Intersection de deux cercles dans le plan

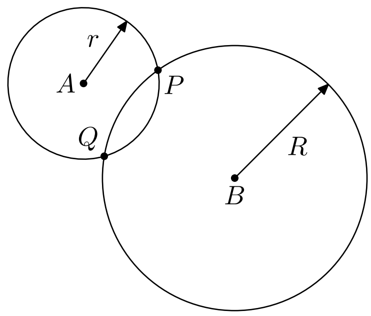
D. Roegel

17 décembre 2001

Résumé

Cette note donne des indications sur le calcul de l'intersection de deux cercles dans le plan, en prenant pour hypothèse que l'intersection existe. Je l'avais initialement rédigée pour des étudiants, mais il s'est avéré qu'ils n'en avaient pas besoin. Ce document peut facilement être généralisé pour traiter les cas d'une intersection unique ou de l'absence d'intersection.

1 Le problème



Il s'agit en général de déterminer les deux points P et Q connaissant les centres A, B et les deux rayons r et R. Il n'y a pas toujours deux intersections, mais dans notre cas il en sera toujours ainsi.

2 Une solution

On note (x_A,y_A) et (x_B,y_B) les coordonnées de A et B. Des équations des deux cercles sont donc :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \qquad (1)$$
$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Pour P et Q, les deux équations sont vraies simultanément. On a donc

$$x^2 + y^2 - 2xx_A - 2yy_A + x_A^2 + y_A^2 = r^2 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 - 2xx_B - 2yy_B + x_B^2 + y_B^2 = R^2 \tag{4}$$

Pour simplifier, on va commencer par supposer que $(x_A,y_A) = (0,0)$. Les solutions correctes dans le cas où $(x_A,y_A) \neq (0,0)$ pourront facilement être trouvées à la fin.

Les formules précédentes deviennent donc :

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5}$$
$$x^2 + y^2 - 2xx_B - 2yy_B + x_B^2 + y_B^2 = R^2 \tag{6}$$

Nous avons alors par simple substitution :

$$r^2 - 2xx_B - 2yy_B + x_B^2 + y_B^2 = R^2 \tag{7}$$

soit

$$2xx_B + 2yy_B = x_B^2 + y_B^2 - R^2 + r^2 \tag{8}$$

Posons $a = 2x_B$, $b = 2y_B$ et $c = x_B^2 + y_B^2 - R^2 + r^2$, nous avons alors

$$ax + by = c \tag{9}$$

qui est l'équation d'une droite. C'est la droite sur laquelle se trouvent les points P et Q. Nous pouvons maintenant réinjecter ce résultat dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$:

$$by = c - ax \tag{10}$$
$$b^2y^2 = c^2 + a^2x^2 - 2acx \tag{11}$$
$$b^2(r^2 - x^2) = c^2 + a^2x^2 - 2acx \tag{12}$$
$$b^2r^2 - c^2 = (a^2 + b^2)x^2 - 2acx \tag{13}$$

d'où l'équation du second degré :

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2acx + c^2 - b^2r^2 = 0 \tag{14}$$

On pose $\Delta = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2)$.

Si $\Delta > 0$, ce que l'on suppose (sinon il n'y a pas d'intersection), on obtient (puisque $a^2 + b^2 > 0$) :

$$x = \frac{2ac \pm \sqrt{\Delta}}{2(a^2 + b^2)} \tag{15}$$

L'équation précédente nous donne x_P et x_Q, mais pour obtenir y_P et y_Q, il faut distinguer deux cas :

1. si $y_B \neq 0$, alors $b \neq 0$ et $ax + by = c$ nous donne immédiatement :

$$y_P = \frac{c - ax_P}{b} \tag{16}$$
$$y_Q = \frac{c - ax_Q}{b} \tag{17}$$

2. si $y_B = 0$, on a $ax = c$ et les deux points P et Q sont sur une droite verticale d'équation $x = c/a$; en utilisant l'équation du cercle de centre B, il vient :

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2 \tag{18}$$
$$\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2 \tag{19}$$
$$y - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2} \tag{20}$$
$$y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c - a^2}{2a}\right)^2} \tag{21}$$

3 Résumé

On se donne (x_A,y_A) et (x_B,y_B), ainsi que r et R. Si on suppose $(x_A,y_A) = (0,0)$, on a la procédure suivante :

1. on pose $a = 2x_B$, $b = 2y_B$ et $c = x_B^2 + y_B^2 - R^2 + r^2$;
2. on pose $\Delta = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2)$;
3. $x_P = \frac{2ac-\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}$;
4. $x_Q = \frac{2ac+\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}$;
5. si $b \neq 0$, on a $y_P = \frac{c-ax_P}{b}$ et $y_Q = \frac{c-ax_Q}{b}$;
6. si $b = 0$, on a $x_P = x_Q$ et $y_P = \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c-a^2}{2a}\right)^2}$ et $y_Q = \frac{b}{2} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{2c-a^2}{2a}\right)^2}$.

Pour adapter ces formules au cas général où (x_A,y_A) est quelconque, il suffit de retrancher x_A à tous les $x_{\ldots}$ et y_A à tous les $y_{\ldots}$, ce qui donne la nouvelle procédure :

1. on pose $a = 2(x_B - x_A)$, $b = 2(y_B - y_A)$ et $c = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - R^2 + r^2$;
2. on pose $\Delta = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2)$;
3. $x_P = x_A + \frac{2ac-\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}$;
4. $x_Q = x_A + \frac{2ac+\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}$;
5. si $b \neq 0$, on a $y_P = y_A + \frac{c-a(x_P-x_A)}{b}$ et $y_Q = y_A + \frac{c-a(x_Q-x_A)}{b}$;
6. si $b = 0$, on a $x_P = x_Q$ et $y_P = y_A+\frac{b}{2}\pm\sqrt{R^2 - \left(\frac{2c-a^2}{2a}\right)^2}$ et $y_Q = y_A+\frac{b}{2}\pm\sqrt{R^2 - \left(\frac{2c-a^2}{2a}\right)^2}$.

Note : ce qui précède n'a pas été testé et il peut y avoir des erreurs.