est donc de dimension $\binom{n}{2}$. une base de $\mathfrak{t}_n[2]$ est $([t_{i,j}, t_{i,k}])_{1 \leq i < j < k \leq n}$ qui est donc de dimension $\binom{n}{3}$.

Introduisons une autre relation entre les $(a_{i,j})_{i \neq j \in \{1, \dots, n\}}$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{i,j} = 0 \quad (\text{R3})$$

On peut alors définir l'**algèbre de Lie des tresses infinitésimales sphériques** (à n cordes) notée $\mathfrak{p}_n$ par

$$\mathfrak{p}_n := \mathfrak{F}_n / (R0, R1, R3).$$

Notons $e_{i,j}$ la classe de $a_{i,j}$ dans $\mathfrak{p}_n$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

On remarquera que les relations (R0), (R1) et (R3) impliquent la relation (R2). En effet pour tout

i, j, k distincts on a

$$\begin{aligned}
[e_{i,j}, e_{i,k} + e_{k,j}] &= [e_{i,j}, e_{i,k} - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \notin \{k,j\}}} e_{k,l}] && \text{par (R0) et (R3)} \\
&= [e_{i,j}, - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \notin \{k,i,j\}}} e_{k,l}] && \text{par (R0)} \\
&= 0 && \text{par bilinéarité et (R1)}
\end{aligned}$$

On en déduit alors le lemme suivant

Lemma 4.3. *On a un morphisme surjectif d'algèbres de Lie de $\mathfrak{t}_n$ vers $\mathfrak{p}_n$ qui à $t_{i,j}$ associe $e_{i,j}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.*

Convention 4.4. Pour un entier m positif, on notera $\mathfrak{p}_n[m]$ le K -espace vectoriel engendré par les éléments de degré m de $\mathfrak{t}_n$. Ainsi $\mathfrak{p}_n = \bigoplus_{j=0} \mathfrak{p}_n[j]$.

Example 4.5. 1. On montre que $\mathfrak{p}_3[1] = 0$ et donc $\mathfrak{p}_3 = 0$.

2. Une base de $\mathfrak{p}_4[1]$ est $\{e_{1,2}, e_{1,3}\}$, et une base de $\mathfrak{p}_4[2]$ est $\{[e_{1,2}, e_{1,3}]\}$.

Convention 4.6. Afin d'alléger les notations –et dans toute la suite du mémoire– on conviendra que $a_{i,i}, t_{i,i}$ et $e_{i,i}$ sont nulles pour tout entier i .

La proposition suivante montre qu'il existe un lien fort entre $\mathfrak{t}_n$ et $\mathfrak{p}_{n+1}$.

Proposition 4.7. *Soit $n \geq 3$ un entier, posons $T_n := \sum_{1 \leq i,j \leq n} t_{i,j}$ et notons I_n l'espace vectoriel engendré par T_n dans $\mathfrak{t}_n$. On a la suite exacte courte suivante*

$$0 \longrightarrow I_n \longrightarrow \mathfrak{t}_n \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{p}_{n+1} \longrightarrow 0$$

où φ est l'unique morphisme d'algèbres de Lie gradué tel que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $\varphi(t_{i,j}) = e_{i,j}$.

Démonstration. L'application φ est donné par la composition des morphismes d'algèbres de Lie $\mathfrak{t}_n \rightarrow \mathfrak{t}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{p}_{n+1}$ où le premier morphisme envoie $e_{i,j}$ sur $e_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et le second est donné par le lemme 4.3. Par suite φ est bien un morphisme d'algèbres de Lie.

Le morphisme φ est surjectif car $e_{i,j} = \varphi(t_{i,j})$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $e_{i,n+1} = \varphi\left(-\sum_{j=1}^n t_{i,j}\right)$ pour $1 \leq i \leq n$, ce qui permet de conclure car φ est un morphisme d'algèbre de Lie.

On a

$$\varphi(T_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{i,j} = \sum_{i=1}^n e_{i,n+1} = 0.$$

et donc $I_n \subset \ker \varphi$.

Notons $\tilde{\varphi}$ le morphisme de $\mathfrak{t}_n/I_n$ vers $\mathfrak{p}_{n+1}$ et posons $\psi : \mathfrak{p}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{t}_n/I_n$ tel que $\psi(e_{i,j}) = t_{i,j}$ si $1 \leq i < j \leq n$ et $\psi(e_{i,n+1}) = -\sum_{j=1}^n t_{i,j}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Il faut montrer que ψ est bien définie, pour cela il suffit de montrer que $\psi(0) = \psi(\sum_{j=1}^{n+1} e_{i,j}) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$, ce qui est correct. On vérifie que ψ est un morphisme d'algèbres de Lie et que $\tilde{\varphi} \circ \psi = \text{id}_{\mathfrak{p}_{n+1}}$ et $\psi \circ \tilde{\varphi} = \text{id}_{\mathfrak{t}_n/I_n}$. Le morphisme ψ est surjectif. Il est aussi injectif car si $\alpha \in \mathfrak{p}_{n+1}[1]$ est non nul alors $\psi(\alpha) \neq 0$ et l'on a les même relations dans $\mathfrak{p}_{n+1}$ et $\mathfrak{t}_n$ entre les éléments de degré supérieur ou égal à deux. $\square$

4.2 Espace des modules $\mathfrak{M}_{0,n+1}$

Soit $n > 1$ un entier, on note $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$ la droite projective sur $\mathbb{C}$.

Définition 4.8. L'espace de configuration à n points de $\mathbb{C}$, noté $\mathbf{C}_n(\mathbb{C})$, est l'ensemble des n -uplets de $\mathbb{C}^n$ privé des diagonales, autrement dit

$$\mathbf{C}_n(\mathbb{C}) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq x_j (i \neq j)\}.$$

En particulier $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}$ par $(\lambda, \mu) \cdot z = \lambda z + \mu$, donc $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ diagonalement sur $\mathbf{C}_n(\mathbb{C})$. On peut donc passer au quotient et considérer $(\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*) \backslash \mathbf{C}_n(\mathbb{C})$, notons $\pi : \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) \rightarrow (\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*) \backslash \mathbf{C}_n(\mathbb{C})$ la projection associée.

Définition 4.9. L'espace de configuration à n points de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$, noté $\mathbf{C}_n(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1)$, est l'ensemble des n -uplets de $(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1)^n$ privé des diagonales, autrement dit

$$\mathbf{C}_n(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1) := \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1)^n \mid x_i \neq x_j (i \neq j)\}.$$

En particulier le groupe projectif linéaire $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$, donc agit diagonalement sur $\mathbf{C}_n(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1)$. Ce qui nous amène, par passage au quotient, à la définition suivante.

Définition 4.10. L'espace de modules de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1$, noté $\mathfrak{M}_{0,n}$ est le quotient de $\mathbf{C}_n(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1)$ par $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$, autrement dit

$$\mathfrak{M}_{0,n} := \mathbf{PGL}_2(\mathbb{C}) \backslash \mathbf{C}_n(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^1).$$

Lemme 4.11. L'application $f : \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_{0,n+1}$ suivante est surjective

$$f : \begin{cases} \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathfrak{M}_{0,n+1} \\ (z_1, \dots, z_n) & \mapsto \{[z_1 : 1], \dots, [z_n : 1], [1 : 0]\} \end{cases}$$

où $\{[z_1 : 1], \dots, [z_n : 1], [1 : 0]\}$ représente la classe de $([z_1 : 1], \dots, [z_n : 1], [1 : 0])$ dans $\mathfrak{M}_{0,n+1}$.

Démonstration. Soit $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \in \mathfrak{M}_{0,n+1}$, il existe $\sigma \in \mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$ qui envoie $(a_1, \dots, a_{n+1})$ sur un élément $([z'_1 : 1], \dots, [z'_n : 1], [1 : 0])$ de $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$ avec les $(z'_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux à deux distincts. Mais alors $f(z'_1, \dots, z'_n) = \{[z'_1 : 1], \dots, [z'_n : 1], [1 : 0]\} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. $\square$

Cependant f n'est pas injective mais on va pallier ce défaut grâce au lemme suivant.

Lemme 4.12. Il existe une unique application bijective $\gamma : (\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*) \backslash \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_{0,n+1}$ telle que le diagramme 23 soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{f} & \mathfrak{M}_{0,n+1} \\ \pi \downarrow & \nearrow \gamma & \\ (\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*) \backslash \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

FIGURE 23 – .

Démonstration. Posons $\gamma : (\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*) \backslash \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_{0,n+1}$ qui à $\pi(z_1, \dots, z_n)$ associe $f(z_1, \dots, z_n)$. Comme f est surjective alors γ l'est aussi, il reste à montrer que cette dernière est bien définie et injective.

Si $\pi(z_1, \dots, z_n) = \pi(z'_1, \dots, z'_n)$ alors il existe un $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ tel que $(z'_1, \dots, z'_n) = (\lambda, \mu) \cdot (z_1, \dots, z_n)$. Considérons l'homographie de la droite projective dans elle-même $g : [x : y] \mapsto [\lambda x + \mu y : y]$, c'est un élément de $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$ et de plus $\{[z_1 : 1], \dots, [z_n : 1], [1 : 0]\} = \{g([z_1 : 1]), \dots, g([z_n : 1]), g([1 : 0])\} = \{[z'_1 : 1], \dots, [z'_n : 1], [1 : 0]\}$ ce qui montre que f est bien définie.

Enfin si $\varphi(\pi(z_1, \dots, z_n)) = \varphi(\pi(z'_1, \dots, z'_n))$ alors il existe $\sigma \in \mathbf{PGL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\sigma \cdot ([z_1 : 1], \dots, [z_n : 1], [1 : 0]) = ([z'_1 : 1], \dots, [z'_n : 1], [1 : 0])$. L'homographie σ est de la forme $[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy]$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$. Comme $\sigma([1 : 0]) = [1 : 0]$ on en déduit que $c = 0$ et comme $\sigma([z_1 : 1]) = [z'_1 : 1]$ alors $d = 1$. On en déduit que $(z'_1, \dots, z'_n) = (a, b) \cdot (z_1, \dots, z_n)$ et donc que $\pi(z_1, \dots, z_n) = \pi(z'_1, \dots, z'_n)$. $\square$

4.3 dg-algèbres associées

Construisons des dg-algèbres associées aux espaces $C_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{M}_{0,n+1}$. On définit les algèbres

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0(C_n(\mathbb{C})) &:= \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \left[\frac{1}{z_i - z_j} \mid i \neq j \right] \\ \mathcal{E}^0(\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})) &:= \mathbb{C}[z'_1, \dots, z'_{n-1}] \left[\frac{1}{z'_i - z'_j}, \frac{1}{z'_k} \mid i \neq j, k = 1, \dots, n-1 \right] \\ \mathcal{E}^0(\mathfrak{M}_{0,n+1}) &:= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-2}] \left[\frac{1}{x_i - x_j}, \frac{1}{x_k}, \frac{1}{x_k - 1} \mid i \neq j, k = 1, \dots, n-2 \right] \end{aligned}$$

Puis les algèbres graduées

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\bullet(C_n(\mathbb{C})) &:= \mathcal{E}^0(C_n(\mathbb{C})) \otimes \bigwedge^\bullet \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot dz_i \right) \\ \mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})) &:= \mathcal{E}^0(\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})) \otimes \bigwedge^\bullet \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C} \cdot dz'_i \right) \\ \mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1}) &:= \mathcal{E}^0(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \otimes \bigwedge^\bullet \left(\bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{C} \cdot dx_i \right) \end{aligned}$$

dans lesquelles le degré des algèbres extérieures est donnée par le degré usuel.

Remark 4.13. En particulier on a $\mathcal{E}^1(C_n(\mathbb{C})) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}^0(C_n(\mathbb{C})) \cdot dz_i$,

$$\mathcal{E}^1(\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}^0(\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})) \cdot dz'_i \text{ et } \mathcal{E}^1(\mathfrak{M}_{0,n+1}) = \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathcal{E}^0(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \cdot dx_i.$$

Les morphismes d'algèbres graduées

$$\iota_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \backslash C_n(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathcal{E}^\bullet(C_n(\mathbb{C})) \\ z'_i & \longmapsto & z_i - z_n \\ dz'_i & \longmapsto & dz_i - dz_n \end{array} \right.$$

et

$$\iota_2 : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1}) & \longrightarrow \mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \\ x_i & \longmapsto \frac{z'_i}{z'_{n-1}} \\ dx_i & \longmapsto \frac{1}{z'_{n-1}} (dz'_i \cdot z'_{n-1} - z'_i \cdot dz'_{n-1}) \end{array} \right.$$

montrent que, par abus de notation, on peut considérer $\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1})$ comme une sous-algèbre graduée de $\mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$, qui peut lui-même être vu comme une sous-algèbre graduée de $\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$.

Afin de munir $\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ d'une structure de dg-algèbre, il faut définir une différentielle. Notons $\partial_i \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^0(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})), \mathcal{E}^0(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})))$ qui à f associe la dérivée partielle de f par rapport à la i -ème variable alors

$$d : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) & \longrightarrow \mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \\ f \otimes \omega & \longmapsto \sum_{i=1}^n \partial_i f \otimes (dz_i \wedge \omega) \end{array} \right.$$

définit une différentielle sur $\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$.

Remarquons que l'on peut faire agir $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ sur $\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ par automorphisme d'algèbres graduées. Ce qui nous amène au lemme suivant

Lemma 4.14 (admis). *En tant qu'algèbre graduée, on a les identifications suivantes*

$$\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))^\mathbb{C} \simeq \mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \quad (50)$$

$$\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))^{\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*} \simeq \mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \quad (51)$$

Lemma 4.15. *La différentielle d de $\mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ préserve les sous-algèbres graduées $\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1})$ et $\mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$*

Démonstration. Découle du fait que pour tout $f \otimes \omega \in \mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ on a $(\alpha, \beta) \bullet d(f \otimes \omega) = d((\alpha, \beta) \bullet (f \otimes \omega))$. $\square$

Par le lemme précédent, on peut munir les algèbres graduées $\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1})$ et $\mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ d'une structure de dg-algèbre en prenant pour différentielle d restreint à $\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1})$ et $\mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ respectivement. Ainsi

$$\mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \subset \mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \subset \mathcal{E}^\bullet(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \quad (52)$$

en tant que dg-algèbres.

4.4 Formes KZ

On se donne $n > 0$ un entier.

Definition 4.16. On appelle **forme KZ** , notée Ω_{KZ} , l'élément de $\mathcal{E}^1(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{t}_n[1]$ suivant

$$\Omega_{KZ} := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_{i,j} \otimes t_{i,j} \quad \text{avec } \omega_{i,j} = d \log(z_i - z_j).$$

Proposition 4.17. [Kas95, chap XIX.2] *On a $d\Omega_{KZ} = 0$ et $\Omega_{KZ} \wedge \Omega_{KZ} = 0$*

Corollary 4.18. *La forme KZ est un élément de Maurer-Cartan de degré 1 de $(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{t}_n)$, autrement dit on a*

$$d\Omega_{KZ} + \frac{1}{2} \Omega_{KZ} \wedge \Omega_{KZ} = 0. \quad (53)$$

Notons π_1, π_2 les projections de $\mathbf{C}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})$ dans $(\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*) \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{M}_{0,n+1}$ respectivement.

Proposition 4.19. *Il existe $\Omega_{KZ}^* \in MC_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{t}_n)$ tel qu'on ait dans $\mathcal{E}^1(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{t}_n$ l'égalité*

$$\pi_1^*(\Omega_{KZ}^*) = \Omega_{KZ}. \quad (54)$$

Plus précisément on a

$$\Omega_{KZ}^* = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \mathrm{dlog}(z'_i - z'_j) \otimes t_{i,j} + \sum_{1 \leq i \leq n-1} \mathrm{dlog}(z'_i) \otimes t_{i,n} \quad (55)$$

Démonstration. On a $\mathrm{dlog}(z'_i) = \frac{1}{z'_i} \otimes dz'_i$, or $\frac{1}{z'_i} \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ et $dz'_i \in \mathcal{E}^1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ donc $\mathrm{dlog}(z'_i) \in \mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$. Mais alors $\iota_1(\mathrm{dlog}(z'_i)) = \frac{1}{z_i - z_n} \otimes (dz_i - dz_n) = \mathrm{dlog}(z_i - z_n)$ et $\iota_1(\mathrm{dlog}(z'_i - z'_j)) = \frac{1}{z_i - z_j} \otimes (dz_i - dz_j) = \mathrm{dlog}(z_i - z_j)$ pour tout $i \neq j$.

Par suite pour tout $i < n$ on a $\mathrm{dlog}(z_i - z_n) = \pi_1^*(\mathrm{dlog}(z'_i))$ et pour tout $i < j < n$ on a $\mathrm{dlog}(z_i - z_j) = \pi_1^*(\mathrm{dlog}(z'_i - z'_j))$. On en déduit que $\pi_1^*(\Omega_{KZ}^*) = \Omega_{KZ}$ où Ω_{KZ}^* est défini dans 55.

Il reste à montrer que Ω_{KZ}^* est un élément de Maurer-Cartan. Comme $\pi_1^*(\Omega_{KZ}^*) = \Omega_{KZ}$ alors par la proposition 2.4 on a

$$(d\Omega_{KZ}^* + \Omega_{KZ}^* \wedge \Omega_{KZ}^*) \in \ker(\mathcal{E}^2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{t}_n \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{t}_n).$$

Or $\pi_1^* : \mathcal{E}^2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ est injectif et donc le noyau $\ker(\mathcal{E}^2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{t}_n \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{t}_n)$ est nulle. Par suite $d\Omega_{KZ}^* + \Omega_{KZ}^* \wedge \Omega_{KZ}^* = 0$.

□

Proposition 4.20. *Il existe $\Omega_{KZ}^m \in \mathcal{E}^1(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \otimes \mathfrak{p}_{n+1}$ tel que dans $\mathcal{E}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{p}_{n+1}$ on ait l'égalité*

$$\pi_2^*(\Omega_{KZ}^m) = \varphi_*(\Omega_{KZ}^*) \quad (56)$$

où $\varphi : \mathfrak{t}_n \rightarrow \mathfrak{p}_{n+1}$ est l'application définie en 4.7.

Plus précisément on a

$$\Omega_{KZ}^m = \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \mathrm{dlog}(x_i - x_j) \otimes e_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-2} \mathrm{dlog}(x_i) \otimes e_{i,n} + \mathrm{dlog}(x_i - 1) \otimes e_{i,n-1} \quad (57)$$

Démonstration. D'une part on a

$$\varphi_*(\Omega_{KZ}^*) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \mathrm{dlog}(z'_i - z'_j) \otimes e_{i,j} + \sum_{i \leq n-1} \mathrm{dlog}(z'_i) \otimes e_{i,n} \quad (58)$$

or

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} e_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} e_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} e_{i,j} = \frac{-1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,n} = 0 \quad (59)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n-1} e_{i,n} = 0 \quad (60)$$

on en déduit que

$$\varphi_*(\Omega_{KZ}^*) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (\mathrm{dlog}(z'_i - z'_j) - \mathrm{dlog}(z'_{n-1})) \otimes e_{i,j} + \sum_{i \leq n-1} (\mathrm{dlog}(z'_i) - \mathrm{dlog}(z'_{n-1})) \otimes e_{i,n}. \quad (61)$$

D'autre part, définissons $\Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}}$ comme en 57. Du fait des formules pour les morphismes (ι_2) on a

$$\begin{aligned}\pi_2^*(\Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \mathrm{dlog}\left(\frac{z'_i}{z'_{n-1}} - \frac{z'_j}{z'_{n-1}}\right) \otimes e_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-2} \mathrm{dlog}\left(\frac{z'_i}{z'_{n-1}}\right) \otimes e_{i,n} + \mathrm{dlog}\left(\frac{z'_i}{z'_{n-1}} - \frac{z'_{n-1}}{z'_{n-1}}\right) \otimes e_{i,n-1} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (\mathrm{dlog}(z'_i - z'_j) - \mathrm{dlog}(z'_{n-1})) \otimes e_{i,j} + \sum_{i \leq n-1} (\mathrm{dlog}(z'_i) - \mathrm{dlog}(z'_{n-1})) \otimes e_{i,n}.\end{aligned}$$

Avec l'égalité 61 on en déduit le résultat. $\square$

Corollary 4.21. *La forme $\Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}}$ est un élément de Maurer-Cartan de degré 1 de $(\mathfrak{M}_{0,n+1}, \mathfrak{p}_{n+1})$.*

Démonstration. Par la proposition 4.19 on sait que Ω_{KZ}^* est un élément de Maurer-Cartan de degré un de $(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{t}_n)$. Par le lemme 2.3, on en déduit que $\varphi_*(\Omega_{KZ}^*)$ est un élément de Maurer-Cartan de $(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{p}_{n+1})$. Comme $\pi_2^*(\Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}}) = \varphi_*(\Omega_{KZ}^*)$ par le lemme précédent et proposition 2.4 on a

$$\mathrm{d}\Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}} + \Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}} \wedge \Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}} \in \ker \left(\mathcal{E}^2(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \otimes \mathfrak{p}_{n+1} \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{p}_{n+1} \right).$$

Or $\pi_2^* : \mathcal{E}^2(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C}))$ est injectif et donc le noyau $\ker \left(\mathcal{E}^2(\mathfrak{M}_{0,n+1}) \otimes \mathfrak{p}_{n+1} \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{C}_n(\mathbb{C})) \otimes \mathfrak{p}_{n+1} \right)$ est nulle. Par suite $\mathrm{d}\Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}} + \Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}} \wedge \Omega_{KZ}^{\mathfrak{m}} = 0$. $\square$

5 Equation (KZ_3) et fonctions hyperlogarithmiques.

On reprends des éléments introduit dans la section précédente en considérant la variété algébrique $M = \mathfrak{M}_{0,n+1}$, sa dg-algèbre associée $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\bullet(\mathfrak{M}_{0,n+1})$, $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\bullet(\widetilde{\mathfrak{M}_{0,n+1}})$ et l'élément de Maurer-Cartan Ω_{KZ}^m . On prendra le morphisme de $\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ donnée par le pullback de la projection de $\widetilde{\mathfrak{M}_{0,n+1}}$ sur $\mathfrak{M}_{0,n+1}$. Par la proposition 3.10 on dispose d'une application de $\mathfrak{M}_{0,n+1} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{U}(\mathfrak{p}_{n+1})^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ qui à x associe $\mu_x := I_{ev_x} \circ \Psi_A$. Enfin, la proposition 3.9 montre que $Im(\mu_x)$ est indépendant du point x considéré.

L'objectif de cette section est de calculer les valeurs communes des $Im(\mu_x)$ pour $n = 3$.

5.1 Notations utilisées

On va rappeler et utiliser les notations de [Gon01] pour les fonctions polylogarithmes multiples. Ces fonctions peuvent aussi bien s'écrire sous forme de somme –on les note alors $Li_{n_1, \dots, n_r}$ – que d'intégrales itérées –notées $I_{n_1, \dots, n_m}$ – de la façon suivante :

Pour la formulation somme, pour $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r$ on définit

$$Li_{n_1, \dots, n_r}(x_1, x_2, \dots, x_r) := \sum_{0 < k_1 < \dots < k_r} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}}{k_1^{n_1} k_2^{n_2} \dots k_r^{n_r}} \quad (62)$$

qui est bien définie dès lors que $|x_i| < 1$ ou dès que $n_r \geq 2$ et $|x_i| \leq 1$.

Pour la formulation intégrale pour $(a_1, \dots, a_{m+1}) \in (\mathbb{C}^*)^r$ on définit

$$I_{n_1, \dots, n_m}(a_1 : \dots : a_m : a_{m+1}) := \int_0^{a_{m+1}} \underbrace{\frac{dt}{t-a_1} \circ \frac{dt}{t} \circ \dots \circ \frac{dt}{t}}_{n_1 \text{ termes}} \circ \dots \circ \underbrace{\frac{dt}{t-a_m} \circ \frac{dt}{t} \circ \dots \circ \frac{dt}{t}}_{n_m \text{ termes}} \quad (63)$$

Enfin, les deux expressions sont reliées par la relation

$$I_{n_1, \dots, n_m}(a_1 : \dots : a_m : a_{m+1}) = (-1)^m Li_{n_1, \dots, n_m} \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_m}{a_{m-1}}, \frac{a_{m+1}}{a_m} \right) \quad (64)$$

On utilisera également les propriétés des fonctions polylogarithmes multiples que l'on trouvera également dans [Gon01].

5.2 Solutions de (KZ_3)

Soit $W := \{A, B\}$ un alphabet, on note $W_+^* := W^* \setminus \{1\}$. Prenons $\mathfrak{a} = \mathfrak{Lie}(A, B)$, son algèbre enveloppante est l'ensemble des polynômes non commutatif en les variables A et B . Notons $X := \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ qui est l'ensemble des séries formelles en les mots de l'alphabet W .

Definition 5.1. Notons $F_{as} \in \tilde{\mathcal{E}}^0 \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ la solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} F(z) = \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) F(z) \\ F(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^A \end{cases}$$

où $z^{-\alpha}$ est définie comme $\exp(-\alpha \log(z))$.

Proposition 5.2 (admis). *La fonction F_{as} appartient à S_A , l'ensemble définit en (48).*

Si l'on note $\mu_{as} \in \text{Hom}(\mathcal{U}(\mathfrak{p}_4)^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$ le morphisme associé à F_{as} , alors pour connaître les valeurs communes des $\text{Im}(\mu_x)$ il suffit de connaître $\text{Im}(\mu_{as})$. En effet, par la proposition 3.8 S_A ne possède qu'une seule orbite sous l'action de $\mathcal{G}((\mathfrak{p}_4)^\wedge)$ et alors par la proposition 3.9 on a $\text{Im}(\mu_x) = \text{Im}(\mu_{as})$ pour tout point x de $\mathfrak{M}_{0,4}$. On calcule donc μ_{as} .

Introduisons α une indéterminée de degré 1 qui commute avec les variables A et B . On a deux applications :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \xrightarrow{u} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge[[\alpha]] \xrightarrow{v} \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$$

ainsi définies : u est l'unique morphisme d'algèbres complètes vérifiant $u(A) = A - \alpha$ et $u(B) = B$ et v est l'unique morphisme d'espaces vectoriels complets tel que $v(w\alpha^n) = A^n w$ pour tout $w \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$.

Notons $\mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge \subset \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ engendré par les mots de W^* ne commençant pas par la lettre A . On a donc $\mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge = \mathbb{C} \oplus B \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge = \mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge \oplus A \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$. Enfin, notons $\pi : \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge$ l'application de projection correspondant à cette décomposition.

Proposition 5.3. *On a $v \circ u(A \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour les mots w de W . Soit $w \in W$, comme u est un morphisme d'algèbres on a $u(A \cdot w) = u(A)u(w)$ et ainsi $u(A \cdot w) = (A - \alpha)u(w)$. On applique v à cette égalité pour en déduire que $v \circ u(A \cdot w) = v((A - \alpha)u(w)) = v(A \cdot u(w)) - v(\alpha \cdot u(w))$ par linéarité de v . Or pour tout x dans $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge[[\alpha]]$ on a $v(\alpha \cdot x) = A \cdot v(x)$, on en déduit que $v \circ u(A \cdot w) = A \cdot v \circ u(w) - A \cdot v \circ u(w) = 0$. $\square$

Corollary 5.4. *$v \circ u = v \circ u \circ \pi$*

Démonstration. La fonction $\text{id} - \pi$ est la projection de $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ sur $A \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ parallèlement à $\mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge$. D'après la proposition 5.3, la restriction de $v \circ u$ à $A \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{a})^\wedge$ est nulle. Donc $v \circ u \circ (\text{id} - \pi) = 0$ d'où l'énoncé. $\square$

Proposition 5.5. *On a*

$$u(F(z)) = F(z)z^{-\alpha}.$$

Démonstration. Comme u est un morphisme d'algèbres et $u(A) = A - \alpha$, $u(B) = B$ on a $u(F(z))$ qui est solution du système

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} G(z) = \left(\frac{A-\alpha}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G(z) \\ G(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{(A-\alpha)} \end{cases}$$

Ce système a une solution unique, or la fonction $z \mapsto F(z)z^{-\alpha}$ en est aussi solution, on a donc égalité. $\square$

De plus, comme F est indépendant de α alors $v(F(z)) = F(z)$.
On a donc

$$v \circ u(F(z)) = v(F(z)z^{-\alpha}) = z^{-A} F(z).$$

De cette égalité et du corollaire 5.4, on en déduit

$$F(z) = z^A (v \circ u)(F(z)) = z^A (v \circ u \circ \pi)(F(z)).$$

En calculant $\pi(F(z))$ comme dans [ES01] pour tout $|z| < 1$ on obtient

$$\pi(F(z)) = 1 + \sum_{w \in B \cdot W_+^*} I_{n_1+1, \dots, n_r+1}(1 : \dots : 1 : z)w \quad \text{avec } w = BA^{n_1}BA^{n_2} \dots BA^{n_r}.$$

Convention 5.6. Afin d'alléger les notations, pour $w = BA^{n_1}BA^{n_2} \dots BA^{n_r}$ on notera

$$I_w(z) := I_{n_1+1, \dots, n_r+1}(1 : \dots : 1 : z).$$

donc pour $|z| < 1$

$$F(z) = z^A(v \circ u) \left(1 + \sum_{w \in B \cdot W_+^*} I_w(z)w \right) \quad (65)$$

5.3 Calcul de l'image de μ_{as}

Ecrivons $F(z) = 1 + \sum_{w \in W_+^*} F_w(z)w$. Le but de cette partie est d'exprimer les F_w . Pour cela, on

va exprimer dans cette ordre $v \circ u(I_w(z)w)$ et $z^A.v \circ u(I_w(z)w)$ pour les $w \in BW^*$ (on a déjà montré que $v \circ u(A \cdot w^*) = 0$).

Pour un mot $w \in W$, on note $|w|$, $|w|_A$ et $|w|_B$ respectivement la longueur du mot w , le nombre d'occurrence de la lettre A dans w et nombre d'occurrence de la lettre B dans w . Enfin, on notera $w' \preceq w$ pour dire que w' est un sous-mot de w .

Proposition 5.7. Notons $w = BA^{n_1}BA^{n_2} \dots BA^{n_r}$ alors

$$v \circ u(w) = \sum_{k=0}^{|w|_A} \sum_{w' \in J_k(w)} (-1)^k A^k w'.$$

où $J_k(w) := \{m \in W^* \mid |m|_B = |w|_B, |m| = |w| - k \text{ et } m \preceq w\}$.

Démonstration. On a

$$v \circ u(w) = v(B(A - \alpha)^{n_1}B(A - \alpha)^{n_2} \dots B(A - \alpha)^{n_r}).$$

La formule s'en déduit en développant le produit et en utilisant la linéarité de v . □

Corollary 5.8. Si $w = BA^{n_1}BA^{n_2} \dots BA^{n_r}$ alors

$$v \circ u(I_w(z)w) = \sum_{k=0}^{|w|_A} \sum_{w' \in J_k(w)} (-1)^k I_w(z)A^k w'.$$

Démonstration. Par linéarité de u et v on a $v \circ u(I_w(z)w) = I_w(z) \cdot (v \circ u)(w)$. La proposition 5.7 permet alors de conclure. □

Corollary 5.9. Si $w = BA^{n_1}BA^{n_2} \dots BA^{n_r}$ alors

$$z^A.v \circ u(I_w(z)w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{|w|_A} \sum_{w' \in J_k(w)} (-1)^k \frac{\log(z)^n I_w(z)}{n!} A^{k+n} w'.$$

Démonstration. On écrit $z^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(z)^n}{n!} A^n$ et alors le développement en somme de $v \circ u(I_w(z)w) = I_w(z) \cdot (v \circ u)(w)$ donné par la proposition 5.7 permet de conclure. $\square$

Proposition 5.10. *En notant $w = A^m B A^{n_1} B A^{n_2} \dots B A^{n_r} = A^m w_0$ alors*

$$F_w(z) = \sum_{k+n=m} \sum_{\substack{(n'_1, \dots, n'_r) \\ n'_i \geq n_i \text{ et } \sum n'_i - n_i = k}} (-1)^k \frac{\log(z)^n}{n!} I_{n'_1+1, \dots, n'_r+1}(1 : \dots : 1 : z) \quad (66)$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{(n'_1, \dots, n'_r) \\ n'_i \geq n_i \text{ et } \sum n'_i - n_i = k}} (-1)^k \frac{\log(z)^{m-k}}{(m-k)!} I_{n'_1+1, \dots, n'_r+1}(1 : \dots : 1 : z) \quad (67)$$

$$= \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{w' \in W^*, \\ w_0 \in J_k(w')}} (-1)^k \frac{\log(z)^{m-k}}{(m-k)!} I_{w'}(z) \quad (68)$$

$$= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\log(z)^{m-k}}{(m-k)!} I_{\pi(A^k \sqcup w_0)}(z) \quad \text{avec } I_{w_1+w_2}(z) = I_{w_1}(z) + I_{w_2}(z) \quad (69)$$

On remarque que $r = |w|_B$ et que la somme contient $1 + r + r^2 + \dots + r^m = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$ éléments. Enfin pour un mot dans $\mathcal{U}(\mathfrak{a})_{reg}^\wedge$ (i.e. ne commence pas par un A), on retrouve $F_w = I_w(z)$.

Démonstration. On utilise 65 avec le corollaire 5.9 et la formule s'en déduit.

Plus explicitement, le corollaire 5.9 nous montre que les éléments qui vont composer F_w dépendent de m (i.e. le nombre de A par lesquels commencent w) et on sait qu'il n'y a que ces éléments par l'équation 65. $\square$

Du corollaire 5.9 on en déduit également

$$F(z) = 1 + \sum_{w \in B \cdot W_+^*} I_w(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{|w|_A} \sum_{w' \in J_k(w)} (-1)^k \frac{\log(z)^n}{n!} A^{k+n} w' \right) \quad (70)$$

ou encore

$$F(z) = 1 + \sum_{w \in B \cdot W_+^*} I_w(z) \cdot z^A \left(\sum_{k=0}^{|w|_A} \sum_{w' \in J_k(w)} (-1)^k A^k w' \right) \quad (71)$$

où $J_k(w) := \{m \in W^* \mid |m|_B = |w|_B, |m| = |w| - k \text{ et } m \preceq w\}$.

On peut à présent conclure et donner l'image de $\mu_{as} \in \text{Hom}(\mathcal{U}(\mathfrak{a})^\circ, \tilde{\mathcal{E}}^0)$, le morphisme associée à F_{as} .

Theorem 5.11. *L'image de μ_{as} est l'algèbre engendrée par les fonctions polylogarithmes multiples I_w et les puissances du logarithmes.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour un mot $w \in W$, $\mu_{as}(w^*) = \langle w^*, F_{as} \rangle = F_w$. On en déduit le résultat avec la proposition 5.10. $\square$

Bibliographie

- [Boua] N. BOURBAKI. « Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 1 ». In : Springer Berlin. ISBN : 978-3-540-35335-5. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-540-35337-9>.
- [Boub] N. BOURBAKI. « Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 2 et 3 ». In : Springer Berlin. ISBN : 978-3-540-33940-3. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-540-33978-6>.
- [Bro11] Francis BROWN. « Iterated integrals in quantum field theory ». In : *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory* (jan. 2011). DOI : 10.1017/CB09781139208642.006.
- [BF] J.I. BURGOS-GIL et J. FRESAN. « Multiple zeta values : from numbers to motives ». In : Clay Mathematics Proceedings. URL : <http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/mzv.pdf>.
- [ES01] Pavel ETINGOF et Olivier SCHIFFMANN. « Lectures on Quantum Groups ». In : International Press, 2001. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:26001240>.
- [Gon01] A. B. GONCHAROV. « Multiple polylogarithms and mixed Tate motives ». In : (2001). arXiv : math/0103059 [math.AG].
- [Kas95] C. KASSEL. « Quantum Groups ». In : Springer-Verlag, 1995. ISBN : 0-387-94370-6.
- [LM96] Thang Tu Quoc LE et Jun MURAKAMI. « Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial ». In : *Nagoya Mathematical Journal* 142.none (1996), p. 39-65.
- [Reu93] C. REUTENAUER. « Free Lie Algebras ». In : *Free Lie Algebras*. Oxford science publications, 1993. ISBN : 0-19-853679-8.
- [War83] Frank W. WARNER. « Manifolds ». In : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York, NY : Springer New York, 1983. ISBN : 978-1-4757-1799-0. DOI : 10.1007/978-1-4757-1799-0_1. URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1799-0_1.