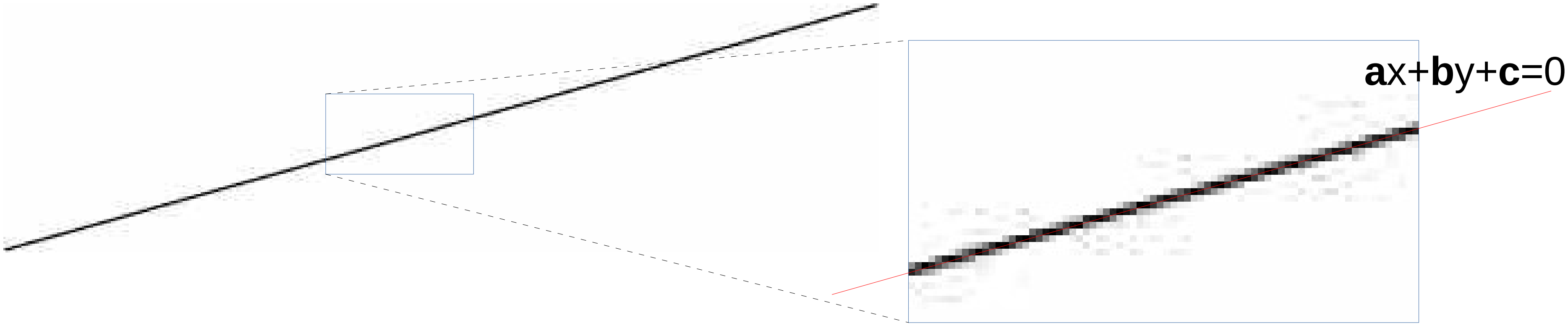
GESTION DE L'INCERTAIN

TMI

Contexte : modélisation et reconnaissance de formes

Exemple : détection de ligne (image jpeg)



Observations et modèles

- Observations : mesures (ex : *pixels*) → bruit, quantification
- Modèles : paramètres (ex : *a*,*b*,*c*) → estimation, contrôle

INCERTITUDE

Deux types d'incertitude

- Incertitude aléatoire :
  - variabilité naturelle de phénomènes réels
  - Ex : Bruit électronique, bruit quantique, vibrations, influence de la température
- Incertitude épistémique
  - Manque de connaissances pour ajuster le modèle
  - Ex : un seul point pour une droite, groupes minoritaires en reconnaissance faciale, mots ou expressions rares en génération de textes
- Attention : incertitude ≠ erreur
  - Mesurer une erreur nécessite de connaître la vraie valeur (du paramètre ou de l'observation)ou au moins une valeur obtenue avec une méthode de référence

Objectifs

Représenter l'incertitude

- Incertitude épistémique approximée par incertitude aléatoire
- Approche probabiliste

Rappels de probabilités

- Moyenne, variance, covariance, loi, lois classiques

Propager l'incertitude

- $Y = f(X;\theta) = f(X)$ avec $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$
- Loi de Y connaissant la loi de X ?

Objectifs

Représenter l'incertitude

- Incertitude épistémique approximée par incertitude aléatoire
- Approche probabiliste

Rappels de probabilités

- Moyenne, variance, covariance, loi, lois classiques

Propager l'incertitude

- $Y = f(X;\theta) = f(X)$ avec $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$
- Loi de Y connaissant la loi de X ?

Intervalles de validité

Ex : utilisation d'une règle graduée → intervalle de 1 mm, $\Delta X = 1$

Règles de propagation

$$\Delta Y = \left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\right| \Delta X_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\right| \Delta X_2 + \cdots \left|\frac{\partial f}{\partial X_n}\right| \Delta X_N = \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial f}{\partial X_i}\right| \Delta X_i$$

Addition/soustraction : $Y = X_1 + X_2 - X_3 \Rightarrow \Delta Y = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3$

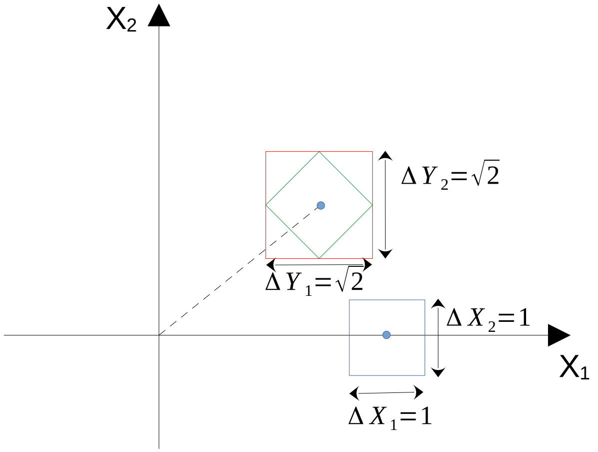
Produit/division : $Y = \frac{X_1 X_2}{X_3} \Rightarrow \frac{\Delta Y}{|Y|} = \frac{\Delta X_1}{|X_1|} + \frac{\Delta X_2}{|X_2|} + \frac{\Delta X_3}{|X_3|}$

Extension à $Y=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_M)$

$$\forall j, Y_j = f_j(X) = f_j(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

On applique la même formule à chaque f_j

Exemple : rotation d'un point de 45°



$$Y = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} X$$

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} X_2 \\ Y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} X_2 \end{cases}$$

$$\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta X_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta X_2 = \sqrt{2}$$

Critique

Déformation

- Surestimation rapide et potentiellement importante
- La région ne garde pas sa forme
- Régions en polygones, disques, ellipses → même problème
- Définition de ΔX : max ? Percentile ? Écart-type ?
- Quid des données aberrantes ? Répartition des données dans intervalle ?

Approche probabiliste

- Représentation plus fine, prise en compte de covariances
- Représentation plus générique (régions = loi uniforme)
- Possibilité d'incorporer de l'a priori (modèle de bruit)
- Plusieurs méthodes de propagation, fonction de la complexité de f

OBJECTIFS

Représenter l'incertitude

- Incertitude épistémique approximée par incertitude aléatoire
- Approche probabiliste

Rappels de probabilités

- Moyenne, variance, covariance, loi, lois classiques

Propager l'incertitude

- $Y = f(X;\theta) = f(X)$ avec $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$
- Loi de Y connaissant la loi de X ?

Échauffement probabiliste

Exemple classique

Je lance un dé 6 fois

J'obtiens 5 1 4 2 3 4

Quel nombre vais-je obtenir au prochain lancer ?

Un quidam lambda : 6

L'étudiant en sciences : entre 1 et 6 avec la même probabilité

Le vieux joueur de casino : c'est un dé pipé ?

Le joueur de RPG : de bonnes chances que ce soit plus de 10

Le spécialiste en DL : le plus sûrement 4

Attention

Le but n'est pas de faire un cours de probabilité

- Vous en avez déjà eu
- On va juste rappeler certaines notions et résultats dans le contexte qui nous intéresse
- Si votre mémoire est un peu rouillée ou si vous avez envie de creuser un peu certaines idées :
  - Anne Perrut propose un cours sur les notions de base
  - B. Jourdain (ENPC) met à disposition son cours de probabilités et statistiques pour l'ingénieur
  - De même qu'O. Gaudouin (ENSIMAG) avec son cours de méthodes statistiques pour l'ingénieur

Expérience, événement, univers des possibles

Observer nécessite de réaliser une expérience

Ex : lancer un dé, lancer successivement deux pièces, mesurer la température, mesurer la température et l'hygrométrie

Le résultat de cette expérience est un événement élémentaire

Ex : 3 (dé), PF (deux pièces), 19,1°C (température), (20,3°C,42%) (température et hygrométrie)

L'univers des possibles est l'ensemble de tous les événements élémentaires possibles

Ex : {1,2,3,4,5,6} (dé), {PP,PF,FP,FF} (pièces), [-50°C,60°C] (temp.), [-50°C,60°C]x[0 %,100%] (temp.,hygro.)

Un événement est une partie (sous-ensemble) de l'univers des possibles

Ex : {2,4,6}, {PP,PF,FP}, [0°C,60°C], [30°C,60°C]x[80 %,100%]

Probabilités discrètes ou continues

Selon univers des possibles : discret (dé, pièces) ou continu (température, hygrométrie)

Probabilités discrètes

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$: univers des possibles

ω_i événement élémentaire

Probabilité discrète

À chaque ω_i, on associe un réel $p_i \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

La probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ est $P(A)=\sum_{\omega_i \in A} p_i$

En particulier la probabilité d'un événement élémentaire ω_i, $P(\{\omega_i\})= p_i$

Probabilité uniforme $p_i = 1/n$ (Ex : dé non pipé, pièce équilibrée)

Variable aléatoire

Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Ex : $X(\omega_i) = i$ (dé) ; $X(\omega)=1$, si $P \in \omega$, 0 sinon (pièce)

Espérance

Définition

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i$$

Exemples

Dé : valeur moyenne d'un lancer

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} X(\omega_i)p_i=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i=\frac{21}{6}=3.5$$

Pièce : probabilité de tirer au moins un pile sur deux lancers

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} X(\omega_i)p_i=\frac{1}{4}\left(X(\{P,P\})+X(\{P,F\})+X(\{F,P\})+X(\{F,F\})\right)$$

$$=\frac{1+1+1+0}{4}=\frac{3}{4}$$

Loi des grands nombres

Répétitions d'expérience

Obtention d'une suite (X_n) d'échantillons de la valeur de la fonction X

Ex :

N lancers de dés → n_i fois la valeur i ∈ {1,2,3,4,5,6}

Moyenne : $\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6}i\,n_i=\sum_{i=1}^{6}i\frac{n_i}{N}$

Espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{6}i\,p_i$

Interprétation fréquentiste de la probabilité : $\lim_{N\to\infty}\frac{n_i}{N}=p_i$

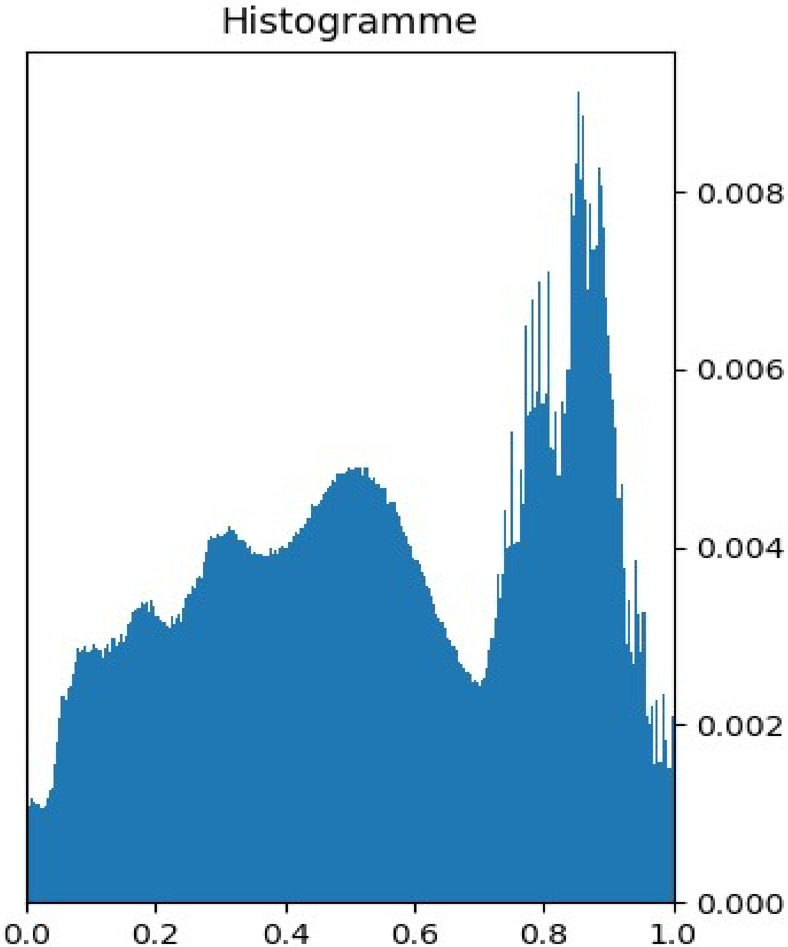
Loi des grands nombres : $\bar{X}\underset{N\to\infty}{\to}E(X)$

Calcul expérimental de l'espérance : $E(X)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i=\bar{X}$

Fournit aussi variance : $E((X-E(X))^2)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2$

Histogramme

Estimation expérimentale des probabilités



Variable aléatoire continue

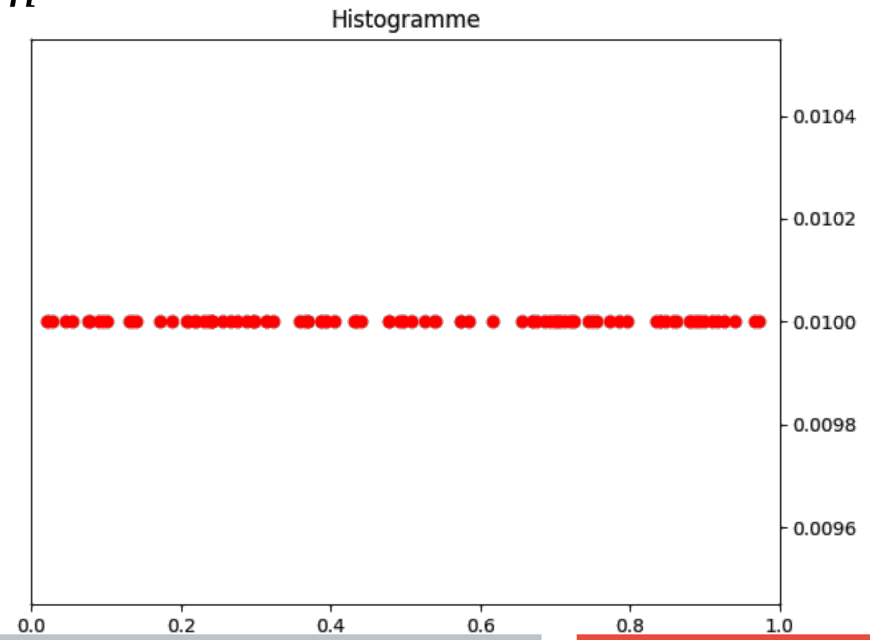
Observation : événement est une mesure = un nombre réel

$X(\omega)=x \in I \subset \mathbb{R}$

Ex : tirage de n=100 valeurs aléatoires entre 0 et 1

Chaque valeur n'apparaît qu'une fois : $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} 0 = p(x)$

Associer une probabilité à chaque valeur de x ne fait pas sens

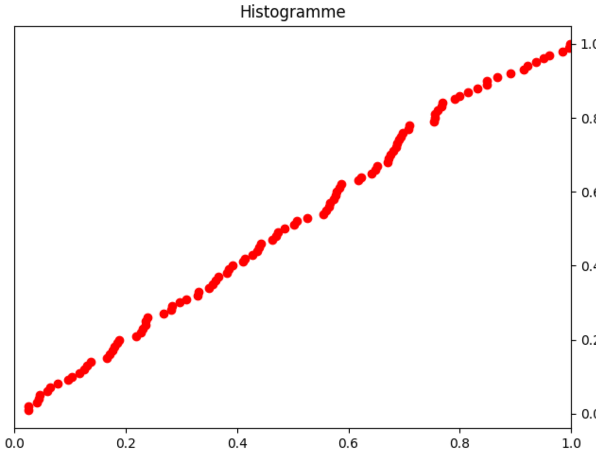


Fonction de répartition

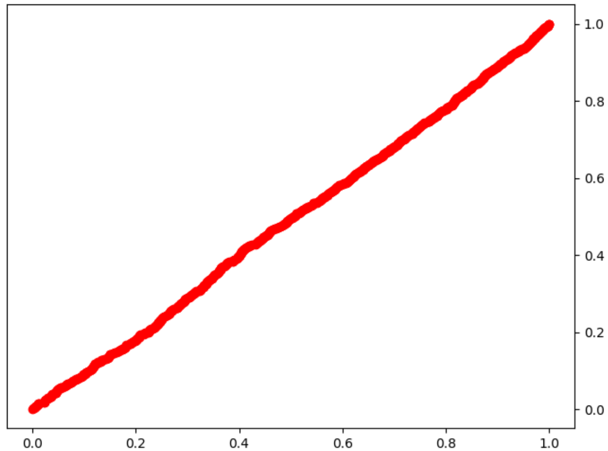
Histogramme cumulé

y = nombre de valeurs ≤ x

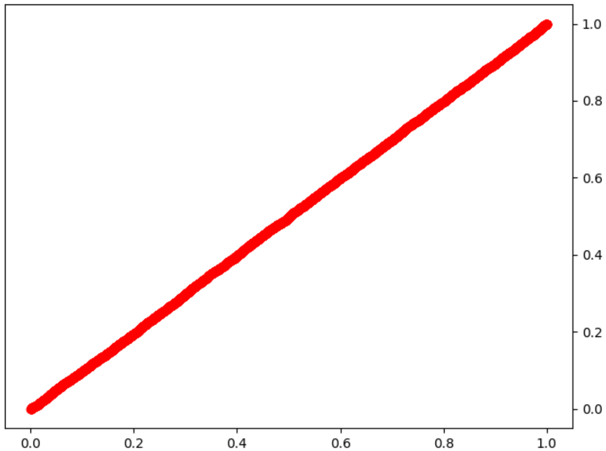
n=100



n=1000



n=10000



Graphe de F : fonction de répartition, croissante, en général continue et dérivable

$$F(a) = P(\{x : x < a\})$$

Loi de probabilité

Cas discret

$$F(a)=P(\{\omega_i : X(\omega_i)\leq a\})=\sum_{X(\omega_i)\leq a} p_i$$

Cas continu

$$F(a)=\int_{x\leq a} p(x)\,dx$$

Si I=ℝ

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx$$

p est la dérivée de F

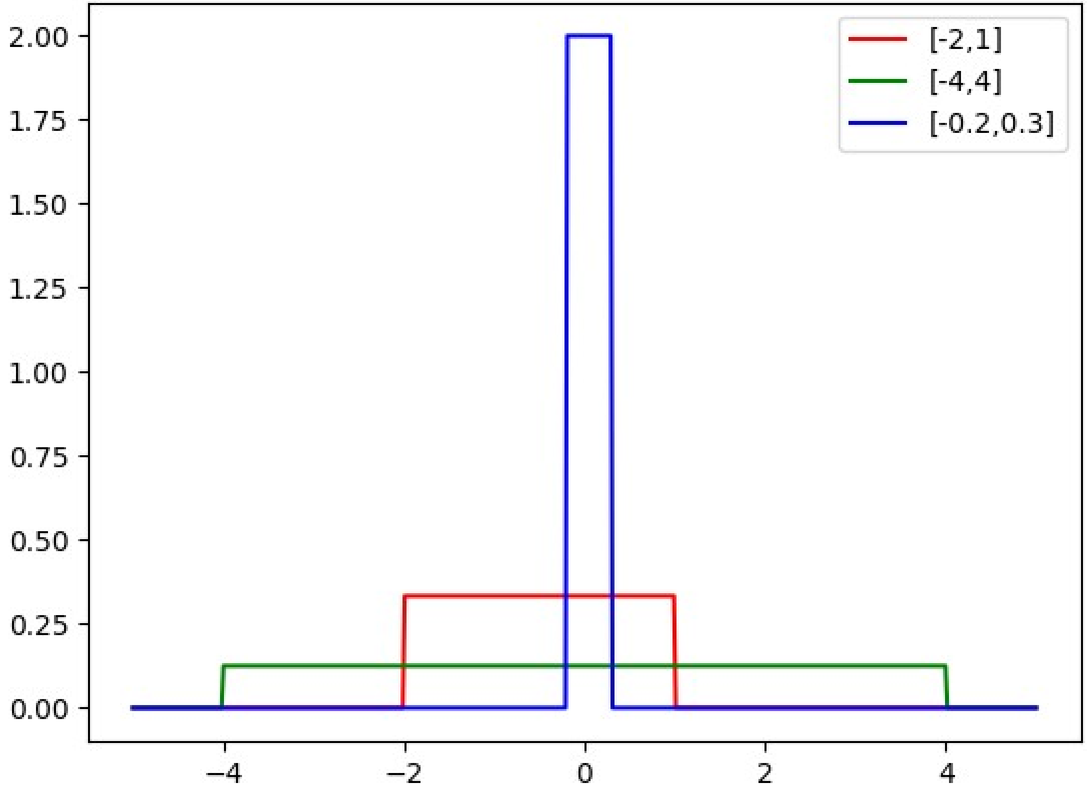
p est appelée loi de la variable aléatoire X

On l'appelle aussi (fonction de) densité de probabilité (pdf en anglais)

Loi uniforme (toutes les valeurs sont équiprobables)

Forcément sur un ensemble borné (pas $\mathbb{R}$). En général un intervalle [a,b]

$$p(x)=\frac{1}{b-a} \qquad E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad Var(X)=E((X-E(X))^2)=\frac{(b-a)^2}{12}$$



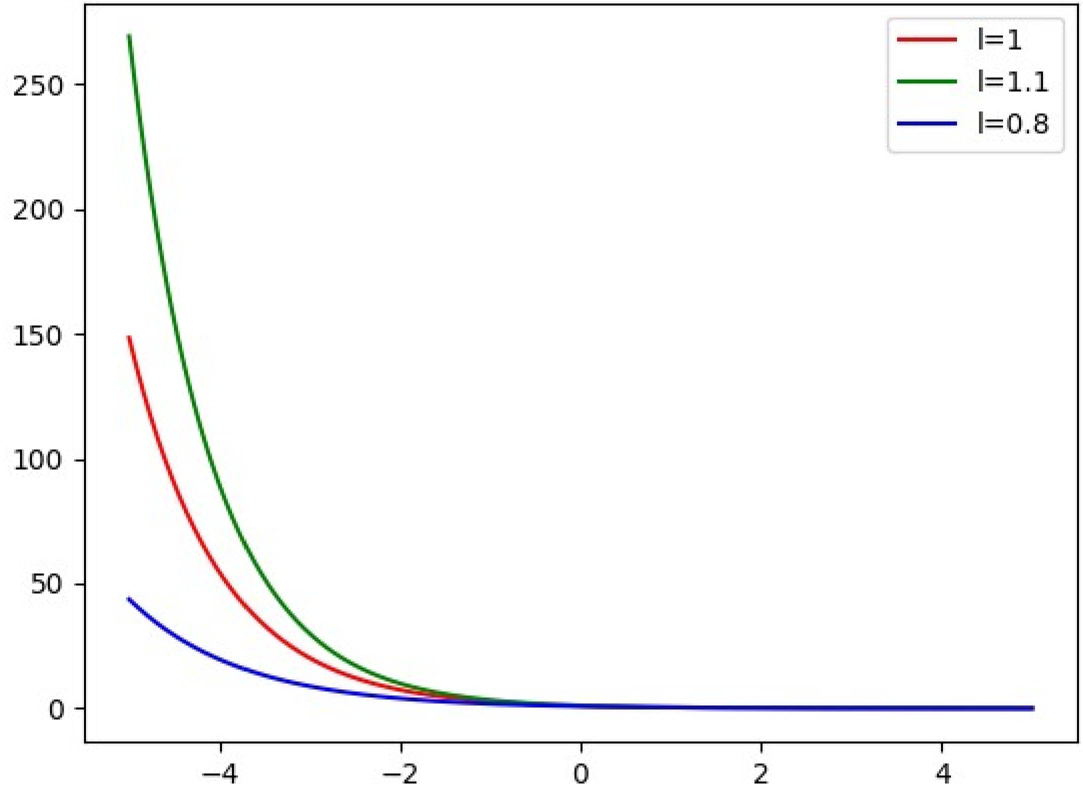
$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x\in[a,b] \\ 1 \text{ si } x>b \end{cases}$$

QUELQUES LOIS USUELLES : EXPONENTIELLE

Loi exponentielle (temps entre 2 événements aléatoires)

De paramètre λ

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad E(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2} \qquad F(x)=1-e^{-\lambda x}$$

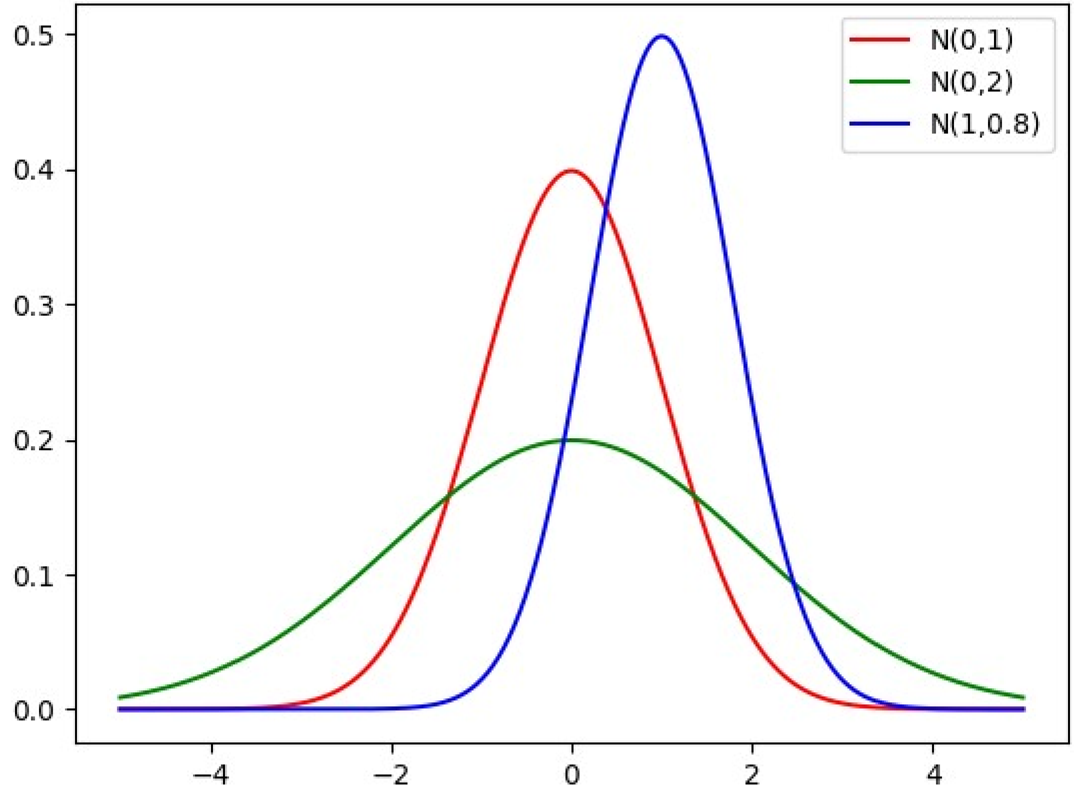


QUELQUES LOIS USUELLES : GAUSSIENNE

Loi gaussienne (bruit réaliste sur des mesures)

De paramètres μ et σ

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2 \qquad F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$



Notes :
Aussi appelée loi normale et notée $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

Bruit blanc=loi normale de moyenne nulle=$\mathcal{N}(0,\sigma)$

P(x ∈ [a,b]) ? Fonction erf…
- Python : math.erf
- Matlab : erf (ou cdf('Normal',...))

Vecteur aléatoire

Cas où X=$(X_1,X_2,\ldots X_n) \in I_1 x I_2 x \ldots x I_n \subset \mathbb{R}^n$ **où chaque X_i est une v.a**

Loi : p(X) à valeurs dans $\mathbb{R}$

Espérance (n-vecteur) : $E(X)=\left(E(X_1),E(X_2),\ldots,E(X_n)\right)$

Variance (matrice nxn) : $Var(X)=E\left((X-E(X))(X-E(X))^t\right)$

$$=\begin{bmatrix} Var(X_1) & Covar(X_1,X_2) & \cdots & Covar(X_1,X_n) \\ Covar(X_2,X_1) & Var(X_2) & \cdots & Covar(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Covar(X_n,X_1) & Covar(X_n,X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix}$$

où $Covar(X_i,X_j)=E\left((X_i-E(X_i))(X_j-E(X_j))\right)=Covar(X_j,X_i)$

X et Y indépendantes $\Rightarrow Covar(X,Y)=0$

$Covar(X,Y)=0 \Leftrightarrow X$ et Y ne sont pas corrélées.

Loi gaussienne multidimensionnelle

P(X=x) ?

$$P(X=x)=P(X_1=x_1 \text{ et } X_2=x_2 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n=x_n)$$

Hypothèse d'indépendance des composantes

$$\forall i \neq j,\ \ Covar(X_i, X_j)=0$$

$$P(X_1=x_1 \text{ et } X_2=x_2 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n=x_n)=P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_n=x_n)$$

Loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour toutes les composantes

$$p_X(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x_i^2}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}x^t x}$$

Formule générale : changement de variable (μ n-vecteur, σ matrice nxn)

$$Y=\sigma X+\mu \quad E(Y)=\sigma E(X)+\mu=\mu \quad Var(Y)=E(\sigma X X^t \sigma^t)=\sigma\sigma^t=\Sigma$$

$$p_Y(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

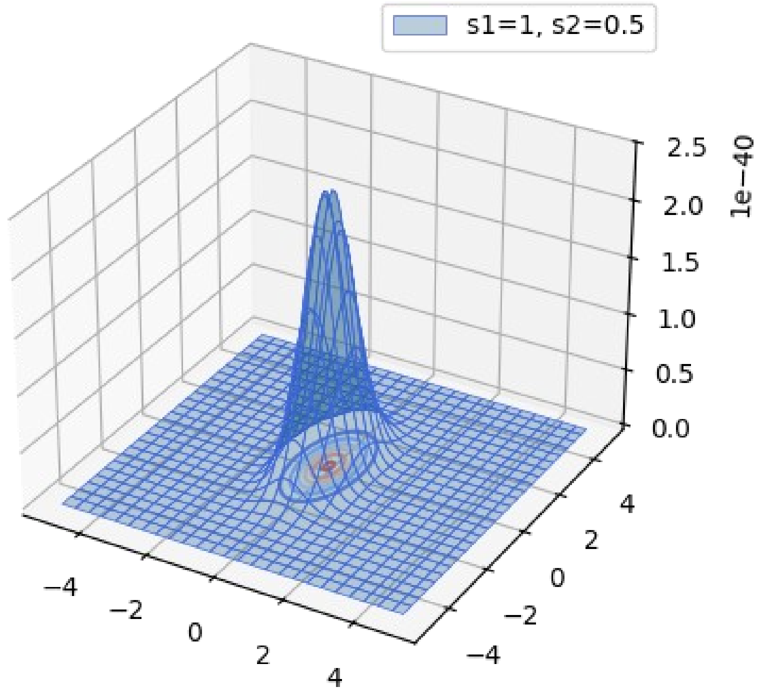
Exemple en 2 dimensions

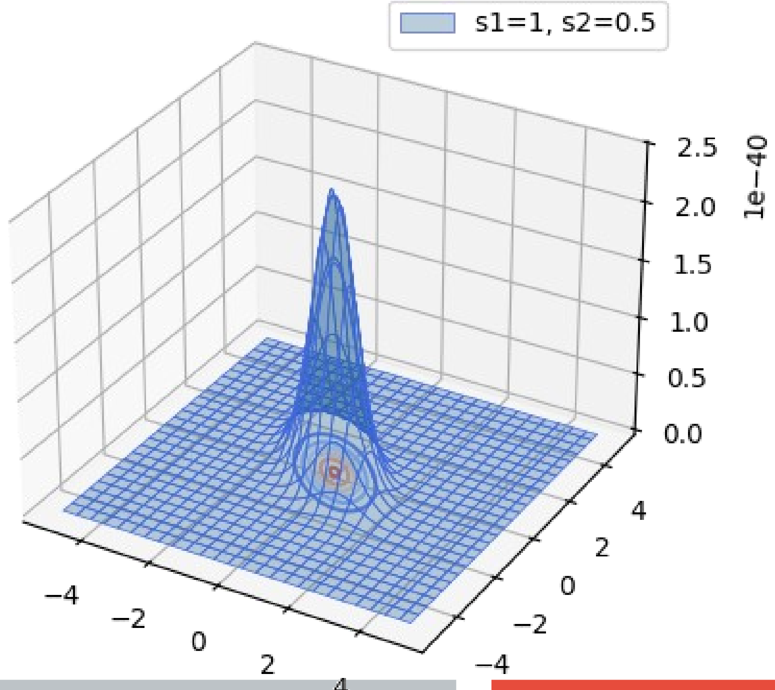
$$\mu=(0,0) \qquad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

Rotation de 45°

$$\Sigma_{45}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Sigma\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma_1^2+\sigma_2^2 & \sigma_2^2-\sigma_1^2\\ \sigma_2^2-\sigma_1^2 & \sigma_1^2+\sigma_2^2\end{bmatrix}$$





Distance de Mahalanobis

Distance euclidienne (erreur quadratique)

$$D^2(X,Y)=\|X-Y\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=(X-Y)^t(X-Y)$$

Pas compte de variances (incertitudes) différentes selon la composante

Pas compte des dépendances (covariances) entre composantes

Distance de Mahalanobis

$$D_\Sigma^2(X,Y)=\|X-Y\|_\Sigma^2=(X-Y)^t\Sigma^{-1}(X-Y)=\sum_{i,j}a_{i,j}(x_i-y_i)(x_j-y_j)$$

avec $\Sigma^{-1}=[a_{i,j}]_{\{i,j\}}$

Variances et covariances : modélisation plus fine des incertitudes

$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_i^2)$ quand composantes (mesures) indépendantes

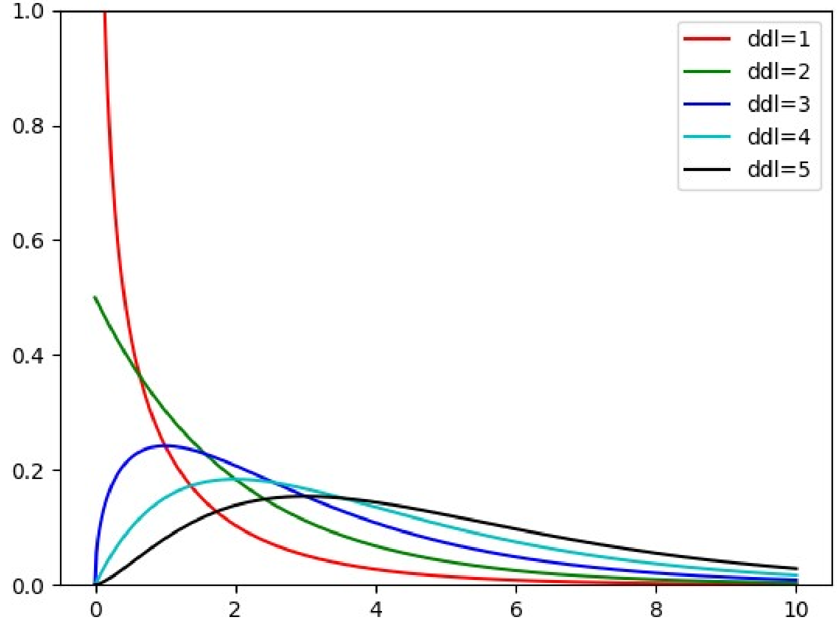
On retrouve ce terme sous l'exponentielle dans la loi gaussienne

LOI DU χ²

Définition : Soient *(X₁,...Xₙ)* *n* variables aléatoires gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes. La v. a. $D = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ suit une loi du χ^2 à *n* degrés de liberté (ddl).

Propriété : La somme de deux v.a. de χ^2 à *p* et *q* degrés de liberté est une v.a. de χ^2 à *p+q* degrés de liberté

Moyenne et variance : E(*D*) = *n* ; Var(*D*) = 2*n*



INTÉRÊT DE LA LOI DU X²

Propriété 1 :

Si X de loi $\mathcal{N}(\mu,diag(\sigma))$ alors chaque $y_i=(x_i-\mu_i)/\sigma_i^2$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

Donc $\|X-\mu\|_\Sigma^2=(X-\mu)^t diag(\{\frac{1}{\sigma_i^2}\})(X-\mu)=\sum_i \frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}$

Suit une loi du χ^2 à n degrés de liberté (n=dimension de X)

Propriété 2 :

La propriété 1 s'étend au cas où Σ n'est pas diagonale (existence de covariances) : $(X-\mu)^t\Sigma^{-1}(X-\mu)$ suit une loi du χ^2 à n degrés de liberté

Permet de tester la compatibilité d'une mesure (ou ensemble de mesures) avec un modèle

Objectifs

Représenter l'incertitude

- Incertitude épistémique approximée par incertitude aléatoire
- Approche probabiliste

Rappels de probabilités

- Moyenne, variance, covariance, loi, lois classiques

Propager l'incertitude

- $Y = f(X;\theta) = f(X)$ avec $X = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$
- Loi de Y connaissant la loi de X ?

Enoncé du problème

Soit X une v.a. dans $\mathbb{R}^n$, et f une fonction déterministe f : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

On note Y=f(X) la v.a. obtenue en appliquant f

1 → Comment calculer E(f(X)) et Var(f(X)) ?

2 → Comment calculer $p_Y(x)$?

Si p(x) connue, solution au 1 est directe :

$$E(f(X))=\bar{f}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,p(x)\,dx$$

$$Var(f(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x)-\bar{f})(f(x)-\bar{f})^t\,dx$$

Calcul en général : intégration numérique

Souci :

- pas toujours simple (supports infinis !)
- Comment faire des développements formels (ex : trouver la bonne fonction qui minimise la variance) ?
- Ne caractérise totalement la distribution en sortie de fonction

DANS UN MONDE LINÉAIRE

Hypothèse $Y = f(X) = AX + b$

A est une matrice mxn et b est un m-vecteur

Linéarité de l'espérance :

$$E\left(f\left(X\right)\right) = \boxed{E\left(AX+b\right) = AE\left(X\right)+b}$$

$$Var\left(f\left(X\right)\right) = E\left(\left(AX+b-\left(AE\left(X\right)+b\right)\right)\left(AX+b-\left(AE\left(X\right)+b\right)\right)^t\right)$$

$$= E\left(A\left(X-E\left(X\right)\right)\left(X-E\left(X\right)\right)^t A^t\right)$$

$$\boxed{Var\left(AX+b\right) = A\,Var\left(X\right)A^t}$$

CAS NON-LINÉAIRE

Principe : approximation linéaire

Forcément en un point : $X^0=E(X)$

Ordre 1 : $Y=f(X)\approx f(X^0)+J_f(X^0)(X-X^0)$

J_f = Jacobien

$$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^t \qquad J_f(X^0)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^0)\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

$$Y=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_m)^t$$

$$\forall\, 1\le i\le m,\quad Y_i=f_i(X)$$

Application

$$\boxed{E(f(X))\approx f(X^0)}=f(X^0)+J_f(X^0)E(X-X^0)=f(X^0)+J_f(X^0)(E(X)-X^0)$$

$$\boxed{Var(f(X))\approx J_f(X^0)\,Var(X)\,J_f^t(X^0)}$$

Exemple

$X=(X_1,X_2)$ une v.a. gaussienne de moyenne nulle, et de matrice de covariance $\Sigma=\sigma^2\,\mathrm{diag}(1,4)$

On considère la v.a. $Y=f(X)=X_1^2+3X_1-2X_2+5$

Loi de X $$p(X)=\frac{1}{4\pi\sigma^2}e^{-(X_1^2+X_2^2/4)/(2\sigma^2)}$$

Comparons versions exactes et approchées

Exactes (Maple) $E(Y)=5+\sigma^2,\quad Var(Y)=25\sigma^2+2\sigma^4=\sigma^2(25+2\sigma^2)$

Approchées

$$J_f(X)=[2X_1+3,-2]\quad \text{en}\ X^0=E(X)=(0,0),\quad J_f(X^0)=[3,-2]$$

$$\text{d'où}\quad E(Y)\approx f(X^0)=5$$

$$\text{et}\quad Var(Y)\approx J_f(X^0)\Sigma J_f^t(X^0)=\sigma^2[3,-2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=25\sigma^2$$

Conclusion : approximation correcte si σ^2 négligeable (devant 1)

Critique

On n'a qu'une idée statistique globale

Fonction f pas forcément linéaire

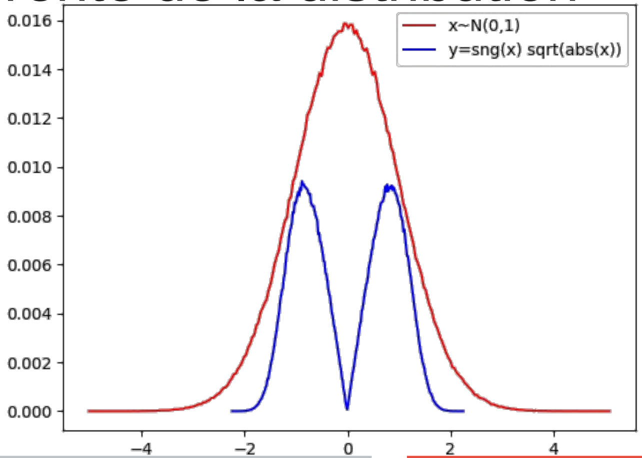
Ex : X est une v.a. réelle uniforme sur [-1,1], $Y=f(X)=X^2$

$$\bar{X}=\int_{-1}^{1} x\,dx=0,\quad \bar{Y}=\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3},\ \text{mais}\ f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Y}\neq f(\bar{X})$$

La distribution transformée peut être très différente de la distribution initiale

Ex : $Y=f(X)=sgn(X)\sqrt{|X|}$

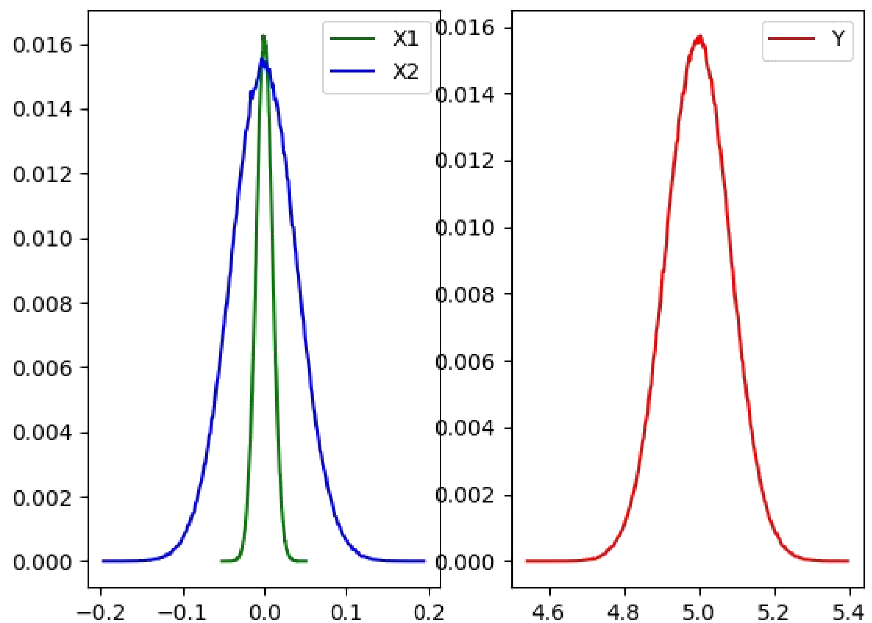
Comment estimer la loi de Y $p_Y(X)$?

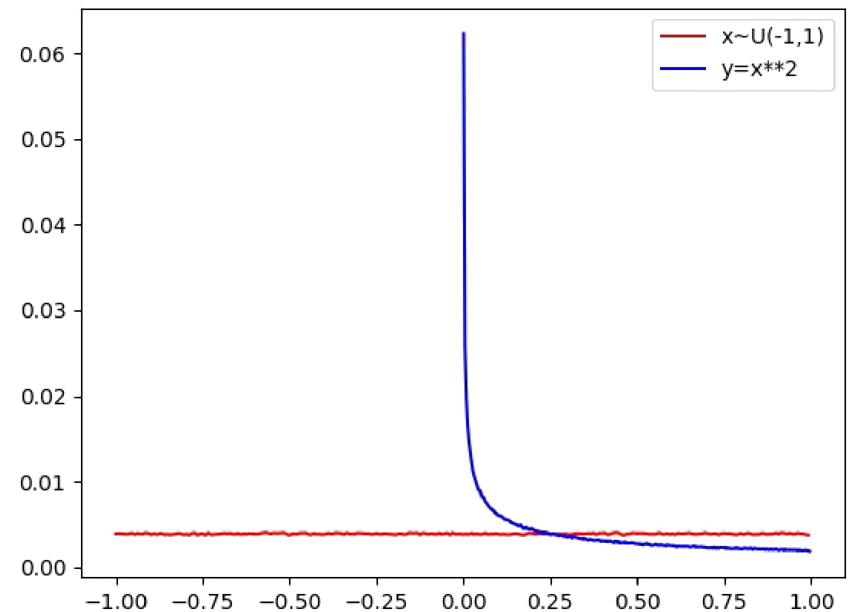


MÉTHODE DE MONTE CARLO

Calcul par simulation

On tire N échantillons suivant la loi de X
On applique f à chaque échantillon
On obtient N échantillons suivant la loi de Y
On exploite la loi des grands nombres pour estimer E(Y) et Var(Y)
Reprise des exemples précédents





Comment tirer N échantillons d’une loi donnée ?

Transformation intégrale probabiliste

Ou Universalité de la loi uniforme

Soit *X* une v.a. suivant une distribution continue et de fonction de partition *F*.

Alors *Y=F(X)* suit une loi uniforme

Preuve :

on note F_X et F_Y les fonctions de répartition des lois que suivent *X* et *Y*

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P\left(X \leq F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y$$

Méthode de la transformation inverse

➔Tirer au hasard selon la loi uniforme → U (usage d'un générateur de nombres aléatoires)

➔Trouver X tel F(X) = U (parfois possible directement, sinon méthode numérique)

➔X suit la loi représentée par la fonction de partition F

Loi exponentielle : $F(X)=1-e^{-\lambda X}$ si X >= 0, 0 sinon. $F^{-1}(U)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$

Loi normale : Transformation de Box-Muller

U_1 et U_2 v.a. uniformes sur [0,1]

On note $Z_1=\sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ et $Z_2=\sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$

Z_1 et Z_2 sont deux v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes