Cours de Tronc Commun Scientifique

Recherche Opérationnelle

Les files d'attente (2)

Frédéric Sur
École des Mines de Nancy

www.loria.fr/∼sur/enseignement/RO/

Actualités

Exclusif LSA: Carrefour France teste la file unique aux caisses dans cinq hypermarchés

Publié le 13 septembre 2013 par FLORENT MAILLET

Carrefour | Aménagement Commercial | Caisses | service clientèle | Distributeurs | Grande Distribution | Equipement, Agencement

Partagez l'info : Recommander 13 Tweeter 33 viadeo Linkedin envoyer

Ce dispositif, éprouvé en Espagne, devrait permettre aux clients de passer plus rapidement en caisse. Carrefour se laisse jusqu'à fin décembre pour pérenniser ou non la file d'attente unique. LSA a pu tester ce nouveau service à l'hypermarché de Montesson (Yvelines). Détails.

Carrefour file unique
En plus de l'écran indiquant la caisse qui se libère, une hôtesse dirige les clients dans ce nouveau service.

Carrefour passe au test à plus grande échelle concernant la file unique de clients, un dispositif censé diminuer le temps d'attente en caisse, tout en créant de nouvelles opportunités commerciales, un gros flux clients passant devant une sélection de produits.

Les files d'attente (2)

Les processus de naissance et de mort : définition

Définition - Processus de naissance et de mort

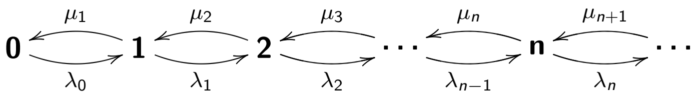
C'est un processus de Markov à temps continu tel que $\forall n \geqslant 1$, $\Pr(N_{t+h} = n)$ ne dépend (à l'ordre 1) que de $\Pr(N_t = n-1), \Pr(N_t = n), \Pr(N_t = n+1)$

Représentation :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, shift right, "\lambda_0"'] & \mathbf{1} \arrow[l, shift right, "\mu_1"'] \arrow[r, shift right, "\lambda_1"'] & \mathbf{2} \arrow[l, shift right, "\mu_2"'] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & \cdots \arrow[l, shift right, "\mu_3"'] \arrow[r, shift right, "\lambda_{n-1}"'] & \mathbf{n} \arrow[l, shift right, "\mu_n"'] \arrow[r, shift right, "\lambda_n"'] & \cdots \arrow[l, shift right, "\mu_{n+1}"'] \end{tikzcd}$$

Interprétation : états = taille de la population
transition $n \longrightarrow n+1$: naissance
transition $n \longrightarrow n-1$: mort

Les processus de naissance et de mort : propriétés



En régime stationnaire (convergence de la série $\sum_n p_n \dots$) :

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_0.$$

Cas particulier : toutes les files M/M !

Remarque

Files d'attente (2)
F. Sur - ENSMN
Les processus de naissance et de mort
Files M/M^X
Files M/G
PASTA
Pollaczek-Khinchine
Réseaux de files d'attente
Conclusion

Les processus de naissance et mort modélisent les files d'attente M/M.

Mais tous les phénomènes d'attente ne sont pas des processus de naissance et de mort. . .

$\longrightarrow$ cf exercices.
$\longrightarrow$ exemple des files M/M^X

Les files d'attente (2)

Files d'attente (2)
F. Sur - ENSMN
Les processus de naissance et de mort
Files M/M^X
Files M/G
PASTA
Pollaczek-Khinchine
Réseaux de files d'attente
Conclusion

Processus de Markov en lots (1)

Files d'attente (2)
F. Sur - ENSMN
Les processus de naissance et de mort
Files M/M^X
Files M/G
PASTA
Pollaczek-Khinchine
Réseaux de files d'attente
Conclusion

Hypothèse : arrivées Markoviennes
(au plus une arrivée sur un intervalle de temps h "très petit")
mais plusieurs départs possibles.

En général :

$$\begin{aligned}
\Pr(N_{t+h} = n) &= \sum_{k=n-1}^{+\infty} \Pr(N_{t+h} = n | N_t = k) \cdot \Pr(N_t = k) + o(h) \\
&= \lambda h \Pr(N_t = n-1) \; + \; \alpha \Pr(N_t = n) \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Pr(D(t, t+h) = k - n) \cdot \Pr(N_t = k) \\
&\quad + o(h)
\end{aligned}$$

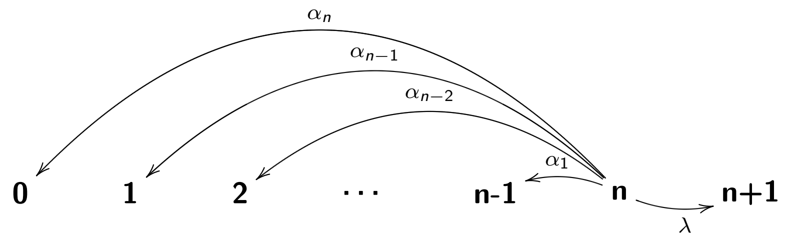
où $D(t, t+h)$ est le nombre de départs entre t et $t+h$.
(indépendant des départs avant t.)

Processus de Markov en lots (2)

Cas particulier pour les départs :
$\Pr(D(t, t+h) = k)$ ne dépend pas de t, et est sous la forme $\alpha_k h + o(h)$

$\longrightarrow$ processus de Markov *en lots* (batch Markov).
Notation de Kendall : M^X

Représentation "locale" :



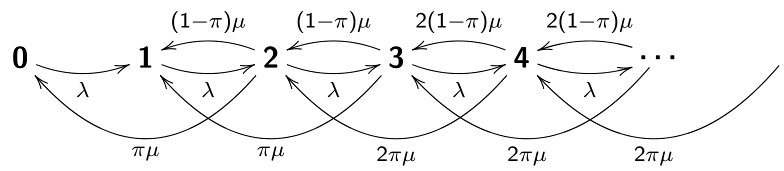
Remarque 1 : ce n'est pas un processus naissance/mort.

Remarque 2 : situation symétrique pour une file M^X/M (M^X/M^X ?)

Exemple (cf "attente dans un club sportif")

$\rightarrow$ Arrivée Poissonnienne de joueurs dans un club avec deux courts de tennis. *(taux λ)*
$\rightarrow$ Une partie commence dès que deux joueurs sont présents, et a une durée exponentielle. *(moyenne $1/\mu$)*
$\rightarrow$ dès que la partie est terminée, le perdant part, le vainqueur part avec la probabilité π, et reste jouer avec la probabilité $1 - \pi$.
Question : Combien de joueurs présents dans le club ?

Graphe associé :



$\longrightarrow$ régime permanent avec théorème des coupes, etc.

Les files d'attente (2)

1. Les processus de naissance et de mort
2. Files M/M^X
3. Files M/G
   - PASTA
   - Pollaczek-Khinchine
4. Réseaux de files d'attente
5. Conclusion

La propriété PASTA pour un système M/G

(R.W. Wolff 1981)

Propriété PASTA - *Poisson Arrivals See Time Averages*

Sous hypothèse d'arrivées Poissonniennes, chaque arrivant voit une distribution des clients (π_n) dans le système égale au régime permanent (p_n).

Donc tout nouvel arrivant voit $\overline{N}$ clients en moyenne avant lui dans le système.

Contre-exemple : arrivées déterministes à $t = 0, 2, 4 \ldots$ et durée de service 1.
Alors : $p_0 = p_1 = 1/2$,
et : $\pi_0 = 1$, $\pi_1 = 0 \ldots$

Les formules de Pollaczek-Khinchine

On montre à l'aide de PASTA que :

Propriété

Dans une file M/G/1 (arrivée Poissonniennes de taux λ et durée de service aléatoire Y) :

$$\overline{N} = \tau + \frac{\tau^2(1+\mathrm{Var}(Y)/E(Y)^2)}{2(1-\tau)}$$

$$\overline{T} = \mathrm{E}(Y)\left(1 + \frac{\tau(1+\mathrm{Var}(Y)/E(Y)^2)}{2(1-\tau)}\right)$$

où $\tau = \lambda E(Y)$.

On démontre aussi (cf poly) : $\tau = 1 - p_0$.

Cas particulier : G=M, $\mathrm{Var} Y = E(Y)^2 = 1/\mu^2 \dots$

Application

Soit une entreprise utilisant des machines identiques.
Ces machines tombent en panne au bout d'une durée Poissonnienne de taux λ.
($1/\lambda = 10$ jours est le MTBF)

La réparation dure (exactement) 20 jours avec proba 0,2 et 1 jour avec proba 0,8.

Quel est le temps moyen de réparation à l'atelier ?
(il ne traite qu'une machine à la fois)

$E(Y) = 20 \times 0,2 + 1 \times 0,8 = 4,8$ jours.
$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 57,76$ jours^2.
$\tau = \lambda E(Y) = 0,48$ (donc $p_0 = 0,52$)

$\rightarrow$ On calcule alors avec Pollaczek-Khinchine :
$\overline{T} = 12,57$ jours.

$\rightarrow$ Nombre moyen de machines dans l'atelier :
$\overline{N} = 1,257$ machine.

Les files d'attente (2)

Remarque

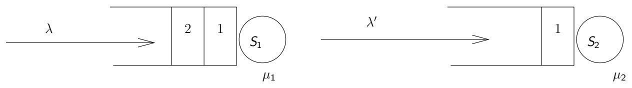
On peut écrire les formules du slide 8 avec $N_t \in \mathbb{Z}^d$

D'où un graphe dont les sommets correspondent à un d-uplet.

$\longrightarrow$ cf exercice 3.9.11 (serveur semi-actif), ou *réseaux de files d'attente*.

Réseaux de files d'attente (1)

Exemple : une file M/M/1/3 suivie d'une file M/M/1/2.



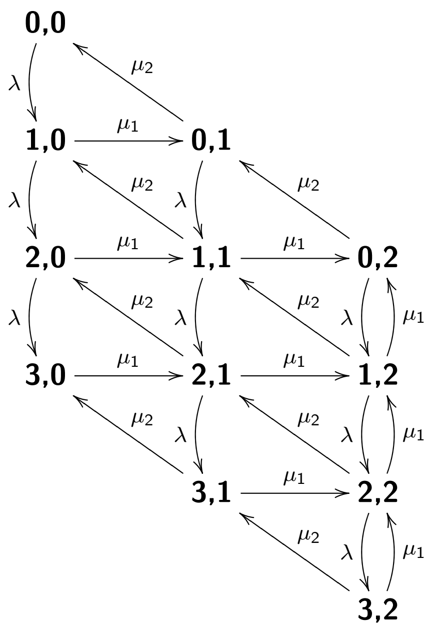
$\rightarrow$ Ici $\lambda' = 0$ lorsqu'il n'y a pas de client servi en S_1, sinon $\lambda' = \mu_1$.

$\rightarrow$ Lorsque l'une des files est pleine, les clients arrivant sont perdus.

Graphe ?

Réseaux de files d'attente (2)

Files d'attente (2)
F. Sur - ENSMN
Les processus de naissance et de mort
Files M/M^X
Files M/G
PASTA
Pollaczek-Khinchine
Réseaux de files d'attente
Conclusion



Les files d'attente (2)

Files d'attente (2)
F. Sur - ENSMN
Les processus de naissance et de mort
Files M/M^X
Files M/G
PASTA
Pollaczek-Khinchine
Réseaux de files d'attente
Conclusion

Conclusion

Files d'attente (2)
F. Sur - ENSMN
Les processus de naissance et de mort
Files M/M^X
Files M/G
PASTA
Pollaczek-Khinchine
Réseaux de files d'attente
Conclusion

- Cas général : formule de Little.
- M/M : processus de naissance et de mort
  cf formulaire dans le poly.
- M/M^X, M^X/M, M^X/M^X : toujours un processus de Markov.
- M/G : PASTA, Pollaczek-Khinchine.

Remarque : (beaucoup) plus de résultats sur les cas M/G ou réseaux de files d'attente dans la littérature.

Remarque : et dans le cas non-Markovien ?
Calculs explicites pas forcément possibles
$\longrightarrow$ simulation.

Produit commercial professionnel : par exemple *ExtendSim*.
(CE42 H. Amet – *Outils et méthodes pour la conception de systèmes informatisés d'aide à la décision*)

Test 2

Précision : polycopié p. 62, file M/M/1/K
"Cas de ~~K places d'attente~~, un serveur"
$\rightarrow$ Cas de $K-1$ places d'attente, un serveur (donc K places en tout dans le système d'attente)

Date du test : Mardi 14 janvier 8h30 ou 13h30
(selon emploi du temps habituel)

Programme :

- programmation dynamique,
- chaînes de Markov,
- files d'attente.

Seul document autorisé : le polycopié.
(et dictionnaire pour les élèves étrangers)