Stage M1 : Multizêta arborifié

Dorian Perrot

ENS Rennes

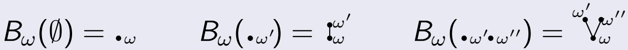
02/09/2022

Arbres enracinés

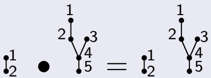
Arbres enracinés

Les arbres enracinés sont une famille de graphes acycliques (décorés par les lettres d'un alphabet Ω) définis par :

- $F = \emptyset$.
- $F = B_\omega(f)$ avec $\omega \in \Omega$ et f un arbre enraciné Ω-décoré.



- $F = f_1 \bullet f_2$ avec f_1, f_2 des arbres enracinés non vide Ω-décorés.

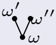


Arbres enracinés

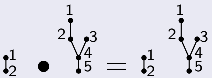
Arbres enracinés

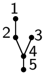
Les arbres enracinés sont une famille de graphes acycliques (décorés par les lettres d'un alphabet Ω) définis par :

- $F = \emptyset$.
- $F = B_\omega(f)$ avec $\omega \in \Omega$ et f un arbre enraciné Ω-décoré.

$B_\omega(\emptyset) = \bullet_\omega$ $\qquad B_\omega(\bullet_{\omega'}) =$  $\qquad B_\omega(\bullet_{\omega'}\bullet_{\omega''}) =$ 

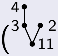
- $F = f_1 \bullet f_2$ avec f_1, f_2 des arbres enracinés non vide Ω-décorés.

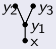


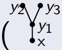
$B_2(B_1(\emptyset)) =$  $\qquad B_5\left[B_4\left(B_3(\emptyset) \bullet B_2(B_1(\emptyset))\right)\right] =$ 

Définition des Multizêtas arborifiés

 au sommet décoré par 11 (resp. 2, 3, 4) on associe la variable n_1 (resp. n_2, n_3, n_4).

$\zeta^{T}_{\sqcup\!\!+\!\!\sqcup}\Big($  $\Big) = \displaystyle\sum_{\substack{n_1>n_3>n_4>0\\ n_1>n_2>0}} \frac{1}{n_1^{11} n_2^{2} n_3^{3} n_4^{4}}$

 au sommet décoré par x (resp. y_1, y_2, y_3) on associe la variable t_1 (resp. t_2, t_3, t_4).

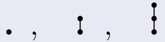
$\zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup}\Big($  $\Big) = \displaystyle\int_{\Delta} \frac{1}{t_1(1-t_2)(1-t_3)(1-t_4)} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4$

Avec

$\Delta := \{(t_1, t_2, t_3, t_4), \quad 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq 0$ et $1 \geq t_1 \geq t_2 \geq t_4 \geq 0\}$.

Les Bambous (multizêtas classiques)

Famille des bambous.

$\emptyset,$  $, \dots$

Fonctions $\shuffle$ et $\stuffle$.

Soient a, b des entiers et w, w' des mots alors le **shuffle** $\shuffle$ et le **stuffle** $\stuffle$ sont définies récursivement par:

- $\emptyset \shuffle w = w \shuffle \emptyset = w$ pour le shuffle et stuffle,
- $(a.w) \shuffle (b.w') = a.[w \shuffle (b.w')] + b.[(a.w) \shuffle w']$ pour le shuffle,
- $(a.w) \stuffle (b.w') = a.[w \stuffle (b.w')] + b.[(a.w) \stuffle w'] + (a+b).[w \stuffle w']]$ pour le stuffle.

Examples

$$2 \stuffle 3 = 2.3 + 3.2 + 5$$

$$2.3 \stuffle 5 = (2.3.5 + 2.5.3 + 2.8) + (5.2.3) + (7.3)$$

Propriétés

Théorèmes

Si w, w' sont des bambous alors :

$$\zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(w_{\mathbb{N}} \sqcup\!+\!\sqcup w'_{\mathbb{N}}) = \zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(w_N)\zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(w'_{\mathbb{N}})$$
$$\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}(w \sqcup\!\sqcup w') = \zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}(w)\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}(w')$$
$$\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}(w_{\mathbb{N}}) = \zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(w_{\mathbb{N}}) \quad \text{(Kontsevich)}$$

$$\begin{aligned}
\zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(2)\zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(3) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3}\right) \\
&= \sum_{n>m\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^3} + \sum_{m>n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \\
&= \zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(2.3) + \zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(3.2) + \zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(5) = \zeta^T_{\sqcup\!+\!\sqcup}(2 \sqcup\!+\!\sqcup 3)
\end{aligned}$$

Propriétés

Théorèmes

Si w, w' sont des arbres alors :

$$\zeta^T_{\stuffle}(w_{\mathbb{N}} \stuffle w'_{\mathbb{N}}) = \zeta^T_{\stuffle}(w_N)\zeta^T_{\stuffle}(w'_{\mathbb{N}})$$

$$\zeta^T_{\shuffle}(w \shuffle w') = \zeta^T_{\shuffle}(w)\zeta^T_{\shuffle}(w')$$

$$\zeta^T_{\shuffle} \circ \mathfrak{s}^T(w_{\mathbb{N}}) \neq \zeta^T_{\stuffle}(w_{\mathbb{N}}) \quad \text{(Kontsevich)}$$

$$\begin{aligned}
\zeta^T_{\stuffle}(2)\zeta^T_{\stuffle}(3) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3}\right) \\
&= \sum_{n>m\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^3} + \sum_{m>n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \\
&= \zeta^T_{\stuffle}(2.3) + \zeta^T_{\stuffle}(3.2) + \zeta^T_{\stuffle}(5) = \zeta^T_{\stuffle}(2 \stuffle 3)
\end{aligned}$$

But du stage!

Multizêta arborifié 2

Pour tout arbre F on a $\zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}^{T}(F) = \zeta^{t}(F)$ où $\zeta^{t}(F)$ est une somme (Pierre Clavier).

But du stage : a-t-on pour tous arbres F, G, $\zeta^{t}(F \sqcup\!\!\!\!\!\sqcup\!\!\!\!\pm G) = \zeta^{t}(F)\zeta^{t}(G)$?

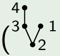
Définition de ζ^t

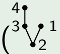
Définition

Soit F un arbre enraciné alors:

$$\zeta^t(F) := \sum_{\substack{n_v \geq 1 \\ v \in V(F)}} \prod_{v \in V(F)} \left(\sum_{\substack{v' \in V(F) \\ v' \succeq v}} n_{v'} \right)^{-\alpha_{v'}}$$

Examples

$\zeta^t\Big($ 

$\Big) = \displaystyle\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4 \geq 1} \frac{1}{(n_1+n_2+n_3+n_4)^2(n_2+n_4)^3 n_3 n_4^4} \neq \zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}\Big($ 

$\Big)$

$\zeta^t\Big($ 

$\Big) = \displaystyle\sum_{n_1,n_2,n_3 \geq 1} \frac{1}{(n_1+n_2+n_3)^2(n_2+n_3)^5 n_3^6} = \zeta^T_{\sqcup\!\sqcup}\Big($ 

$\Big)$

But du stage!

Multizêta arborifié 2

Pour tout arbre F on a $\zeta^T_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}^T(F) = \zeta^t(F)$ où $\zeta^t(F)$ est une somme (Pierre Clavier).

But du stage : a-t-on pour tous arbres F, G, $\zeta^t(F \sqcup\!\!\!\!\pm\!\!\sqcup G) = \zeta(F)\zeta(G)$?

But du stage!

Multizêta arborifié 2

Pour tout arbre F on a $\zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}^{T}(F) = \zeta^{t}(F)$ où $\zeta^{t}(F)$ est une somme (Pierre Clavier).

But du stage : a-t-on pour tous arbres F, G, $\zeta^{t}(F \uplus G) = \zeta(F)\zeta(G)$?

NON

On a $\zeta^{t}(\mathrm{V}^{1\,1}_{2} \uplus \bullet_2) > \zeta^{t}(\mathrm{V}^{1\,1}_{2})\zeta^{t}(\bullet_2)$.

Existe-t-il une loi telle que ζ^{t} soit un morphisme pour cette loi?

But du stage!

Multizêta arborifié 2

Pour tout arbre F on a $\zeta^{T}_{\sqcup\!\sqcup} \circ \mathfrak{s}^{T}(F) = \zeta^{t}(F)$ où $\zeta^{t}(F)$ est une somme (Pierre Clavier).

But du stage : a-t-on pour tous arbres F, G, $\zeta^{t}(F \uplus G) = \zeta(F)\zeta(G)$?

NON

On a $\zeta^{t}({}^{1}\!\bigvee^{1}_{2} \uplus \bullet_{2}) > \zeta^{t}({}^{1}\!\bigvee^{1}_{2})\zeta^{t}(\bullet_{2})$.

Existe-t-il une loi telle que ζ^{t} soit un morphisme pour cette loi?

OUI

C'est une fonction qui est définie récursivement, la fonction 'yew' notée $\rotatebox{180}{$\Lsh$}$.
De plus cette fonction a d'autres applications!

Diagramme conclusion

Théorème

Le diagramme suivant est commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[r, "\lightning"'] \arrow[dd, "\mathfrak{s}^T \otimes \mathfrak{s}^T"', "\wr"] & \mathcal{F}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[r, "fl_{\lightning}"'] \arrow[dd, "\mathfrak{s}^T"', "\wr"] \arrow[rrd, bend left, "\zeta^t"] & \mathcal{W}^{conv}_{\mathbb{N}^*} \arrow[dd, "\mathfrak{s}"', "\wr"] \arrow[rd, "\zeta_{\stuffle}"] & \\
 & & & \mathbb{R} \\
\mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \otimes \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[r, "\shuffle^T"] & \mathcal{F}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[r, "fl_0"] \arrow[rru, bend right, "\zeta^T_{\shuffle}"'] & \mathcal{W}^{conv}_{\{x,y\}} \arrow[ru, "\zeta_{\shuffle}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Définition de la fonction $\downharpoonleft$

- $\emptyset \downharpoonleft \emptyset = \emptyset, \quad F_1 \downharpoonleft \emptyset = F_1, \quad \emptyset \downharpoonleft F_2 = F_2.$
- Si $F_1 = B_a(f_1)$ et $F_2 = B_b(f_2)$ sont des arbres avec une seule composante connexe alors $F_1 \downharpoonleft F_2$ vaut :

$$\sum_{i=0}^{b-1} \binom{a-1+i}{i} B_{a+i}\left[f_1 \downharpoonleft B_{b-i}(f_2)\right] + \sum_{j=0}^{a-1} \binom{b-1+j}{j} B_{b+i}\left[B_{a-j}(f_1) \downharpoonleft f_2\right].$$

- Si $F_1 = T_1 T_2 \cdots T_n$ et $F_2 = t_1 t_2 \cdots t_k$ avec $T_i, t_j \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ alors:

$$F_1 \downharpoonleft F_2 = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \Big((T_i \downharpoonleft t_j)\, T_1 \cdots \widehat{T_i} \cdots T_k t_1 \cdots \widehat{t_j} \cdots t_n \Big)$$

où $T_1 \cdots \widehat{T_i} \cdots T_k$ est la concaténation des arbres $T_1, \cdots, T_k$ sans l'arbre T_i.

Exemple

$$
\begin{aligned}
\bullet_2 \curvearrowright \begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 3\end{smallmatrix} &= B_2\left(\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 3\end{smallmatrix}\right) + 2.B_3\left(\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 2\end{smallmatrix}\right) + 3.B_4\left(\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 1\end{smallmatrix}\right) + B_3(\bullet_2 \curvearrowright \bullet_1) + 3.B_4(\bullet_1 \curvearrowright \bullet_1) \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 3\\ \bullet 2\end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 2\\ \bullet 3\end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 1\\ \bullet 4\end{smallmatrix} + B_3\left[B_2(\bullet_1) + B_1(\bullet_2) + B_2(\bullet_1)\right] \\
&\quad + 3.B_4\left[B_1(\bullet_1) + B_1(\bullet_1)\right] \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 3\\ \bullet 2\end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 2\\ \bullet 3\end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 1\\ \bullet 4\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 2\\ \bullet 3\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet 2\\ \bullet 1\\ \bullet 3\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 2\\ \bullet 3\end{smallmatrix} + 6.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 1\\ \bullet 4\end{smallmatrix} \\
&= \begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 3\\ \bullet 2\end{smallmatrix} + 4.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 2\\ \bullet 3\end{smallmatrix} + 9.\begin{smallmatrix}\bullet 1\\ \bullet 1\\ \bullet 4\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}\bullet 2\\ \bullet 1\\ \bullet 3\end{smallmatrix}
\end{aligned}
$$

Table des matières du rapport.