Cours de Tronc Commun Scientifique

Recherche Opérationnelle

Les files d'attente (1)

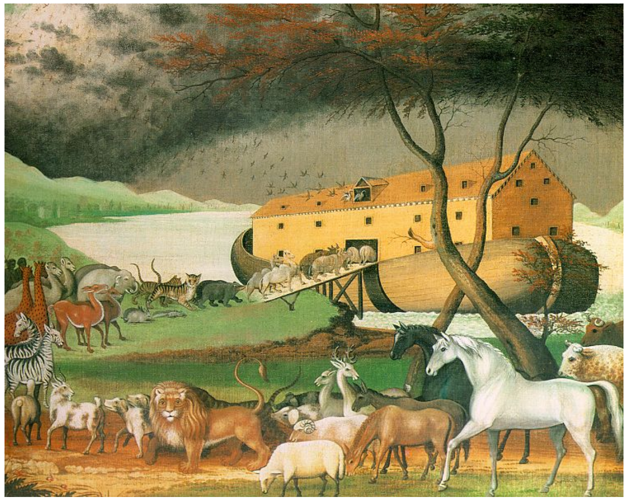
Frédéric Sur
École des Mines de Nancy

www.loria.fr/~sur/enseignement/RO/

Les files d'attente (1)

1. Introduction
2. Vocabulaire
   - Caractéristiques
   - Notations de Kendall
   - Loi de Little
3. Modélisation dans le cadre Markovien
   - Processus de Poisson
   - File M/M/1
   - Autres files
4. Un exemple
5. Conclusion

Exemples de files d'attente (1)



Noah's ark, Edward Hicks, 1846.

Exemples de files d'attente (2)

Exemples de files d'attente (3)

St Pancras Station, Londres, AFP, dec. 2010.

"File" d'attente ?

Exemples de files d'attente (4)

et :

- Trafic aérien
- Télécommunications (téléphonie, call-centers)
- Serveurs informatiques
- ...

Objectif : dimensionnement, organisation

par l'estimation de *mesures de performance* comme :

- temps moyen d'attente
- nombre moyen de clients dans la file
- nombre de serveurs occupés
- probabilité que la file soit vide / pleine
- ...

Les files d'attente (1)

1 Introduction

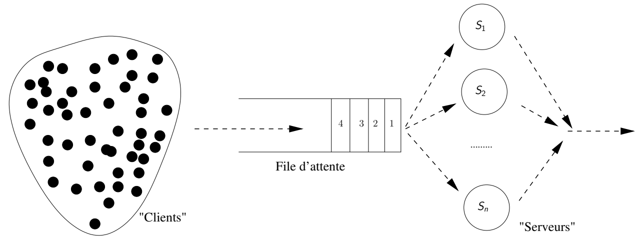
2 Vocabulaire
- Caractéristiques
- Notations de Kendall
- Loi de Little

3 Modélisation dans le cadre Markovien
- Processus de Poisson
- File M/M/1
- Autres files

4 Un exemple

5 Conclusion

Caractéristiques d'un système d'attente



- "loi" d'arrivée des clients ?
- "loi" de la durée des services ?
- combien de serveurs ?
- quelle est la taille de la file ?
- comment s'organise la file ?

Les notations de Kendall (1953)

File (système) d'attente décrite par :

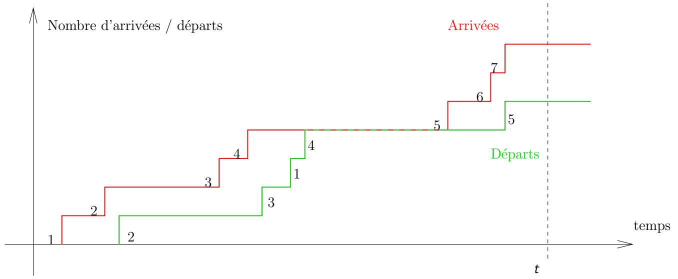
$$A/B/m/N/S$$

où :

- A est la distribution des arrivées : stochastique ou déterministe ;
- B est la distribution des temps de service : idem ;
- m est le nombre de serveurs ;
- N est le nombre maximum de clients dans le système ;
- S est la *discipline de service* (FIFO, LIFO, RAND. . .)

Question : sous quelles conditions peut-on faire des calculs ?

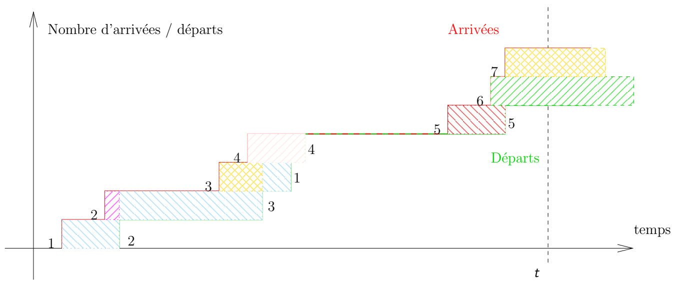
La loi de Little (1)



- $A(t)$ nombre d'arrivées pendant $[0,t]$
- $D(t)$ nombre de départs pendant $[0,t]$
- $N(t) = A(t) - D(t)$ nombre de clients au temps t
- T_i : temps de séjour (attente + service) du i-ème client

Remarque : $\displaystyle\int_0^t N(u)du = \sum_{i=1}^{A(t)} T_i - R(t)$

La loi de Little (1)



- $A(t)$ nombre d'arrivées pendant $[0,t]$
- $D(t)$ nombre de départs pendant $[0,t]$
- $N(t) = A(t) - D(t)$ nombre de clients au temps t
- T_i : temps de séjour (attente + service) du i-ème client

Remarque : $\displaystyle\int_0^t N(u)du = \sum_{i=1}^{A(t)} T_i - R(t)$

La loi de Little (2)

$$\int_0^t N(u)du = \sum_{i=1}^{A(t)} T_i - R(t)$$

Donc :

$$\frac{1}{t}\int_0^t N(u)du = \frac{A(t)}{t}\,\frac{1}{A(t)}\sum_{i=1}^{A(t)} T_i - \frac{R(t)}{t}$$

Hypothèses : lorsque $t \to +\infty$

1. $\frac{1}{t}\int_0^t N(u) \to \overline{N}$ (*nombre moyen de clients présents*)
2. $\frac{A(t)}{t} \to \lambda$ (*nombre moyen d'arrivées par unité de temps*)
3. $\left(\sum_{i=1}^{A(t)} T_i\right)/A(t) \to \overline{T}$ (*temps de séjour moyen*)
4. $\frac{R(t)}{t} \to 0$

(hypot. 1,2,3 : "régime permanent" ; hypot. 4 : pas de cumul)

La loi de Little (3)

Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Proposition - loi de Little (1961)

$$\overline{N} = \lambda \cdot \overline{T}$$

Autre version :

$$\overline{N_f} = \lambda \cdot \overline{T_f}$$

avec :
– $\overline{N_f}$: nombre moyen de clients *dans la file d'attente*
– $\overline{T_f}$: temps d'attente moyen (*dans la file*).
(i.e. sans compter les clients en cours de service.)

Remarque : résultat général !
$\longrightarrow$ pas d'hypothèse sur la distribution des arrivées ou des temps de services, ni sur la discipline de service.

Exemple

Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Un serveur informatique à 5 processeurs reçoit en moyenne 1000 requêtes par seconde.
L'administrateur du serveur se rend compte que le serveur est occupé à 100%, et qu'en moyenne 8 requêtes sont en attente.

Question 1 : quel est le temps moyen d'attente d'une requête ? (attention au *time-out*)
loi de Little : $\overline{T_f} = \overline{N_f}/\lambda = 8/1000$ sec.

Question 2 : quel est le temps moyen de traitement d'une requête ?
$\overline{T} - \overline{T_f} = (\overline{N} - \overline{N_f})/\lambda = (13-8)/1000 = 5/1000$ sec.

Les files d'attente (1)

Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

1 Introduction
2 Vocabulaire
- Caractéristiques
- Notations de Kendall
- Loi de Little
3 Modélisation dans le cadre Markovien
- Processus de Poisson
- File M/M/1
- Autres files
4 Un exemple
5 Conclusion

Les clients n'ont pas de mémoire

Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Hypothèses sur le nombre d'arrivées $A(t)$ pendant $[0, t]$:

- les nombres d'arrivées pendant des intervalles de temps disjoints sont indépendants (phénomène "sans mémoire")
- $\Pr(A(t+h) - A(t) = 1) =_{h \to 0} \lambda h + o(h)$
- $\Pr(A(t+h) - A(t) > 1) =_{h \to 0} o(h)$

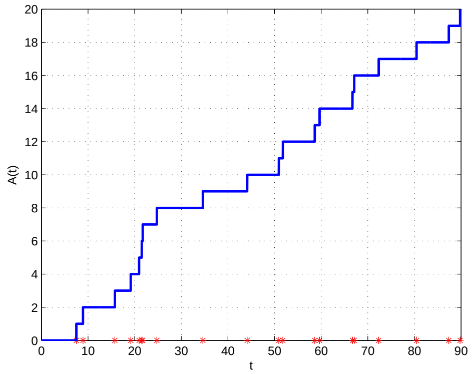
λ : taux d'arrivée (nombre par unité de temps).

Alors on peut montrer que

1. $\forall t,\ A(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt :
$$\forall k \geqslant 0,\ \Pr(A(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$
2. le temps T_{arr} entre deux arrivées consécutives suit une loi exponentielle :
$$\forall t \geqslant 0,\ \Pr(T_{\text{arr}} = t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

On dit que $A(t)$ est un *processus de Poisson*.

Processus de Poisson



(exemple avec $\lambda = 0.2$)

Propriétés : $E(A(t)) = \lambda t, \quad E(T_{\text{arr}}) = 1/\lambda$

Les serveurs n'ont pas davantage de mémoire...

Hypothèse : la durée d'un service suit une loi exponentielle.

$$\forall t \geqslant 0,\ \Pr(T_{\text{serv}} = t) = \mu e^{-\mu t}$$

De manière équivalente, si $S(t)$ est le nombre de services possibles pendant $[0, t]$,
$\forall t,\ S(t)$ suit une loi de Poisson :

$$\forall k \geqslant 0,\ \Pr(S(t) = k) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

Ici μ est le *taux de service* (ou *nombre moyen de services par unité de temps*) d'un serveur donné.
($1/\mu$ est la *durée moyenne d'un service*.)

File M/M/1

Exemple canonique : un serveur, file non-bornée.

- Arrivées = processus de Poisson, taux d'arrivée λ
- Durée des services exponentielle, taux de service μ

$\longrightarrow$ hypothèse Markovienne (M) dans les deux cas

$+$ proba d'arrivée **et** service pendant $[0, h]$ est $o(h)$

Si $m < n$:
$\Pr(N_{t+h} = n | N_t = m) = \Pr(A(t+h) - A(t) = n - m | N_t = m) + o(h)$

donc (cf déf processus de Poisson)
si $m < n - 1$: $\quad \Pr(N_{t+h} = n | N_t = m) = o(h)$
et : $\quad \Pr(N_{t+h} = n | N_t = n - 1) = \lambda h + o(h)$

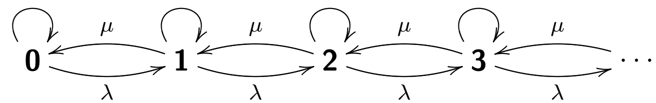
De même (raisonnement sur les départs $D(t)$) :
si $m > n + 1$: $\quad \Pr(N_{t+h} = n | N_t = m) = o(h)$
et : $\quad \Pr(N_{t+h} = n | N_t = n + 1) = \mu h + o(h)$

Vocabulaire : N_t = *processus de Markov à temps continu*.

File M/M/1 : vue comme une chaîne de Markov

$$\begin{aligned}\Pr(N_{t+h} = n) \quad &= \quad \lambda h \Pr(N_t = n-1) + (1 - \lambda h - \mu h) \Pr(N_t = n) \\ &\quad + \mu h \Pr(N_t = n+1) + o(h) \quad (\text{si } n \geqslant 1 \ldots)\end{aligned}$$

D'où la représentation :



Remarque : chaîne ergodique ?

Formule des coupes (régime permanent) $+ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda p_0 & = & \mu p_1 \\ \lambda p_1 & = & \mu p_2 \\ \ldots & & \\ \lambda p_n & = & \mu p_{n+1} \\ \ldots & & \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \forall n,\ p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

...sous la condition $\boxed{\tau = \lambda/\mu < 1}$

τ : *nombre moyen d'arrivées pendant la durée de service.*

File M/M/1 : propriétés

Sous condition : $\tau = \lambda/\mu < 1$

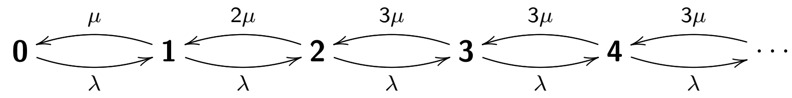
En régime permanent :

- $p_n = \tau^n(1-\tau)$
- Nombre moyen de clients dans le système :
$$\overline{N} = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n = \frac{\tau}{1-\tau}$$
- Nombre moyen de clients dans la file d'attente :
$$\overline{N_f} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p_n = \frac{\tau^2}{1-\tau}$$
- Temps de séjour moyen dans le système : (loi de Little)
$$\overline{T} = \overline{N}/\lambda = \frac{1}{\lambda}\frac{\tau}{1-\tau}$$
- Temps d'attente moyen dans la file : (loi de Little)
$$\overline{T_f} = \overline{N_f}/\lambda = \frac{1}{\lambda}\frac{\tau^2}{1-\tau}$$

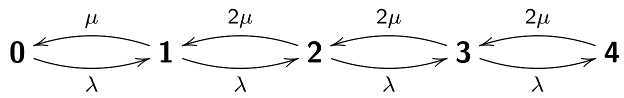
Autres files markoviennes

(convention : on ne représente pas les boucles du graphe)

M/M/3



M/M/2/4



$\longrightarrow$ formule des coupes.
$\longrightarrow$ cf formulaire dans le polycopié.
$\longrightarrow$ attention, la formule de Little dit : $\overline{T} = \overline{N}/\lambda$
où λ est le taux d'entrée *effectif*.
Et dans le cas M/M/n/K ? $\quad \overline{T} = \overline{N}/(\lambda(1-p(K)))$

Files d'attente (1)
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Loi des départs hors du système

Attention : la loi des départs $D(t)$ n'a pas de raison d'être la loi de $S(t)$.

$\longrightarrow$ c'est le cas si les serveurs sont occupés en permanence
$\longrightarrow$ sinon le taux de départ est inférieur au taux de service.

Exemple : cas de s serveurs, taux de service individuel μ.
Taux de service lorsque n serveurs sont occupés : $n\mu$.

Justification : Si $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\beta)$ sont indépendantes, alors : $\min(X,Y) \sim \mathcal{E}(\alpha+\beta)$

$\longrightarrow$ **Conséquence** sur la loi des départs :

- si $n \geqslant s$ clients dans le système, taux $s\mu$
- si $n < s$ clients dans le système : taux $n\mu < s\mu$.

Files d'attente (1)
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Les files d'attente (1)

1 Introduction
2 Vocabulaire
- Caractéristiques
- Notations de Kendall
- Loi de Little
3 Modélisation dans le cadre Markovien
- Processus de Poisson
- File M/M/1
- Autres files
4 Un exemple
5 Conclusion

Files d'attente (1)
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Comparaison de différentes stratégies

Des requêtes sont envoyées sur un serveur, taux d'arrivée λ.
Arbitrage entre trois types de serveurs :
(ou trois types d'organisation de la file d'attente dans une administration recevant du public)

1. processeur unique très puissant de taux de service $m\mu$, file M/M/1 ;
2. m processeurs légers indépendants de taux de service μ, file M/M/m commune ;
3. m processeurs légers indépendants de taux de service μ, chacun possédant une file M/M/1 dans laquelle un nouveau service entre "au hasard" (proba uniforme)

Question : temps de traitement moyen d'une requête ?

Files d'attente (1)
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Comparaison de différentes stratégies

1. M/M/1, taux de service $m\mu$, taux d'arrivée λ

$$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda/(m\mu)}{1-\lambda/(m\mu)}$$

2. M/M/m, taux de service μ, taux d'arrivée λ
$\overline{T}$ donné par les formules du polycopié p. 63.
cf formule Erlang-C.

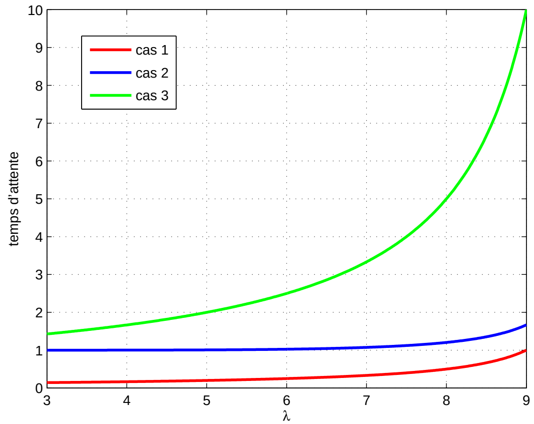
3. équivaut à m files M/M/1 de taux de service μ et taux d'arrivée λ/m

$$\overline{T} = \frac{m}{\lambda}\frac{\lambda/(m\mu)}{1-\lambda/(m\mu)}$$

Files d'attente (1)
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Comparaison de différentes stratégies

Exemple : $m = 10$, $\mu = 1$



Remarque : $\lambda < 10$.
Explication intuitive ?

Files d'attente (1)
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little
Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files
Un exemple
Conclusion

Les files d'attente (1)

1. Introduction
2. Vocabulaire
   - Caractéristiques
   - Notations de Kendall
   - Loi de Little
3. Modélisation dans le cadre Markovien
   - Processus de Poisson
   - File M/M/1
   - Autres files
4. Un exemple
5. Conclusion

Conclusion

Deux cas vus aujourd'hui :

- File d'attente générale : formules de Little.
- File d'attente Markovienne : les calculs en régime permanent / stationnaire sont faciles.

Prochaine séance :

- Généralisation du cadre M/M (*processus de naissance et de mort*)
- M/M^X (*Markov par lot*)
- M/G (*loi de service générale*)
- réseaux de files d'attente.

Introduction

Vocabulaire
Caractéristiques
Notations de Kendall
Loi de Little

Modélisation dans le cadre Markovien
Processus de Poisson
File M/M/1
Autres files

Un exemple

Conclusion