IDENTIFICACIÓN DE UN SÓLIDO RÍGIDO INMERSO EN UN FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESIBLE

Claudia M. Gariboldi[†], Graciela O. Giubergia[†] y Erica L. Schwindt[‡]

[†]*Depto. Matemática, FCEFQyN, Univ. Nac. de Rio Cuarto, Ruta 36 Km 601, 5800 Rio Cuarto, Argentina.*
cgariboldi@exa.unrc.edu.ar, ggiubergia@exa.unrc.edu.ar
[‡]*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, UMR 7598, 75005 Paris, France.*
schwindt@math.cnrs.fr

Resumen: En este trabajo se aborda el problema inverso de identificar un sólido rígido que se mueve al interior de un fluido a partir de la medición del tensor de Cauchy sobre una parte de la frontera en algún tiempo t_0 positivo. Este problema inverso es formulado como un problema de control optimal donde la variable de control está dada en función de parámetros que permiten caracterizar el cuerpo rígido. Utilizando técnicas de derivación respecto al dominio se obtienen las condiciones de optimalidad necesarias de primer orden que permitirán desarrollar un esquema numérico para identificar la posición del sólido en cualquier tiempo t.

Palabras clave: *Control optimal, Derivada respecto al dominio, Problemas fluido-estructura.*
2000 AMS Subject Classification: 49J20, 74F10, 76D07

1. INTRODUCCIÓN Y PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Sea Ω en $\mathbb{R}^3$ un dominio acotado. Sea $\mathcal{S}(t)$ un cuerpo rígido inaccesible moviéndose en un fluido viscoso incompresible ocupando una región denotada por $\mathcal{F}(t) = \Omega \setminus \overline{\mathcal{S}(t)}$. Asumimos que al tiempo t, $\mathcal{S}(t)$ puede ser descripto por su centro de masa $\boldsymbol{a}(t) \in \mathbb{R}^3$ y su matriz de orientación $\boldsymbol{Q}(t) \in SO_3(\mathbb{R})$ con $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{Q}(t)) = \boldsymbol{Q}(t)\mathcal{S}_{in} + \boldsymbol{a}(t)$, donde $\mathcal{S}_{in}$ es un dominio de referencia y $SO_3(\mathbb{R})$ denota el conjunto de las matrices de rotación de orden 3.

Las ecuaciones que modelan la dinámica del sistema fluido-estructura son:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p) = \boldsymbol{0} \quad \text{en } \mathcal{F}(t), \quad t \in (0,T) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{en } \mathcal{F}(t), \quad t \in (0,T) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}(t)) \quad \text{sobre } \partial\mathcal{S}(t), \quad t \in (0,T) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_* \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad t \in (0,T) \tag{4}$$

$$\int_{\partial\mathcal{S}(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p)\boldsymbol{n}\, d\gamma = \boldsymbol{0} \quad t \in (0,T) \tag{5}$$

$$\int_{\partial\mathcal{S}(t)} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}(t)) \times \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p)\boldsymbol{n}\, d\gamma = \boldsymbol{0} \quad t \in (0,T) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{\ell}, \quad \boldsymbol{Q}' = \mathbb{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{Q} \quad t \in (0,T) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{a}(0) = \boldsymbol{a}_{in}, \quad \boldsymbol{Q}(0) = \boldsymbol{Q}_{in}. \tag{8}$$

Aquí, $\boldsymbol{u}$ representa la velocidad del fluido y p su presión, $\boldsymbol{\ell}$ y $\boldsymbol{\omega}$ denotan respectivamente la velocidad lineal y angular del sólido y $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}, p)$ es el tensor de Cauchy. $\mathbb{S}(\boldsymbol{\omega})$ es el tensor velocidad angular, el cual satisface $\mathbb{S}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{z}$, para todo $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$.

La existencia de una única solución
$(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \in \boldsymbol{C}\left([0,T]; \boldsymbol{H}^2(\mathcal{F}(t)) \times H^1(\mathcal{F}(t))/\mathbb{R}\right) \times \boldsymbol{C}([0,T]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{C}^1([0,T]; \mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R}))$
del sistema (1)-(8) es probada en [4], bajo ciertas hipótesis de regularidad y la condición de compatibilidad $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}_* \cdot \boldsymbol{n}\, d\gamma = 0$.

2. PROBLEMA INVERSO

Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \left\{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \in \mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R}) : \overline{\mathcal{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})} \subset \Omega\right\}$ de posiciones admisibles para el sólido $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})$. Para cada $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})$ fijo en $\mathcal{A}$, es decir $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{a}(\bar{t}), \boldsymbol{Q}(\bar{t}))$ para algún $\bar{t} \in (0,T)$, el sistema estacionario (1)-(6) admite una única solución $(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{H}^2(\mathcal{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})) \times H^1(\mathcal{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}))/\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, que puede ser escrita como

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \ell_i \boldsymbol{u}^{(i)} + \omega_i \boldsymbol{U}^{(i)} + \boldsymbol{V}^*, \quad p = \sum_{i=1}^{3} \ell_i p^{(i)} + \omega_i P^{(i)} + P^*, \tag{9}$$

donde $\left(\boldsymbol{u}^{(i)}, p^{(i)}\right)$, $\left(\boldsymbol{U}^{(i)}, P^{(i)}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ y $(\boldsymbol{V}^*, P^*)$ satisfacen

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{u}^{(i)}, p^{(i)}\right) = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{U}^{(i)}, P^{(i)}\right) = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{V}^*, P^*\right) = \boldsymbol{0} & \text{en } \mathcal{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)} = \operatorname{div} \boldsymbol{U}^{(i)} = \operatorname{div} \boldsymbol{V}^* = 0 & \text{en } \mathcal{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \\ \boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(i)},\ \boldsymbol{U}^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(i)} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{0} & \text{sobre } \partial\mathcal{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \\ \boldsymbol{u}^{(i)} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{U}^{(i)} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{V}^* = \boldsymbol{u}_* & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

siendo $\left\{\boldsymbol{e}^{(i)}\right\}_{i=1}^{3}$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$, ℓ_i, ω_i dados por $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ simétrica y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^6$ con componentes que dependen de las soluciones de los sistemas (10). La demostración de este resultado puede ser consultada en [4, Proposition 3].

2.1. Formulación como un problema de control optimal

Definimos la función de costo $J : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ como

$$J(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]}, p_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\sigma}^{obs}\boldsymbol{n}|^2 \, d\gamma$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{obs}\boldsymbol{n}$ denota la medida de la componente normal del tensor de Cauchy de la solución del sistema (1)-(8) en un tiempo t_0, sobre una porción de la frontera de Ω denotada por Γ. La posición del sólido, caracterizada por $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})$, es la incógnita del problema. En este contexto, hemos denotado por $(\boldsymbol{u}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]}, p_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]})$ a la solución (9) obtenida a partir de los sistemas (10). El problema inverso de identificación de un sólido rígido puede ser formulado como el siguiente problema de control optimal:

$$\text{Hallar } (\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{Q}^*) \in \mathcal{A} \ \text{ tal que } \ J(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{Q}^*) = \inf_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q})\in\mathcal{A}} J(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}). \tag{$\mathcal{P}$}$$

Gracias al resultado de identificabilidad obtenido en [4, Theorem 2] se deduce la existencia y unicidad de un único control optimal solución de $(\mathcal{P})$. Además, debido a que la solución $\left(\boldsymbol{u}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]}, p_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]}, \boldsymbol{\ell}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]}, \boldsymbol{\omega}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q}]}\right)$ es analítica con respecto a $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})$, se tiene que la función de costo J es analítica en el punto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})$. Para estos resultados ver [1] en el caso de un obstáculo fijo y [4] para un cuerpo rígido en movimiento.

Observación: *El dato usado en la función J, $\boldsymbol{\sigma}^{obs}\boldsymbol{n}$, corresponde a una medida realizada en un tiempo fijo $t_0 > 0$. En consecuencia, el control optimal $(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{Q}^*)$ que resuelve el problema $(\mathcal{P})$ es una posición admisible que mejor aproxima a la posición del sólido desconocido en el tiempo t_0. Como en nuestro caso el sólido rígido se mueve (mediante traslación y rotación), no hay ninguna razón aparente por la cual el sólido encontrado coincida con el sólido desconocido en un tiempo $t \neq t_0$. Sin embargo, utilizando la regularidad de la solución con respecto al centro de masa y a la matriz de orientación, y aplicando el Teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard, es posible deducir que ambos sólidos son los mismos en todo tiempo t, salvo rotación (ver [4] para detalles).*

2.2. Cálculo de la derivada de la función costo

Con el objeto de escribir las condiciones de optimalidad de primer orden para el problema $(\mathcal{P})$, calculamos la derivada de la función J con respecto a la variable de control $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \in \mathcal{A}$. En este trabajo computamos la derivada Gâteaux de la función costo, usando la teoría de derivación respecto al dominio debida a J. Simon [6]. Para tal fin, dado $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q}) \in \mathcal{A}$, consideramos el campo vectorial $C_0^\infty(\Omega)$, dado por

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y})Z(\boldsymbol{y}),$$

donde $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\theta};\cdot):\Omega\to\mathbb{R}^3$, es la extensión a Ω del campo introducido en [4]:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y})=\exp(\theta_1A_1)\exp(\theta_2A_2)\exp(\theta_3A_3)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$$

con $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ denotando los ángulos de Euler que caracterizan la orientación del cuerpo rígido (ver [5, Chapter 4]) y $\mathcal{Z}\in C_0^\infty(\Omega)$ que satisface $\mathcal{Z}\equiv 1$ en $\overline{\mathcal{O}_1}$ y $\mathcal{Z}\equiv 0$ en $\Omega\setminus\mathcal{O}_2$, con $\overline{\mathcal{S}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{Q})}\subset\mathcal{O}_1$, $\overline{\mathcal{O}_1}\subset\mathcal{O}_2$, $\overline{\mathcal{O}_2}\subset\Omega$. Notar que el campo $\boldsymbol{\psi}$ representa, para cada $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\theta})$, una dirección de movimiento del sólido.

Denotemos por $(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{Q}_0)=(\boldsymbol{a}(t_0),\boldsymbol{Q}(t_0))$, $\mathcal{F}_0:=\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{Q}_0)$ y $\mathcal{S}_0:=\mathcal{S}(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{Q}_0)$. Siguiendo [2] tenemos que

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\psi},\mathcal{F}_0)=\lim_{s\to0}\frac{\boldsymbol{u}_{s\boldsymbol{\psi}}|_F-\boldsymbol{u}_0|_F}{s}\qquad\text{y}\qquad \dot{p}(\boldsymbol{\psi},\mathcal{F}_0)=\lim_{s\to0}\frac{p_{s\boldsymbol{\psi}}|_F-p_0|_F}{s},$$

donde F denota un abierto tal que $\overline{F}\subset\mathcal{F}_0$, $(\boldsymbol{u}_0,p_0)=(\boldsymbol{u}_{[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{Q}_0]},p_{[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{Q}_0]})$ es la solución del sistema (1)-(6) con el obstáculo $\mathcal{S}_0$ y $(\boldsymbol{u}_{s\boldsymbol{\psi}},p_{s\boldsymbol{\psi}})$ representa la solución con el sólido $\mathcal{S}_0+s\boldsymbol{\psi}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+s\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}_0\}$. En lo que sigue usaremos $\boldsymbol{u}_s:=\boldsymbol{u}_{s\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{u}_{[\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{Q}_s]}$ y $p_s:=p_{s\boldsymbol{\psi}}=p_{[\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{Q}_s]}$.

Ahora estamos en condiciones de obtener la expansión de primer orden de J, esto es:

$$J(\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{Q}_s)=J(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{Q}_0)+\int_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_0,p_0)\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\sigma}^{obs}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{\gamma}\ s+o(s),\tag{11}$$

donde $\frac{o(s)}{s}$ tiende a 0 cuando $s\to0$.

Para hallar las ecuaciones que satisfacen $(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})$, tenemos en cuenta que

$$(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})=\sum_{i=1}^3\left(\dot{\ell}_i(\boldsymbol{u}_0^{(i)},p_0^{(i)})+\ell_{0_i}(\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)},\dot{p}^{(i)})+\dot{\omega}_i(\boldsymbol{U}_0^{(i)},P_0^{(i)})+\omega_{0_i}(\dot{\boldsymbol{U}}^{(i)},\dot{P}^{(i)})\right)+(\dot{\boldsymbol{V}}^*,\dot{P}^*),\tag{12}$$

y los sistemas (10), que nos permiten deducir que $\left(\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)},\dot{p}^{(i)}\right)$, $\left(\dot{\boldsymbol{U}}^{(i)},\dot{P}^{(i)}\right)$ y $\left(\dot{\boldsymbol{V}}^*,\dot{P}^*\right)$ verifican

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\left(\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)},\dot{p}^{(i)}\right)=-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^*,\dot{P}^*\right)=\boldsymbol{0} & \text{en } \mathcal{F}_0\\ \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}=\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{V}}^*=0 & \text{en } \mathcal{F}_0\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}=-(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\partial\boldsymbol{u}_0^{(i)}}{\partial\boldsymbol{n}},\ \ \dot{\boldsymbol{V}}^*=-(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\partial\boldsymbol{V}_0^*}{\partial\boldsymbol{n}} & \text{sobre } \partial\mathcal{S}_0\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}=\boldsymbol{0},\ \ \dot{\boldsymbol{V}}^*=\boldsymbol{0} & \text{sobre } \partial\Omega,\end{cases}\tag{13}$$

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^{(i)},\dot{P}^{(i)}\right)=\boldsymbol{0} & \text{en } \mathcal{F}_0\\ \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{U}}^{(i)}=0 & \text{en } \mathcal{F}_0\\ \dot{\boldsymbol{U}}^{(i)}=-(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n})\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}_0^{(i)}}{\partial\boldsymbol{n}}-\nabla\left(\boldsymbol{e}^{(i)}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_0)\right)\right)-\boldsymbol{e}^{(i)}\times\boldsymbol{\ell}_0 & \text{sobre } \partial\mathcal{S}_0\\ \dot{\boldsymbol{U}}^{(i)}=\boldsymbol{0} & \text{sobre } \partial\Omega.\end{cases}\tag{14}$$

Luego de algunos cálculos, podemos demostrar, a partir de (12), (13) y (14), que $(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})$ satisface

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})=\boldsymbol{0} & \text{en } \mathcal{F}_0\\ \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{u}}=0 & \text{en } \mathcal{F}_0\\ \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{\ell}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a_0})-(\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{n})\left(\frac{\partial\boldsymbol{u_0}}{\partial\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{\omega_0}\times\boldsymbol{n}\right)-\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{\ell}_0 & \text{sobre } \partial\mathcal{S}_0\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} & \text{sobre } \partial\Omega\\ \begin{pmatrix}\int_{\partial\mathcal{S}_0}\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})\boldsymbol{n}\,d\gamma\\ \int_{\partial\mathcal{S}_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_0)\times\boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{u}},\dot{p})\boldsymbol{n}\,d\gamma\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\ell}}\\ \dot{\boldsymbol{\omega}}\end{pmatrix}+\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\ell}_0\\ \boldsymbol{\omega}_0\end{pmatrix}+\boldsymbol{C}, & \end{cases}\tag{15}$$

donde $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{6\times6}$ es la matriz invertible dada luego de la fórmula (10), $\boldsymbol{M}\in\mathbb{R}^{6\times6}$ (simétrica) y $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^6$ están dados por

$M_{ij} = \int_{\mathcal{F}_0} \boldsymbol{D}\left(\dot{\boldsymbol{u}}^{(i)}\right) : \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{u}^{(j)}\right) d\boldsymbol{x} \quad (i,j=1,2,3),$
$M_{ij} = \int_{\mathcal{F}_0} \boldsymbol{D}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^{(i-3)}\right) : \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{u}^{(j)}\right) d\boldsymbol{x} \quad (i=4,5,6; j=1,2,3),$
$M_{ij} = \int_{\mathcal{F}_0} \boldsymbol{D}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^{(i-3)}\right) : \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{U}^{(j-3)}\right) d\boldsymbol{x} \quad (i,j=4,5,6),$
$C_j = \int_{\mathcal{F}_0} \boldsymbol{D}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{*}\right) : \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{u}^{(j)}\right) d\boldsymbol{x} \ (j=1,2,3), \quad C_j = \int_{\mathcal{F}_0} \boldsymbol{D}\left(\dot{\boldsymbol{V}}^{*}\right) : \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{U}^{(j-3)}\right) d\boldsymbol{x} \ (j=4,5,6),$
con $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})$ denotando el tensor de deformaciones definido por $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w})_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_l} + \frac{\partial w_l}{\partial x_k}\right) (k,l=1,2,3)$.

Es conocido que el sistema (15) admite una única solución, ver por ejemplo [3, Theorem 1],

$$(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{p}, \dot{\boldsymbol{\ell}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{C}\left([0,T]; \boldsymbol{H}^2(\mathcal{F}(t)) \times H^1(\mathcal{F}(t))/\mathbb{R}\right) \times \boldsymbol{C}([0,T]; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

Introducimos el estado adjunto del sistema para reescribir la derivada de J de una manera más manejable, ya que (11) no permite expresar fácilmente la condición de optimalidad de primer orden. Así, el par $(\boldsymbol{\mu}, q)$ satisface

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mu}, q) = \boldsymbol{0} & \text{en } \mathcal{F}_0 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\mu} = 0 & \text{en } \mathcal{F}_0 \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0} & \text{sobre } \partial\mathcal{S}_0 \cup \partial\Omega - \Gamma \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_0, p_0)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\sigma}^{obs}\boldsymbol{n} & \text{sobre } \Gamma \\ \int_{\partial\mathcal{S}_0} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mu}, q)\boldsymbol{n}\, d\gamma = \boldsymbol{0} & \\ \int_{\partial\mathcal{S}_0} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_0) \times \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mu}, q)\boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}. & \end{cases} \tag{16}$$

En resumen, hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 2.1 *Con las hipótesis consideradas previamente, la derivada de J en términos del estado adjunto está dada por*

$$\dot{J}(\boldsymbol{\psi}, \mathcal{F}_0) = -\int_{\partial\mathcal{S}_0} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mu}, q)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\psi}.\boldsymbol{n}) \left(\frac{\partial \boldsymbol{u_0}}{\partial \boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\omega_0} \times \boldsymbol{n}\right) d\gamma. \tag{17}$$

2.3. Discusión: resolución numérica

Los cálculos de la sección precedente permiten desarrollar un esquema numérico para resolver $(\mathcal{P})$. Observemos que $(\mathcal{P})$ es un problema de optimización no lineal, ya que el sistema (1)-(8) es no lineal debido al acoplamiento fluido-sólido rígido. El método de Quasi-Newton: BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) parece ser apropiado para resolver nuestro problema. La resolución numérica utilizando este método, es llevada a cabo por medio del *software Freefem++* que resuelve ecuaciones en derivadas parciales con el método de los elementos finitos. Este análisis numérico está en curso y será objeto de un futuro trabajo.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los Proyectos PPI 18/C477 y C468 de SECyT-UNRC, Río Cuarto, Argentina, PIP 0534 de Conicet-Univ. Austral, Rosario, Argentina. Parte de este trabajo fue realizado durante la estadía de E. Schwindt en el Institut Elie Cartan de Lorraine.

Referencias

[1] C. Alvarez - C. Conca - L. Friz - O. Kavian - J. H. Ortega, *Identification of inmersed obstacles via boundary measurements*, Inverse Problems, 21(5): 1531-1552, 2005.

[2] C. Alvarez - C. Conca - R. Lecaros - J. H. Ortega, *On the identification of a rigid body inmersed in a fluid: A numerical approach*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 32: 919-925, 2008.

[3] C. Conca - J. San Martín - M. Tucsnak, *Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid*. Commun. Partial Differ. Equ. 25(5–6), 1019–1042, 2000.

[4] C. Conca - E. L. Schwindt - T. Takahashi, *On the identifiability of a rigid body moving in a stationary viscous fluid*, Inverse Problems , 28: 015005, 2012.

[5] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1951.

[6] J. Simon, *Differentiation with respect to the domain in boundary value problems*, Numer. Funct. Anal. Optim, 2: 649-87, 1980.