

Proposition de stage

Contrôle non linéaire sous contraintes illustré sur un pendule inversé

Dmitry Sokolov et Laurent Alonso

- **Titre :** Contrôle non linéaire sous contraintes illustré sur un pendule inversé
- **Thématique :** Théorie du contrôle, équations différentielles
- **Laboratoire, institution et université :** LORIA, INRIA, Université de Lorraine
- **Ville et pays :** Nancy, France.
- **Equipe ou projet dans le labo :** Equipe PIXEL (<http://pixel.inria.fr/>)
- **Directeur de stage :** Dmitry Sokolov (dmitry.sokolov@univ-lorraine.fr), Laurent Alonso
- **Directeur du laboratoire :** Jean-Yves Marion (jean-yves.marion@loria.fr)

— **Présentation générale du domaine (5 à 10 lignes) :**

Les pendules inversés tels que nous montre la figure 1 sont des outils classiques dans les laboratoires de contrôle depuis les années 1950. En raison de leur nature non linéaire, les pendules ont préservé leur utilité jusqu'à maintenant et sont utilisés pour illustrer de nombreuses idées émergentes dans le domaine du contrôle non linéaire. De nombreuses tâches peuvent être accomplies en contrôlant l'énergie du pendule plutôt que de contrôler directement sa position et sa vitesse. Par exemple, une façon de faire remonter le pendule en position verticale consiste à lui donner une énergie correspondant à la position verticale [3]. Le domaine est bien étudié, cependant on ignore presque toujours les contraintes naturelles d'une réalisation physique du système comme, par exemple, la longueur du rail.

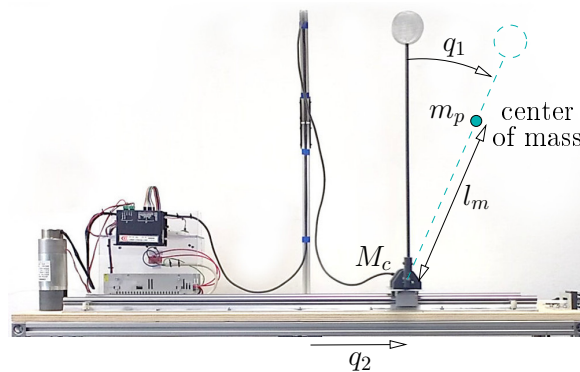


FIGURE 1 – Photo du pendule sur le chariot. Le système possède deux degrés de liberté : l'angle du pendule q_1 et la position du chariot q_2 .

- **Objectifs du stage (10 à 20 lignes)** L'objectif du stage est d'étudier et d'implémenter le contrôle d'un pendule inversé sous la contrainte d'une longueur de rail fixée. L'une des pistes à explorer est l'approche type *speed-gradient* proposée par Fradkov [1,2]. L'idée sous-jacente est très simple : nous étudions un système qui obéit à l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A(x, t) + B(x, t) \cdot u(t),$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle que l'on applique. Par exemple, pour le pendule $n = 4$, $x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^\top$ (voir figure 1), et u est un scalaire (le courant qui passe à travers les bobines du moteur). Nous cherchons à minimiser une fonction quadratique Q :

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} (y(x, t) - y_*(t))^\top H (y(x, t) - y_*(t)),$$

où $y \in \mathbb{R}^l$ peut être, par exemple, l'énergie du pendule, et y_* est le comportement souhaité. Comme $Q(x, t)$ ne dépend pas de u directement, nous n'avons pas de guide pour choisir le contrôle u , par contre

la dérivée de Q en dépend :

$$\dot{Q}(x, u, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + (\nabla_x Q(x, t))^\top (A(x, t) + B(x, t) \cdot u(t)).$$

Comme nous ne savons pas minimiser le Q directement, nous pouvons essayer de minimiser \dot{Q} , ce qui donne l'espoir de minimiser Q (si $\dot{Q} < 0$, alors Q décroît). Nous pouvons donc calculer le gradient de \dot{Q} (d'où le nom *speed-gradient*), et l'utiliser comme contrôle u :

$$u := \nabla_u \dot{Q}(x, u, t) = \left[\frac{\partial \dot{Q}(x, u, t)}{\partial u} \right]^\top = B(x, t) \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right]^\top H(y(x, t) - y_*(t)).$$

Si nous appliquons cette procédure à l'énergie du pendule, le résultat sera exactement le même que celui d'Åström [3] qui fait référence dans le domaine. Malheureusement, il n'est pas facile de rajouter des contraintes dans cette formulation. L'idée de ce stage est d'aller un pas plus loin et d'étudier la possibilité de minimisation de $\frac{\partial^2 \dot{Q}(x, u, t)}{\partial u^2}$, ce qui permettrait au système de "découvrir" les contraintes.

Le stage va se dérouler comme suit :

1. dans un premier temps il faudrait faire une simulation numérique d'un pendule sous une forme libre (matlab, python ou autre),
2. faire une étude bibliographique sur les différentes stratégies de contrôle d'un pendule,
3. développer l'approche *speed-gradient*,
4. la comparer à l'état de l'art,
5. la tester sur le matériel disponible (figure 1).

— **Références bibliographiques :**

- [1] K.J. Åström, K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. Automatica, Volume 36, Issue 2, February 2000, Pages 287-295
- [2] Fradkov A.L. Cybernetic physics : Principles and examples. SPb. : Nauka, 2003.
- [3] Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. Nonlinear and adaptive control of complex dynamical systems. SPb. : Nauka, 2000. 549p.

— **Compétences espérées :** La principale qualité attendue est l'envie d'apprendre et de travailler en équipe.