

# Pavages et logique

E. Jeandel

Marseille, France, Monde

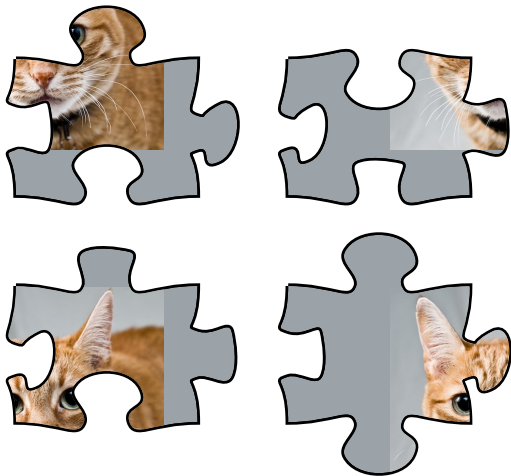
22 mai 2008

Expliquer comment voir les pavages comme des modèles d'une théorie, et ce que ça apporte

# Puzzle

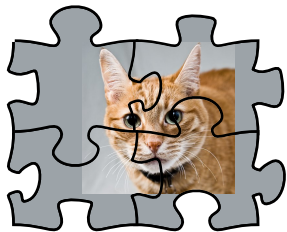
Mais qu'est ce que c'est que cette image ?

Etant donné des pièces de puzzle en quantité infinie, peut-on faire un puzzle infini dans toutes les directions ?



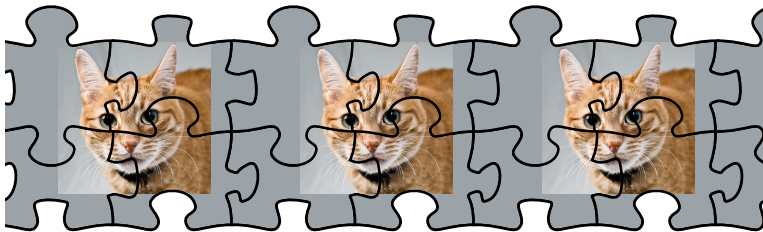
# Réponse

Ce puzzle n'était pas très dur



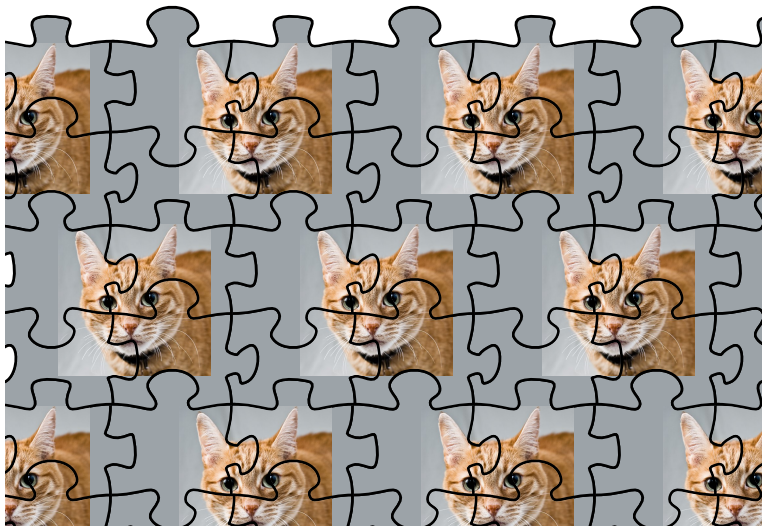
# Réponse

Ce puzzle n'était pas très dur



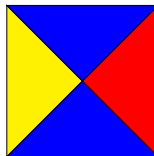
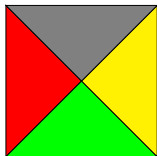
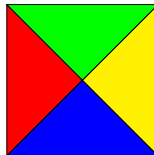
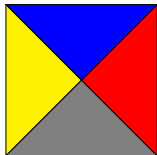
# Réponse

Ce puzzle n'était pas très dur



# Formalisation : Tuiles de Wang

Tout cela devient plus carré



Un jeu de tuiles de Wang est donc donné par un ensemble de couleurs, et, pour chaque tuile, par un quadruplet de couleur.

# Formalisation : Contraintes locales

- Une tuile est une couleur dans un ensemble fini  $C$ .
- Le placement de deux tuiles côte à côte est régi par des contraintes locales, c'est à dire par des sous-ensembles  $H$  et  $V$  de  $C \times C$ .
- Un coloriage est un plan colorié.
- Un pavage est un plan colorié correctement.

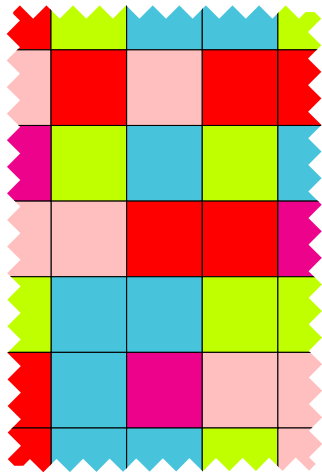


## 1 Coloriages comme structures

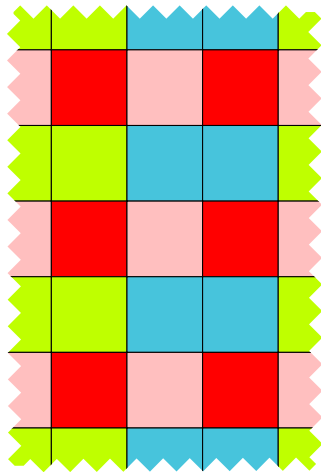
## 2 Pavages comme théories

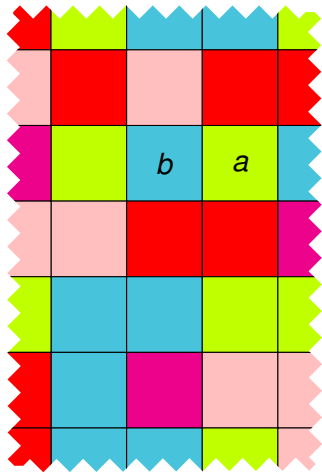
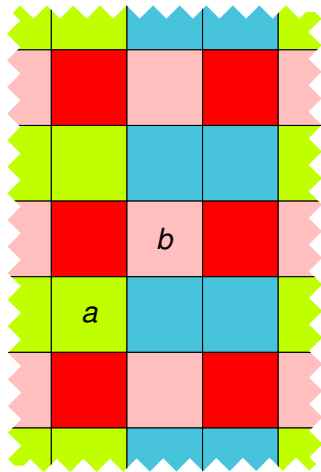
- Formaliser le plan
- Formaliser les tuiles
- Formaliser les contraintes

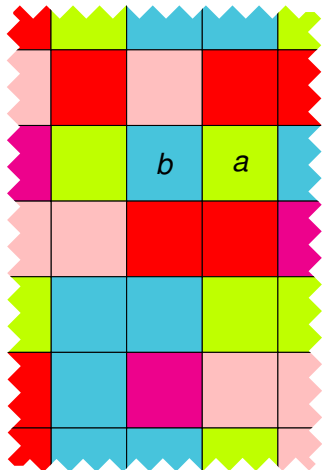
ℳ



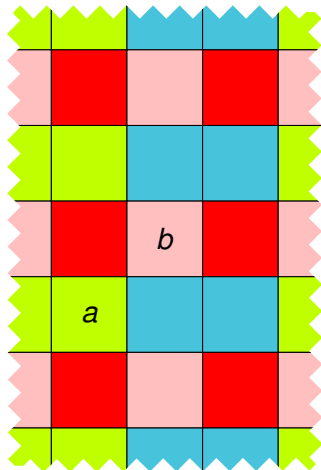
ℴ



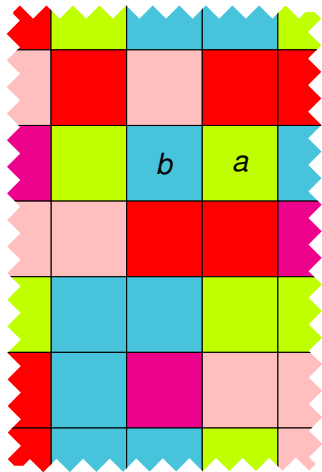
$\mathfrak{M}$  $\mathfrak{N}$ 

$\mathfrak{M}$ 

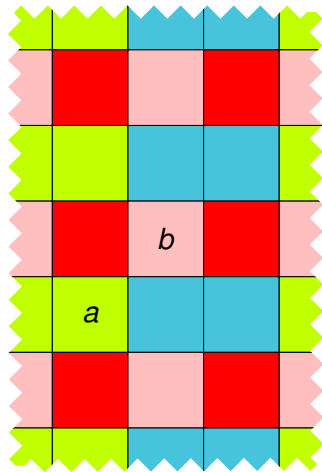
$$\mathfrak{M} \models P_{\square}(a)$$

 $\mathfrak{N}$ 

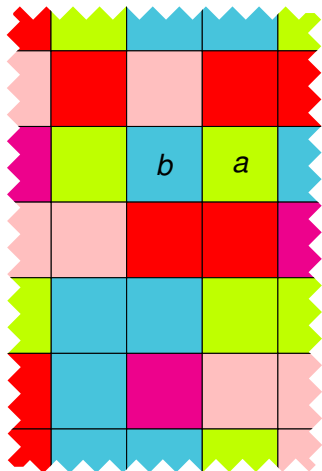
$$\mathfrak{N} \models P_{\square}(a)$$

$\mathfrak{M}$ 

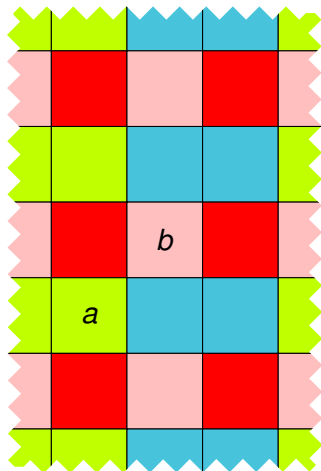
$$\mathfrak{M} \models P_{\square}(b)$$

 $\mathfrak{N}$ 

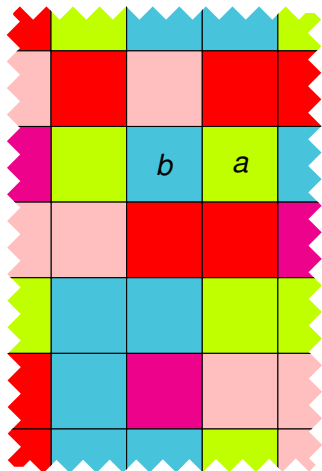
$$\mathfrak{N} \not\models P_{\square}(b)$$

$\mathfrak{M}$ 

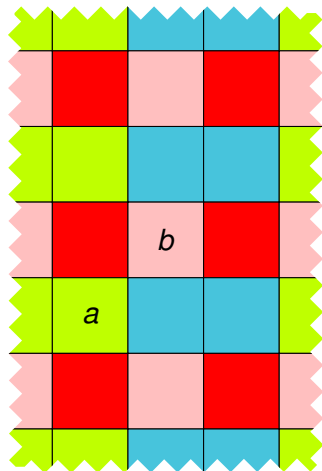
$$\mathfrak{M} \models \exists x, P_{\square}(x)$$

 $\mathfrak{N}$ 

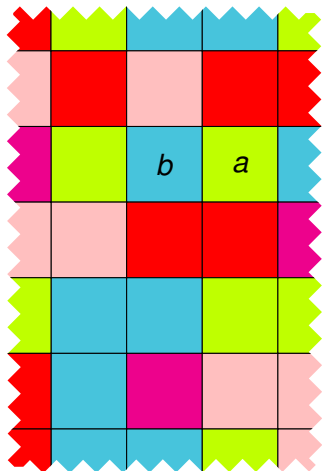
$$\mathfrak{N} \models \exists x, P_{\square}(x)$$

$\mathfrak{M}$ 

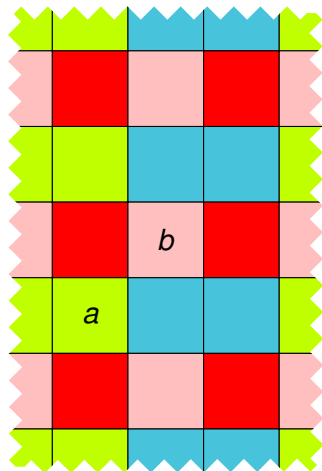
$$\mathfrak{M} \not\models \forall x, \neg P_{\blacksquare}(x)$$

 $\mathfrak{N}$ 

$$\mathfrak{N} \models \forall x, \neg P_{\blacksquare}(x)$$

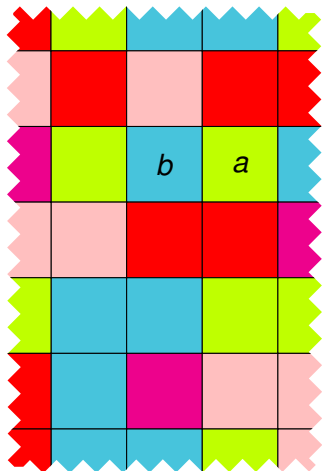
$\mathfrak{M}$ 

$$\mathfrak{M} \models (b = W(a))$$

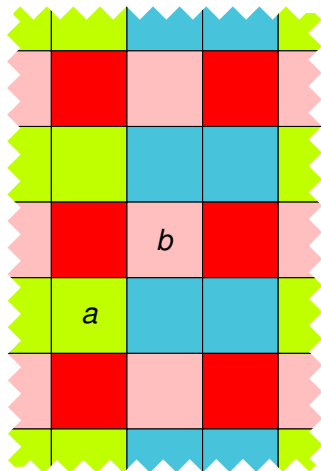
 $\mathfrak{N}$ 

$$\mathfrak{N} \models (b = N(E(a)))$$

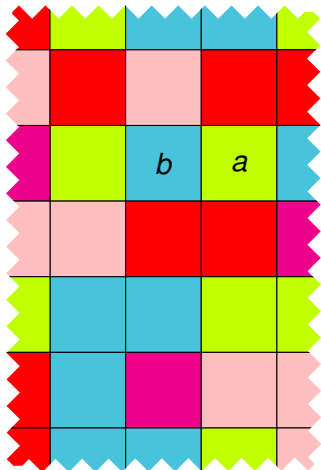


$\mathfrak{M}$ 

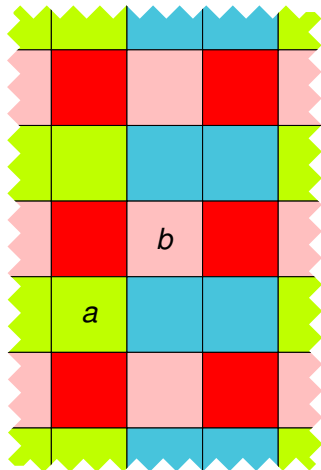
$$\mathfrak{M} \models \forall x, \exists y, N(y) = x$$

 $\mathfrak{N}$ 

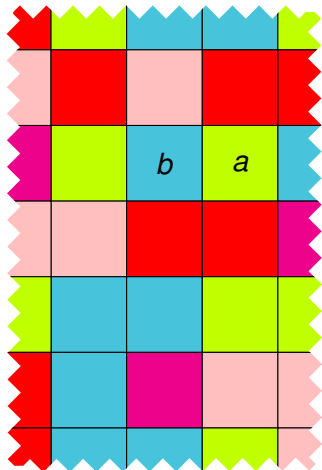
$$\mathfrak{N} \models \forall x, \exists y, N(y) = x$$

$\mathfrak{M}$ 

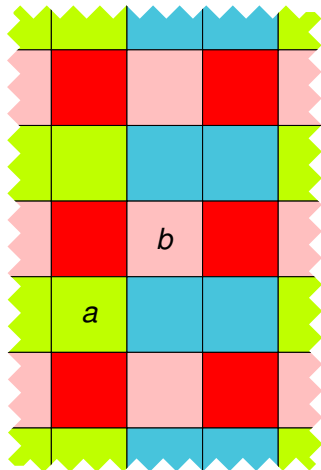
$$\mathfrak{M} \models \forall x, N(S(x)) = x$$

 $\mathfrak{N}$ 

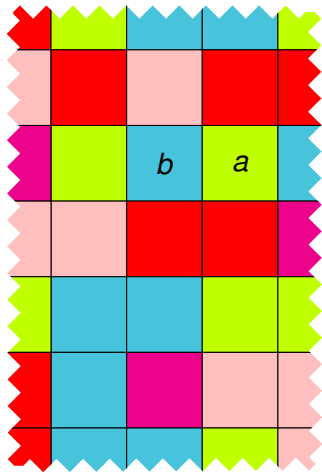
$$\mathfrak{N} \models \forall x, N(S(x)) = x$$

$\mathfrak{M}$ 

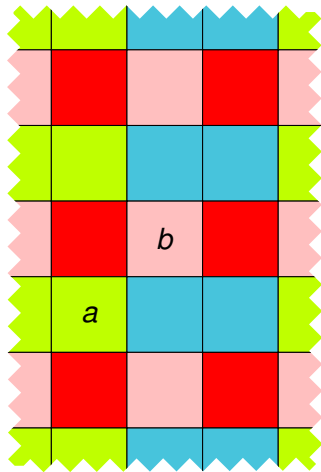
$$\mathfrak{M} \not\models \forall x, \neg(P_{\blacksquare}(x) \wedge P_{\blacksquare}(N(x)))$$

 $\mathfrak{N}$ 

$$\mathfrak{N} \models \forall x, \neg(P_{\blacksquare}(x) \wedge P_{\blacksquare}(N(x)))$$

$\mathfrak{M}$ 

$$\mathfrak{M} \not\models P_{\square}(x) \implies P_{\square}(N(N(x)))$$

 $\mathfrak{N}$ 

$$\mathfrak{N} \models \forall x, P_{\square}(x) \implies P_{\square}(N(N(x)))$$

## Définition (Language)

*On se place dans le langage  $\mathcal{L}$  constitué*

- *De prédicats unaires  $P_i$  pour  $i \in C$ .*
- *De 4 fonctions unaires :  $N, S, E, W$ .*

## Définition (Structure)

*Un coloriage  $M \in C^{\mathbb{Z}^2}$  est vu comme une structure  $\mathfrak{M}$  de la façon suivante :*

- *Les points sont les éléments de  $\mathbb{Z}^2$*
- *$P_i((x, y))$  est vraie ssi  $M(x, y) = i$ .*
- *$N : (x, y) \mapsto (x, y + 1), \dots$*

## Théorème

*Deux coloriage  $M$  et  $N$  sont égaux à translation près si et seulement si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont isomorphes en tant que structures sur  $\mathcal{L}$ .*

## Démonstration.

Facile.

## Question

*Caractériser quand deux structures  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  ont la même théorie (satisfont les mêmes formules).*

## Fait

*Si  $P$  est un motif, on peut écrire une formule  $\phi_P$  tel que  $\mathfrak{M} \models \phi_P$  si et seulement si  $M$  contient le motif  $P$ .*

Exemple :



$$\phi_P := \exists x, P_{\square_{\text{yellow}}}(x) \wedge P_{\square_{\text{blue}}}(E(x))$$



## Définition

*Deux coloriage  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes si ils ont les mêmes motifs.*

## Proposition

*Si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  ont même théorie, alors  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes.*

# Réciproque ?

## Théorème

*Si deux coloriage  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes, alors  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  ont même théorie.*

*La logique du premier ordre a un caractère local*

## Démonstration.

Application classique du théorème de Gaifman ou du lemme de Hanf. □

## Proposition

*Soit  $P$  un motif qui apparaît une seule fois dans  $M$ .*

*Alors si  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes,  $M$  et  $N$  sont égaux à translation près.*

## Démonstration.

On peut supposer que  $P$  apparaît centré en 0 dans  $M$  et dans  $N$  et qu'il est de taille  $m$ .

Soit  $n \geq m$ . Le carré  $n \times n$  centré en 0 dans  $M$  et dans  $N$  est le seul carré  $n \times n$  qui contient  $P$  en son centre.

Donc  $M[-n, n] = N[-n, n]$ . □

## Proposition

*Soit  $P$  un motif qui apparaît une seule fois dans  $M$ .*

*Alors si  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes,  $M$  et  $N$  sont égaux à translation près.*

## Corollaire

*Soit  $P$  un motif qui apparaît un nombre fini de fois dans  $M$ . Alors si  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes,  $M$  et  $N$  sont égaux à translation près.*

## Preuve (part 2)

On suppose maintenant que tout motif qui apparaît dans  $M$  apparaît infiniment souvent.

On considère pour simplifier que  $E, N, S, W$  sont maintenant des prédicats binaires et non pas des fonctions unaires

$E(x, y)$  est vrai si  $x$  est à l'est de  $y$ .

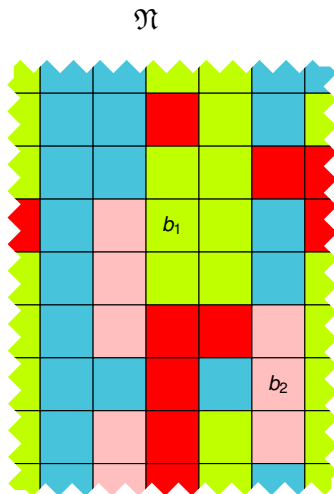
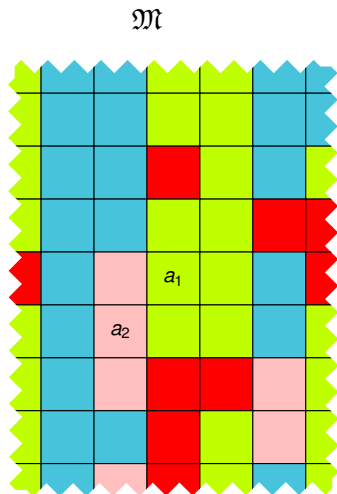
### Définition

*Soit  $a_1 \dots a_p$  des points de  $\mathfrak{M}$  et  $b_1 \dots b_p$  des points de  $\mathfrak{M}$ .*

*On dit que  $a_1 \dots a_p$  et  $b_1 \dots b_p$  sont  $n$ -isomorphes si pour chaque  $i$  l'ensemble des points à distance inférieure à  $3^{n-1}$  de  $a_i$  est isomorphe à l'ensemble des points à distance inférieure à  $3^{n-1}$  des  $b_i$ .*

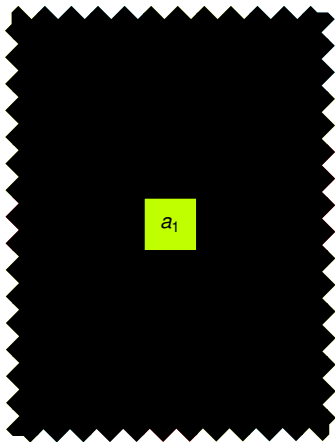
Note : l'isomorphisme doit envoyer les  $a_i$  sur les  $b_i$ .

# $n$ -isomorphes

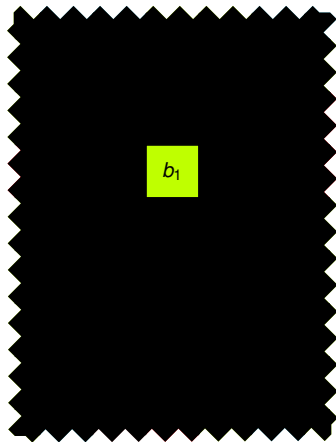


$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont-ils 0-isomorphes ?

$\mathfrak{N}$



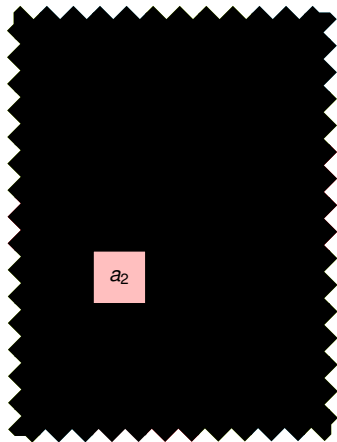
$\mathfrak{N}$



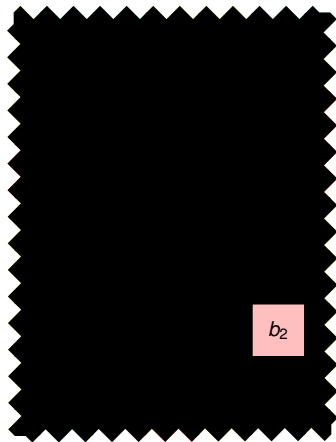
$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont-ils 0-isomorphes ?

# $n$ -isomorphes

$\mathfrak{M}$



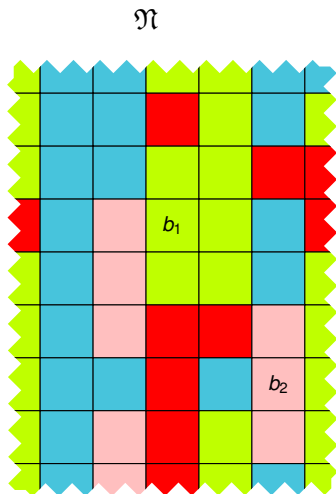
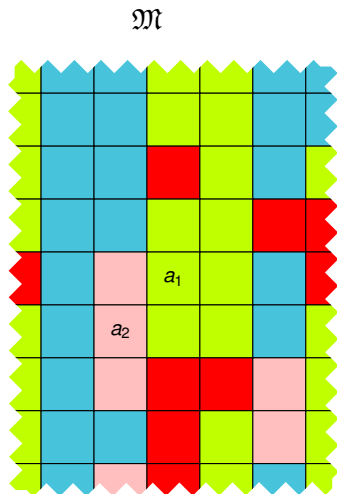
$\mathfrak{N}$



$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont donc 0-isomorphes.

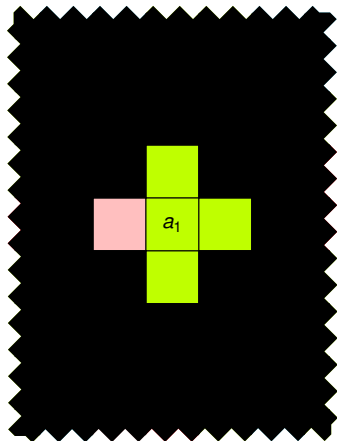


# $n$ -isomorphes

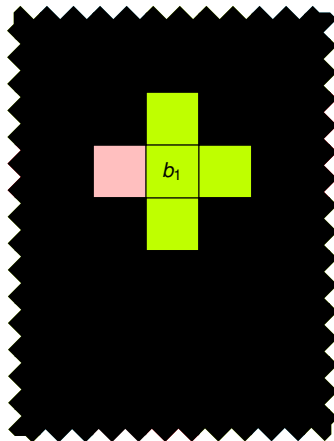


$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont-ils 1-isomorphes ?

$\mathfrak{M}$



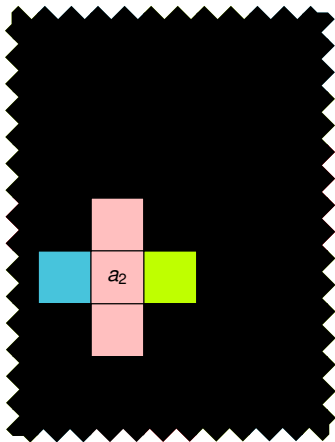
$\mathfrak{N}$



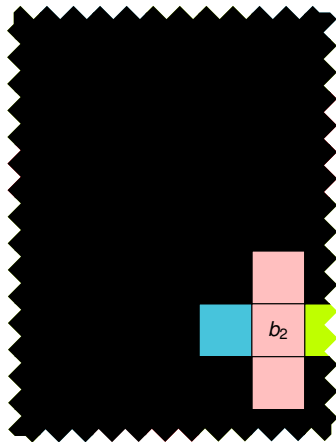
$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont-ils 1-isomorphes ?

# $n$ -isomorphes

$\mathfrak{M}$



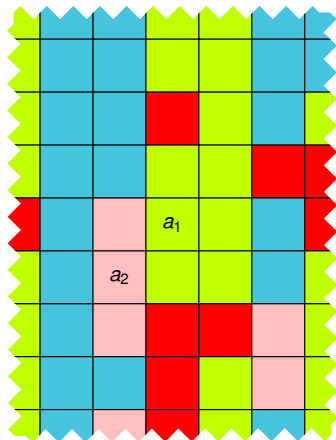
$\mathfrak{N}$



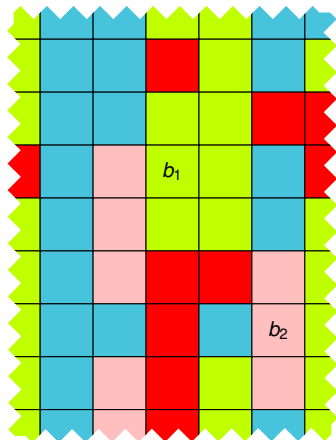
$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont donc 1-isomorphes.

# $n$ -isomorphes

$\mathfrak{M}$



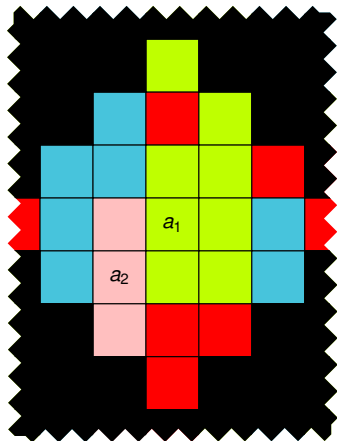
$\mathfrak{N}$



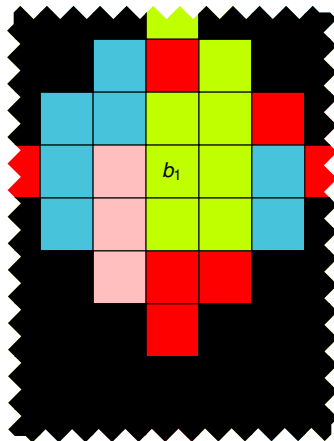
$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  sont-ils 2-isomorphes ?

# $n$ -isomorphes

$\mathfrak{M}$



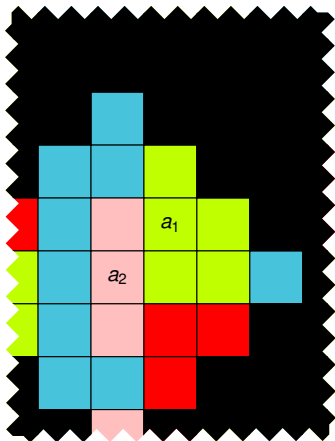
$\mathfrak{N}$



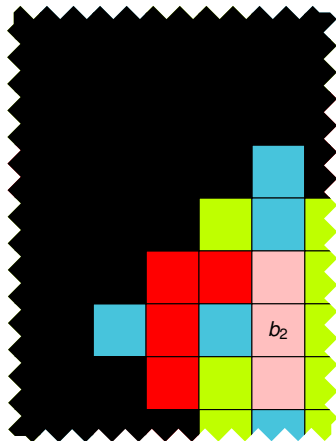
$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  ne sont pas 2-isomorphes.

# $n$ -isomorphes

$\mathfrak{M}$



$\mathfrak{N}$



$(a_1, a_2)$  et  $(b_1, b_2)$  ne sont pas 2-isomorphes.

## Preuve (part 2, cont'd)

Soit  $M$  et  $N$  localement isomorphes et où tout motif présent apparaît infiniment souvent.

Soit  $a_1 \dots a_p$  et  $b_1 \dots b_p$  qui sont  $(n + 1)$ -isomorphes.

### Proposition

*Quelque soit  $a$  dans  $M$ , on peut trouver  $b$  de  $N$  tel que  $a_1 \dots a_p, a$  et  $b_1 \dots b_p, b$  sont  $n$ -isomorphes.*

*Quelque soit  $b$  dans  $N$ , on peut trouver  $a$  de  $M$  tel que  $a_1 \dots a_p, a$  et  $b_1 \dots b_p, b$  sont  $n$ -isomorphes.*

Deux cas :

- Si  $a$  est à distance moins de  $3^{n-1}$  de  $a_1$ . Prendre  $b$  au même endroit près de  $b_1$ .
- Sinon,  $a$  est suffisamment loin de chacun des  $a_j$ . Considérons le motif de taille  $3^{n-1}$  centré autour de  $a$ . Ce motif apparaît infiniment souvent dans  $M$ , donc dans  $N$ . On peut prendre  $b$  centré sur ce motif, suffisamment loin de chacun des  $b_j$ .



## Théorème

*Si  $a_i$  et  $b_i$  sont  $n$ -isomorphes, alors ils vérifient les mêmes formules de rang de quantification au plus  $n$ .*

## Démonstration.

Par récurrence sur  $n$ .

- Supposons  $\mathfrak{M} \models \forall x, \phi(a_1 \dots a_p, x)$
- Soit  $b$  dans  $\mathfrak{N}$ . Prenons le  $a$  correspondant.
- $\mathfrak{M} \models \phi(a_1 \dots a_p, a)$
- Donc  $\mathfrak{N} \models \phi(b_1 \dots b_p, b)$  par hypothèse de récurrence.
- Donc  $\mathfrak{N} \models \forall x, \phi(b_1 \dots b_p, x)$



Comme  $\emptyset$  et  $\emptyset$  sont  $n$ -isomorphes pour tout  $n$ , on en déduit :

## Théorème

*Si  $M$  et  $N$  sont localement isomorphes, alors  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  satisfont les mêmes formules.*

1 Coloriages comme structures

2 Pavages comme théories

- Formaliser le plan
- Formaliser les tuiles
- Formaliser les contraintes

Décrire, pour chaque jeu de tuiles  $\tau$ , une théorie  $T_\tau$  telles que les structures qui satisfont  $T_\tau$  correspondent aux pavages utilisant  $\tau$ .

- Formaliser le plan  $\mathbb{Z}^2$
- Formaliser les tuiles
- Formaliser les règles de pavages

$$\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$$

$$\forall x, N(S(x)) = x$$

$$\forall x, S(N(x)) = x$$

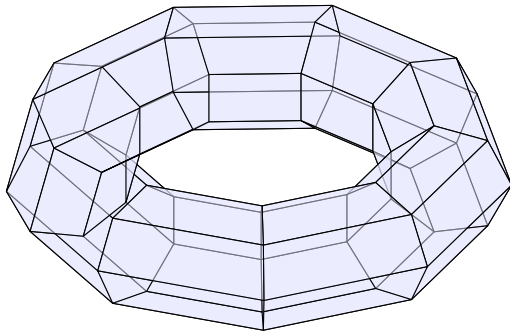
$$\forall x, E(W(x)) = x$$

$$\forall x, W(E(x)) = x$$

$$\forall x, N(E(x)) = E(N(x))$$

# Formaliser le plan

Ces axiomes ne suffisent pas :

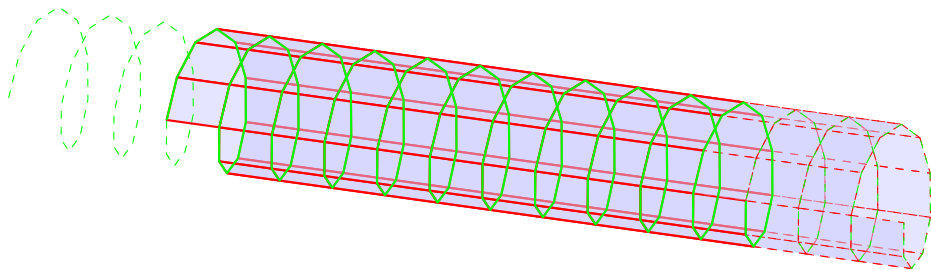


$$\forall x, N^7(x) = x$$

$$\forall x, E^9(x) = x$$

# Formaliser le plan

Ces axiomes ne suffisent pas :



$$\forall x, N^{10}(x) = E(x)$$

# Formaliser le plan

On ajoute donc les axiomes

$$\forall x, N^i E^j(x) \neq x$$

pour tous  $i$  et  $j$  dans  $\mathbb{Z}$ .

## Note (anticipative)

Si notre jeu de tuiles ne produit pas de pavage périodique, aucun plan dégénéré ne peut être le support d'un modèle de la théorie.

i.e.

Si le jeu de tuiles ne produit pas de pavage périodique, ces axiomes sont inutiles.



## Formaliser le plan (fin)

Si  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont deux structures vérifiant les axiomes, alors  $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$  aussi.

On ne peut pas forcer (au premier ordre) les structures à être connexes.

Nos structures ne seront donc pas des pavages, mais des unions de pavages.

# Démonstration

Prenons une théorie quelconque  $T$  sur un langage  $\mathcal{L}$  (contenant  $E, N, S, W$ ) qui axiomatise les pavages, et ajoutons deux constantes  $c$  et  $d$ .

Considérons la théorie

$$T' = T \cup \{\phi_n(c, d), n \in \mathbb{N}\}$$

où  $\phi_n(x, y)$  est une formule signifiant que  $x$  est à distance au moins  $n$  de  $y$ .

- Toute partie finie de  $T'$  a un modèle, il suffit de prendre  $c$  et  $d$  suffisamment loin
- Donc par compacité,  $T'$  a un modèle, qui ne peut être connexe.

Chaque point a une couleur :

$$\forall x, P_{\text{■}}(x) \vee P_{\text{■}}(x) \vee \dots$$

Chaque point n'a qu'une couleur à la fois

$$\forall x, \neg(P_{\text{■}}(x) \wedge P_{\text{■}}(x)) \wedge \neg(P_{\text{■}}(x) \wedge P_{\text{■}}(x)) \wedge \dots$$

Le motif n'apparaît pas :

$$\forall x, \neg(P_{\blacksquare}(x) \wedge P_{\blacksquare}(N(x)))$$

$$\forall x, \neg(P_{\blacksquare}(x) \wedge P_{\blacksquare}(E(x)))$$

## Théorème

*On peut associer à  $\tau$  une théorie  $T_\tau$  telle que*

- *Tout pavage peut être vu comme un modèle de  $T_\tau$*
- *Tout modèle de  $T_\tau$  peut être vu comme une union de pavages.*

## Corollaire

*$\tau$  pave le plan si et seulement si  $T_\tau$  a un modèle.*

## Corollaire

*$T_\tau$  est complète si et seulement si tous les pavages par  $\tau$  sont localement isomorphes.*

## Théorème

*Il existe un jeu de tuiles qui ne pave le plan que d'une seule manière à isomorphisme local près, non périodique.*

On peut démontrer dans ce cas qu'il y a  $2^{\aleph_0}$  pavages possibles.

# Une théorie finiment axiomatisable et superstable

Si on part d'un jeu de tuiles qui ne pave le plan que d'une seule manière à isomorphisme local près, non périodique

- La théorie  $T_\tau$  est complète.
- La théorie  $T_\tau$  a un nombre fini d'axiomes (pas besoin d'éliminer les tores, qui ne peuvent apparaître).
- Le nombre de structures connexes (pavages) est non dénombrable.

Premier exemple en théorie des modèles d'une théorie complète finiment axiomatisable et superstable.

$T'_\tau = T_\tau$  sans les formules excluant les tores.

## Corollaire

- $T'_\tau$  a un modèle si et seulement si  $\tau$  pave le plan.
- $T'_\tau$  a un modèle fini si et seulement si  $\tau$  pave le plan périodiquement.



## Théorème

*Il est indécidable de savoir si on peut paver le plan.*

*Plus précisément, on peut transformer toute machine de Turing en un jeu de tuiles  $\tau$  de sorte que :*

- $\tau$  pave périodiquement si  $M$  s'arrête en répondant oui
- $\tau$  ne pave pas si  $M$  s'arrête en répondant non
- $\tau$  pave mais de façon non périodique si  $M$  ne s'arrête pas

# Réduction conservative

Pour toute formule  $\phi$  du premier ordre, on peut fabriquer une machine de Turing  $M$  tel que

- $M$  s'arrête en répondant oui si  $\phi$  a un modèle fini
- $M$  s'arrête en répondant non si  $\phi$  n'a pas de modèle
- $M$  ne s'arrête pas si  $\phi$  a un modèle mais pas de modèle fini.

# Réduction conservative

On peut transformer la machine de Turing en un jeu de tuiles  $\tau$  tel que

- $\tau$  pave périodiquement si M s'arrête en répondant oui
- $\tau$  ne pave pas si M s'arrête en répondant non
- $\tau$  pave mais de façon non périodique si M ne s'arrête pas

On peut transformer  $\tau$  en une formule  $\psi$  (la conjonction de toutes les formules dans  $T'_\tau$ ) telle que

- $\psi$  a un modèle fini si  $\tau$  pave périodiquement
- $\psi$  n'a pas de modèle si  $\tau$  ne pave pas
- $\psi$  a un modèle mais pas de modèle fini si  $\tau$  pave mais de façon non périodique

On peut transformer (récursivement)  $\phi$  en une formule  $\psi$  telle que

- $\psi$  a un modèle fini ssi  $\phi$  a un modèle fini
- $\psi$  a un modèle ssi  $\phi$  a un modèle

De plus,

- $\psi$  n'utilise que quatre fonctions unaires et des prédicats unaires.
- $\psi$  est une formule de la forme  $\forall x, \theta(x)$  où  $\theta$  est sans quantificateurs.

Quatre fonctions unaires  $N, S, E, W$ , quelques prédicats unaires  $P_i$

$$\forall x, N(S(x)) = x$$

$$\forall x, S(N(x)) = x$$

$$\forall x, E(W(x)) = x$$

$$\forall x, W(E(x)) = x$$

$$\forall x, N(E(x)) = E(N(x))$$

$$\forall x, P_{\text{green}}(x) \vee P_{\text{blue}}(x) \vee \dots$$

$$\forall x, \neg(P_{\text{green}}(x) \wedge P_{\text{blue}}(x)) \wedge \neg(P_{\text{green}}(x) \wedge P_{\text{red}}(x)) \wedge \dots$$

$$\forall x, \neg(P_{\text{red}}(x) \wedge P_{\text{red}}(N(x)))$$

$$\forall x, \neg(P_{\text{green}}(x) \wedge P_{\text{blue}}(E(x)))$$

Une fonction unaire  $S$ , quelques prédicats binaires  $P_i$

$$\forall x \exists x', S(x') = x$$

$$\forall x, y, P_{\square}(x, y) \vee P_{\blacksquare}(x, y) \vee \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\square}(x, y)) \wedge \neg(P_{\square}(x, y) \wedge P_{\blacksquare}(x, y)) \wedge \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\blacksquare}(x, S(y)))$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\square}(S(x), y))$$

Une fonction unaire  $S$ , quelques prédicats binaires  $P_i$

$$\forall x, y, P_{\square}(x, y) \vee P_{\blacksquare}(x, y) \vee \dots$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\square}(x, y)) \wedge \neg(P_{\square}(x, y) \wedge P_{\blacksquare}(x, y)) \wedge \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\blacksquare}(x, S(y)))$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\square}(S(x), y))$$



Une fonction unaire  $S$ , quelques prédicats binaires  $P_i$

$$\forall x, y, P_{\square}(x, y) \vee P_{\blacksquare}(x, y) \vee \dots$$
$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\square}(x, y)) \wedge \neg(P_{\square}(x, y) \wedge P_{\blacksquare}(x, y)) \wedge \dots$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(y, x) \wedge P_{\blacksquare}(y, S(x)))$$

$$\forall x, y, \neg(P_{\blacksquare}(x, y) \wedge P_{\square}(S(x), y))$$

Une fonction unaire  $S$ , quelques prédicats binaires  $P_i$

$$\forall x, y, \Phi(x, y, S(x))$$

Quelques prédicats binaires  $P_i$

$$\forall x \exists x' \forall y, \Phi(x, y, x')$$

On peut transformer (récursivement)  $\phi$  en une formule  $\psi$  telle que

- $\psi$  a un modèle fini ssi  $\phi$  a un modèle fini
- $\psi$  a un modèle ssi  $\phi$  a un modèle

De plus,

- $\psi$  n'utilise qu'un nombre fini de prédicats binaires.
- $\psi$  est une formule de la forme  $\forall x \exists x' \forall y, \theta(x, x', y)$  où  $\theta$  est sans quantificateurs.

On dit que  $(\forall \exists \forall, (0, \omega))$  est une classe de réduction conservative.

Est-ce qu'on peut décider si une formule  $\forall\exists\forall(0, \omega)$  est satisfaisable ?

- Toute formule  $\forall\exists\forall(0, \omega)$  peut se transformer en un jeu de tuiles (non prouvé ici)
- Savoir si un jeu de tuiles pave le plan est-il décidable ?
- Si oui, on peut décider.

Savoir si un jeu de tuiles pave le plan n'est pas décidable

- En fait, on peut transformer toute formule en un jeu de tuiles comme ci-dessus
- Savoir si une formule  $\forall \exists \forall$  est satisfaisable est donc indécidable

# Questions pour la fin

Soit une théorie  $T$  sur le même langage que précédemment. Quand est-ce que  $T$  correspond à un ensemble de pavages ?

Ce qu'on ne peut pas dire avec des pavages :

- $\exists x, P_{\blacksquare}(x)$
- $\forall x, y, P_{\blacksquare}(x) \wedge P_{\blacksquare}(y) \implies x = y$

Y remédier ?

- Pour éliminer le premier cas, on prend une théorie universelle.
- Si la théorie est universelle, on obtient pas forcément des pavages, mais des sous-shifts (comme des pavages, mais avec une infinité de contraintes, toutes locales)