

# Petit panorama des notations logiques du 20<sup>e</sup> siècle

Denis Roegel

1<sup>er</sup> février 2002

Nous donnons ici les notations employées dans un certain nombre d'œuvres et travaux de la logique. La plupart des œuvres historiquement importantes du 20<sup>e</sup> siècle figurent ici. Bien que la liste contienne aussi des œuvres secondaires, l'éventail donné ici n'est pas nécessairement représentatif de l'ensemble des travaux de logique contemporaine.

Une case blanche signifie ou bien qu'il n'y a pas de symbole correspondant au concept en question, ou bien que je n'en ai pas trouvé dans l'ouvrage en le feuilletant. (Certains symboles sont utilisés rarement et je peux les avoir manqués.) Il ne faut pas confondre une case vide avec la mention « rien ». Ce dernier cas signifie que le concept existe mais qu'aucun symbole ne lui est associé. C'est le cas quelquefois avec le « et ». Certains auteurs écrivent  $pq$  pour  $p \wedge q$  (tout comme on écrit souvent  $ab$  pour  $a \times b$ ).

Notons aussi que les représentations des symboles de ce document sont en général des approximations des symboles réellement employés. Ces derniers peuvent être de taille différente, plus large ou plus grands, plus ou moins gras, etc.

De nombreux symboles trouvent leur origine chez Peano qui s'est inspiré de l'alphabet sténographique de Gabelsberger.

Certains travaux comportent deux dates :

- la première date entre parenthèses représente une date probable, mais pas vérifiée ; ce peut-être le cas pour une première édition d'un livre dont je n'ai consulté qu'une édition ultérieure par exemple ; il se pourrait donc que les notations aient évolué d'une édition à l'autre ;
- la seconde date entre crochets correspond à la date où le formalisme a été constaté ; par exemple, « Carnap (1934) [1951] » signifie que j'ai relevé le formalisme dans une édition de 1951 (en l'occurrence la troisième impression de « The logical syntax of language ») mais dont la première version allemande date de 1934.

Le tableau permet de se faire une idée quant aux dates d'introduction des divers symboles. Il faut toutefois se garder de faire des conclusions hâtives. Ainsi, il peut sembler que Schönfinkel ait introduit « & », «  $\rightarrow$  » et «  $(Ex)$  » en 1924, mais en fait l'auteur affirme reprendre les symboles employés par Hilbert dans ses cours. Peut-être s'agit-il toutefois du premier emploi publié de ces symboles.

Seuls sont donnés les symboles du langage-objet. Certains auteurs définissent aussi d'autres symboles pour le métalangage. En 1928, Skolem utilise par exemple  $\rightarrow$  pour la relation de conséquence entre formules et  $\leftrightarrow$  pour leur équivalence.

Concept Auteur	non	ou	et	si/alors	pour tout	existe	ssi
Frege (1879)	$\neg A$			$\frac{B}{A}$	$\neg x \Phi(x)$		
Peirce (1885)	$\bar{x}$			$\prec$	$\Pi_i$	$\Sigma_j$	
Peano (1889)	$-$	$\cup$	$\cap$	$\circ$	$\circ_x$		
Schröder (1890) (à vérifier)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$	$\text{€}$	$\Pi_i$	$\Sigma_i$	
Peano (ca. 1895) [1901]	$-$	$\cup$	$\cap$	$\circ$	$\circ_x$	$\exists x$	
Hilbert (1904)	$\bar{a}$	o.	u.				
Russell (1908)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$\exists x$	$\equiv$
Russell & Whitehead (1910–1913)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Löwenheim (1915)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$	$\text{€}$	$\Pi_i$	$\Sigma_i$	
Hilbert (1917/18)	$\bar{X}$	$\times$ /rien	$+$	$\rightarrow$	$(x)$		$=$
Skolem (1920)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$		$\Pi_i$	$\Sigma_i$	
Post (1921)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$			$\equiv$
Tarski (1923)	$\sim$	$\vee$		$\supset$			
Schönfinkel (1924)	$\bar{a}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\sim$
Ramsey (1925)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	
Hilbert (1925)	$\bar{A}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	
Kolmogorov (1925)	$\bar{A}$			$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	
Hilbert (1927)	$\bar{A}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	
Skolem (1928)	$\bar{a}$	$+$	$\cdot$		$\Pi_i$	$\Sigma_i$	
Herbrand (1928)	$\sim$	$\vee$	$\&$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Hilbert & Ackermann (1928) [1950]	$\bar{A}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\sim$
Lukasiewicz (1929)	$Np$	$Apq$	$Kpq$	$Cpq$	$Px$	$Sx$	$Epq$
Heyting (1929)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\supset\subset$
Gödel (1930)	$\bar{p}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\sim$
Heyting (1931)	$\neg p$	$\vee$					
Gödel (1931)	$\bar{p}$ (aussi $\sim$ )	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$ (aussi $\supset$ )	$(x)$ (aussi $x\Pi$ )	$(\text{E}x)$	$\equiv$
Herbrand (1931)	$\sim$	$\vee$	$\times$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\equiv$
Gentzen (1934)	$\neg$	$\vee$	$\&$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\supset\subset$
Hilbert & Bernays (1934–39)	$\bar{A}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\sim$
Carnap (1934) [1951]	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Tarski (1940)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$A_x$	$E_x$	$\leftrightarrow$
Quine (ML, 1940)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Henkin (1949)	$\sim$			$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	
Henkin (1950)	$\sim$	$\vee$	rien	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	
Kleene (IM, 1952)	$\neg$	$\vee$	$\&$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\sim$
Carnap (1954)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Church (1956)	$\sim$	$\vee$	rien	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Suppes (IL, 1957)	$\neg p$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\exists x)$	$\leftrightarrow$
Davis (C&U, 1958) [1982]	$\neg A$		$\&$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	
Bernays (AST, 1958) [1968]	$\bar{p}$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\leftrightarrow$
Suppes (AST, 1960)	$\neg p$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Quine (STL, 1963)	$\sim$			$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Mendelson (1964) [1968]	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$(x)$	$(\text{E}x)$	$\equiv$
Kleene (LM, 1967) [1971]	$\neg$	$\vee$	$\&$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\sim$
Smullyan (1968)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$(\forall x)$	$(\exists x)$	$\leftrightarrow$
Blanché (1968)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Putnam (1971)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Boolos & Jeffrey (1974) [1996]	$\neg p$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Copi (SL, 1979)	$\sim$	$\vee$	$\cdot$	$\supset$	$(x)$	$(\exists x)$	$\equiv$
Quine (1982)	$\neg p$	$\vee$	rien	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Vax (1982)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\Leftrightarrow$
Rivenc (1989)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Gochet & Gribomont (1990)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\equiv$
Lalement (1990)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\Leftrightarrow$
Ruyer (1990)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Smullyan (1992)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\equiv$
Largeault (1992)	$\neg$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Cori & Lascar (1993)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\Rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\Leftrightarrow$
Largeault (1993)	$\neg$	$\vee$	$\&$	$\rightarrow$	$\forall x$	$\exists x$	$\leftrightarrow$
Chazal (1996)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\circ$
Gauthier (1997)	$\sim$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	
Leroux (1998)	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\supset$	$\forall x$	$\exists x$	$\equiv$
Encyclop. Britannica (1999)	$\sim$	$\vee$	rien/ $\cdot$	$\supset$	$(\forall x)$	$(\exists x)$	$\equiv$

## Sources

- Frege (1879) : *Begriffsschrift* (Halle : Louis Nebert, traduit dans « From Frege to Gödel »)
- Peirce (1885) : *On the Algebra of Logic ; A Contribution to the Philosophy of Notation* (American Journal of Mathematics 7 : 180–202).
- Peano (1889) : *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Augustæ Taurinorum, Ed. Fratres Bocca. — XVI, 20 p, traduit dans « From Frege to Gödel » sous « The principles of arithmetic »)
- Schröder (1890) : *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)* (volume 1, Leipzig : Teubner)
- Peano (ca. 1895) : *Formulaire de mathématiques* (d’après Cajori, vol. 2, page 300, Peano a utilisé  $\exists$  dans le volume II, numéro 1, de son *Formulaire de mathématiques*, qui a été publié en 1897)
- Hilbert (1904) : *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* (Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, 174–185) (dans van Heijenoort, « u. » est remplacé par « a. ») (traduit sous « On the foundations of logic and arithmetic » dans « From Frege to Gödel »)
- Russell (1908) : *Mathematical logic as based on the theory of types* (American Journal of Mathematics 30 : 222–262, reproduit dans « From Frege to Gödel »)
- Russell & Whitehead (1910–1913) : *Principia Mathematica* (Cambridge : At the University Press)
- Löwenheim (1915) : *Über Möglichkeiten im Relativkalkül* (Mathematische Annalen 76 : 447–470, traduit sous « On possibilities in the calculus of relatives » dans « From Frege to Gödel »)
- Hilbert (1917/1918) : *Prinzipien der Mathematik* (Notes de cours par Paul Bernays, Winter-Semester 1917–1918, Tapuscrit non publié. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen) (communication personnelle de Richard Zach)
- Skolem (1920) : *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischen Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.* (Videnskabsakademiet i Kristiania, Skrifter I, No. 4, 1919, 1–36, traduit sous « Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem » dans « From Frege to Gödel »)
- Post (1921) : *Introduction to a general theory of elementary propositions* (American Journal of Mathematics 43 : 163–185, aussi dans « From Frege to Gödel »)
- Tarski (1923) : *On the Primitive Term of Logistic* (dans Tarski : « Logic, Semantics, Metamathematics », Oxford University Press, 1956)
- Schönfinkel (1924) : *Über die Bausteine der mathematischen Logik* (Mathematische Annalen 92 : 305–316, traduit sous « On the building blocks of mathematical logic » dans « From Frege to Gödel »)
- Ramsey (1925) : *The Foundations of Mathematics* (Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, 25 : 338–384, aussi dans F. P. Ramsey : « Philosophical Papers », Cambridge University Press, 1990)
- Hilbert (1925) : *Über das Unendliche* (Mathematische Annalen (1926) 95 : 161–190, traduit sous « On the infinite » dans « From Frege to Gödel »)
- Kolmogorov (1925) : *О принципе tertium non datur* (Математический сборник, 32 : 646–667, traduit sous « On the principle of excluded middle » « From Frege to Gödel »)
- Hilbert (1927) : *Die Grundlagen der Mathematik* (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6 : 65–85, traduit sous « The foundations of mathematics » dans « From Frege to Gödel »)
- Skolem (1928) : *Über die mathematische Logik* (Norsk matematisk tidsskrift 10 : 125–142, traduit sous « On mathematical logic » dans « From Frege to Gödel »)
- Herbrand (1928) : *Sur la théorie de la démonstration* (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences, Paris, 186 : 1274–1276, traduit sous « On proof theory » dans « Logical Writings »)
- Hilbert & Ackermann (1928) : *Grundzüge der Theoretischen Logik* (traduit sous « Principles of Mathematical Logic ») (Berlin : Springer-Verlag)
- Łukasiewicz (1929) : *Elementy logiki matematycznej* (Warsaw) (traduit sous « Elements of mathematical logic », New York : Macmillan, 1963)
- Heyting (1929) : *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Physikalisch-mathematische Klasse, 42–56, 57–71, 158–169, 1930)
- Gödel (1930) : *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls* (Monatshefte für Mathematik und Physik 37 : 349–360, traduit sous « The completeness of the axioms of the functional calculus of logic » dans « From Frege to Gödel »)
- Heyting (1931) : *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik* (Erkenntnis, 2 : 106–115)
- Gödel (1931) : *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I* (Monatshefte für Mathematik und Physik 38 : 173–198, traduit sous « On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I » in « From Frege to Gödel »)
- Herbrand (1931) : *Sur la non-contradiction de l’arithmétique* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 166 : 1–8, traduit sous « On the consistency of arithmetic » dans « From Frege to Gödel », où les symboles corrects sont donnés, ce qui n’est pas le cas dans « Logical Writings » (1971, publié par Goldfarb) qui utilise des symboles plus standard)

- Gentzen (1934) : *Untersuchungen über das logische Schließen* (Mathematische Zeitschrift 39 : 176–210, 405–431) (dans la traduction française « Recherches sur la déduction logique », 1955, les symboles sont  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\supset$ ,  $\forall x$ ,  $\exists x$ ,  $\supset \subset$ )
  - Hilbert & Bernays (1934–1939) : *Grundlagen der Mathematik* (Berlin : Springer-Verlag, traduit en français sous « Fondements des mathématiques », Paris : L’Harmattan, 2001)
  - Carnap (1934) : *Logische Syntax der Sprache* (Wien : Julius Springer, traduit sous « The Logical Syntax of Language », 1937)
  - Tarski (1940) : *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences* (New York : Oxford university press)
  - Quine (1940) : *Mathematical Logic* (New York : W. W. Norton & company, inc.)
  - Henkin (1949) : *The completeness in the first order functional calculus* (Journal of Symbolic Logic, 14 : 150–166)
  - Henkin (1950) : *Completeness in the theory of types* (Journal of Symbolic Logic, 15(2) : 81–91)
  - Kleene (1952) : *Introduction to Metamathematics* (Princeton, NJ : D. van Nostrand)
  - Carnap (1954) : *Einführung in die symbolische Logik* (traduit sous « Introduction to Symbolic Logic and its Applications », 1958) (Wien : Springer)
  - Church (1956) : *Introduction to Mathematical Logic* (Princeton : Princeton University Press)
  - Suppes (1957) : *Introduction to Logic* (New York : Van Nostrand Reinhold Company)
  - Davis (1958) : *Computability and Unsolvability* (New York : McGraw Hill)
  - Bernays (1958) : *Axiomatic Set Theory* (Amsterdam : North-Holland)
  - Suppes (1960) : *Axiomatic Set Theory* (Princeton, N.J. : Van Nostrand)
  - Quine (1963) : *Set Theory and its Logic* (Cambridge : Belknap Press of Harvard University Press)
  - Mendelson (1964) : *Introduction to Mathematical Logic* (Princeton, NJ : Van Nostrand)
  - Kleene (1967) : *Mathematical Logic* (New York : John Wiley)
  - Smullyan (1968) : *First-order Logic* (New York : Springer-Verlag)
  - Blanché (1968) : *Introduction à la logique contemporaine* (Paris : A. Colin)
  - Putnam (1971) : *Philosophy of Logic* (New York : Harper and Row)
  - Boolos & Jeffrey (1974) : *Computability and Logic* (Cambridge University Press)
  - Copi (1979) : *Symbolic Logic* (New York : Macmillan)
  - Quine (1982) : *Methods of logic* (les éditions précédentes avaient les symboles de Russell et Whitehead) (Cambridge, Mass. : Harvard University Press)
  - Vax (1982) : *Lexique logique* (Paris : Presses Universitaires de France)
  - Rivenc (1989) : *Introduction à la logique* (Paris : Payot)
  - Gochet & Gribomont (1990) : *Logique, volume 1 : méthodes pour l’informatique fondamentale* (Paris : Hermès)
  - Lalement (1990) : *Logique, réduction, résolution* (Études et recherches en informatique, Paris : Masson) (traduit sous « Computation as logic », Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1993)
  - Ruyer (1990) : *Logique* (Paris : Presses Universitaires de France)
  - Smullyan (1992) : *Gödel’s Incompleteness Theorems* (New York : Oxford University Press)
  - Largeault (1992) : *L’intuitionisme* (Que sais-je? 2684, Paris : Presses Universitaires de France)
  - Cori & Lascar (1993) : *Logique mathématique. Cours et exercices* (Paris : Masson, traduit en anglais sous « Mathematical logic: A Course with Exercises », 2 volumes, New York : Oxford University Press, 2000 et 2001)
  - Largeault (1993) : *La logique* (Que sais-je? 225, Paris : Presses Universitaires de France)
  - Chazal (1996) : *Éléments de logique formelle* (Paris : Hermès)
  - Gauthier (1997) : *Logique et fondements des mathématiques* (Paris : Diderot Éditeur)
  - Leroux (1998) : *Introduction à la logique* (Bibliothèque des sciences, Paris : Diderot Éditeur)
  - Encyclop. Britannica (1999) :
- Collections mentionnées :
- Jean van Heijenoort : « From Frege to Gödel », Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1967
  - Jacques Herbrand : « Logical Writings », Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1971
  - F. P. Ramsey : « Philosophical Papers », Cambridge University Press, 1990
  - Alfred Tarski : « Logic, Semantics, Metamathematics », Oxford University Press, 1956