Complexité

Examen - Seconde session - 3 heures

Les questions indiquées par une étoile ($\star$) signalent des questions sans doute plus difficiles que les autres. Tout document et autre polycopié est interdit.

Le sujet comporte 5 pages et est composé de 4 parties dans l'ensemble indépendantes. Il est ainsi possible de traiter chacune des parties séparemment.

Il est possible d'admettre les résultats d'une question pour résoudre la suivante, il faut pour cela l'indiquer clairement dans la copie. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions pour avoir la note maximale. La rédaction sera prise en compte dans la notation.

Introduction

On donne ici une liste de problèmes **NP**-complets. Il est admis que tous ces problèmes sont **NP**-complets, et on pourra donc utiliser ce fait dans la suite sans avoir à le prouver.

NOM :	SAT
ENTREE :	Une formule ϕ
QUESTION :	Est-ce que ϕ est satisfaisable ?

NOM :	3SAT
ENTREE :	Une formule ϕ avec exactement 3 littéraux par clause
QUESTION :	Est-ce que ϕ est satisfaisable ?

NOM :	PARTITION
ENTREE :	Des entiers a_i
QUESTION :	Est-ce qu'on peut partitionner les a_i en deux parties de même somme ?

NOM :	3COLOR
ENTREE :	Un graphe G
QUESTION :	Est-ce que G est 3-coloriable ?

NOM :	CLIQUE
ENTREE :	Un graphe G et un entier k
QUESTION :	Est-ce que G a une clique de taille k

Une clique est un ensemble de sommets tous reliés deux à deux.

NOM :	DIOPHANT
ENTREE :	Des entiers a, b, c positifs
QUESTION :	Est-ce qu'il existe des entiers positifs x et y tels que $ax^2 + by = c$?

NOM :	HAMILTON
ENTREE :	Un graphe G
QUESTION :	Est-ce que G contient un cycle hamiltonien ?

Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets du graphe, et une et une seule fois par chacun des sommets du graphe.

1 Prélude

Le professeur prépare les copies d'examen. Les élèves se disposent dans la salle à leur convenance, mais ils sont "alignés" sur une grille correspondant aux places possibles.

On peut voir ci-dessous deux des dispositions possibles pour 5 étudiants dans une salle contenant 3×5 places.

			|	A		
			|			
D			|		D	
A	C	E	|		C	
	B		|	B		E

Le professeur distribue les copies d'examen aux étudiants. Cependant, pour éviter que les étudiants aient la tentation de tricher, il s'arrange pour que deux étudiants assis côte-à-côte (c'est à dire l'un derrière l'autre, ou l'un à côté de l'autre) n'aient pas la même couleur de brouillon. Ainsi dans le premier exemple, l'élève A n'a pas la même couleur de brouillon que l'élève C ni que l'élève D.

Q 1) Montrer que deux couleurs de brouillon suffisent toujours. On indiquera sur les deux exemples les couleurs de brouillon attribuées à chaque élève, puis on généralisera la démonstration quelque soient le nombre d'étudiants et le nombre de places.

Le professeur s'aperçoit ensuite que rien n'empêche les étudiants situés en diagonale les uns des autres (comme B et E) dans le premier exemple, ou B et C dans le deuxième) d'échanger leur feuille de brouillon. Bien qu'aucun élève n'ait essayé de tricher, il s'arrange donc pour que deux étudiants assis en diagonale l'un de l'autre n'aient pas la même couleur de brouillon.

Q 2) Montrer que 2 couleurs de brouillon suffisent dans le deuxième exemple, mais qu'il en faut 3 pour le premier exemple.

Q 3) Montrer que 4 couleurs de brouillon suffisent toujours quelque soient le nombre d'élèves et le nombre de place. Donner un exemple où il est nécessaire d'avoir 4 couleurs de brouillon.

Q 4) Donner un algorithme polynomial permettant de savoir, étant donné une disposition, si 2 couleurs de brouillon suffisent.

Q 5) Traduire le problème en un problème de graphe. Expliquer pourquoi il est difficile *a priori* de savoir si 3 couleurs de brouillon peuvent suffire.

2 Questions

Q 6) Rappeler la définition de **coNP**. Donner un problème **coNP**-complet.

Q 7) Montrer que si 3SAT est dans **coNP**, alors **NP** = **coNP**.

Le problème 4SAT est le suivant :

NOM :	4SAT
ENTREE :	Une formule ϕ avec exactement 4 littéraux par clause
QUESTION :	Est-ce que ϕ est satisfaisable ?

Q 8) Montrer que 4SAT est **NP**-complet.

Le problème 4COLOR est le suivant :

NOM :	4COLOR
ENTREE :	Un graphe G
QUESTION :	Est-ce que G est 4-coloriable ?

Q 9) Montrer que 4COLOR est **NP**-complet.

On désigne par équation polynomiale une équation utilisant uniquement des variables, et les symboles $+, \times, -, 0, 1$. Le problème EQN est le suivant :

NOM :	EQN
ENTREE :	Un système d'équations polynomiales
QUESTION :	Est-ce que le système a une solution modulo 2 ?

Avoir une solution modulo 2 signifie que les variables sont à coefficients dans $\{0, 1\}$ et que toutes les équations doivent être vraies modulo 2.

Une instance typique de EQN ressemble à :

$$\left\{ \begin{aligned} x \times y + z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ w + x \times z \times u &= 0 \end{aligned} \right.$$

Q 10) Trouver une solution de ce système (rappel : on travaille modulo 2, les variables sont donc à valeur dans $\{0, 1\}$).

Q 11) Montrer que EQN est dans **NP**.

On se propose de montrer que EQN est **NP**-complet en effectuant une réduction à partir de 3SAT.

Q 12) Montrer que $x(y + 1) = z$ si et seulement si $z = x \wedge \overline{y}$

Q 13) Donner une équation polynômiale E à trois inconnues x, y, z tel que les solutions de l'équation E soient précisément les solutions de l'équation $x \vee y \vee z = 1$.

Q 14) Même question avec l'équation $x \vee \overline{y} \vee \overline{z} = 1$.

Q 15) Montrer que EQN est **NP**-dur, puis qu'il est **NP**-complet.

3 Union disjointe

Q 16) Donner, ou montrer l'existence, d'un problème L qui n'est pas dans **NP**.

Si L_1 et L_2 sont deux langages, on note $L_1 \oplus L_2$ le langage :

$$L_1 \oplus L_2 = \{(0,x) | x \in L_1\} \cup \{(1,x) | x \in L_2\}$$

Q 17) Montrer que si L_1 et L_2 sont dans **P**, alors $L_1 \oplus L_2$ est dans **P**.

Q 18) Montrer que si L_1 et L_2 sont dans **NP**, alors $L_1 \oplus L_2$ est dans **NP**.

Q 19) Montrer que $L_1 \leq_m L_1 \oplus L_2$

Q 20) En déduire :

- Si $L_1 \oplus L_2$ est dans **P** alors L_1 et L_2 sont dans **P**.
- Si $L_1 \oplus L_2$ est dans **NP** alors L_1 et L_2 sont dans **NP**.
- Si L_1 est **NP**-dur, alors $L_1 \oplus L_2$ est **NP**-dur (aucune hypothèse n'est faite sur L_2).

Q 21) Montrer qu'il existe un problème **NP**-dur qui n'est pas **NP**-complet.

On rappelle la définition de **DP** :

Définition 1

Un langage $\mathcal{L}$ est dans la classe **DP** s'il existe un langage $\mathcal{L}_1 \in$ **NP** et $\mathcal{L}_2 \in$ **coNP** tels que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Q 22) Montrer que si L_1 est dans **NP** et L_2 dans **coNP** alors $L_1 \oplus L_2$ est dans **DP**.

Si L est un langage, on note L_p l'ensemble des mots de L de longueur paire, et L_i l'ensemble des mots de L de longueur impaire.

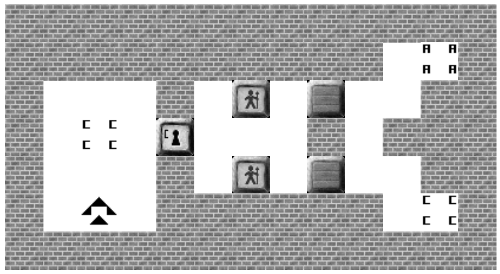
Q 23) Montrer que $L \leq_m L_p \oplus L_i$

Q 24) Montrer que $L_p \oplus L_i \leq_m L$

(*Note : on supposera pour cette question qu'il existe un mot x qui n'est pas dans L, autrement dit que $L \neq \Sigma^\star$*)

4 Aventure

On s'intéresse ici à un jeu d'aventures coopératif dont voici un exemple typique :



Et sa représentation sous forme de tableau :

#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#		k_1	#	
#				#		@		B			#	#	
#		k_3		d_3				#		#	#	#	
#				#		@		B			#	#	
#		FIN		#	#	#	#	#	#		k_3	#	
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	

Le but est d'amener les deux héros (représentés par les symboles @) vers l'arrivée (représenté par le symbole FIN).

Chacun des héros peut seulement se déplacer dans les quatres directions, et peut interagir avec les éléments du décor :

- Il ne peut pas traverser les murs (#) ;
- Il peut pousser les blocs (B), mais ne peut pousser qu'un bloc à la fois ;
- Il peut se placer sur un interrupteur k_i ; L'interrupteur ne reste enclenché que tant quelqu'un reste sur l'interrupteur.
- Il peut franchir la porte d_i si l'autre héros est placé sur l'interrupteur k_i.

Q 25) Expliquer comment, dans l'exemple, on peut amener les deux héros vers l'arrivée.

$\star$**Q 26)**$\star$ Montrer que le problème de savoir s'il est possible d'amener les deux héros vers l'arrivée est dans **PSPACE**.

Q 27) Montrer que le problème de savoir s'il est possible d'amener les deux héros vers l'arrivée est **NP**-dur. On réduira à partir de 3-SAT. On pourra se contenter de décrire brièvement la réduction et de l'expliquer sur l'exemple : $\phi = (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$

(*Aide : On pourra par exemple représenter chaque clause par des portes que doit franchir le premier joueur, tandis que le deuxième joueur se place sur un interrupteur correspondant à un des littéraux de la clause. On expliquera alors comment s'arranger pour que le deuxième joueur ne puisse se placer sur l'interrupteur correspondant à un littéral puis plus tard sur sa négation*)

(*Note : l'exemple peut donner une idée de gadget*)

$\star$**Q 28)**$\star$ Montrer que le problème devient polynomial si on enlève les blocs.

(*Aide : On remarquera (et on justifiera) qu'à tout instant, la situation est entièrement déterminée par la position des deux héros*)