Cours de Tronc Commun Scientifique

Recherche Opérationnelle

Les chaînes de Markov

Frédéric Sur
École des Mines de Nancy

www.loria.fr/∼sur/enseignement/RO/

Les chaînes de Markov

1. Introduction
2. Vocabulaire
   - Chaînes de Markov
   - Chaînes réductibles / irréductibles
   - Chaînes périodiques / apériodiques
3. Comportement asymptotique
4. Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
   - Notion d'ergodicité
   - Théorème "des coupes"
5. Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
6. Conclusion

Exemple météorologique

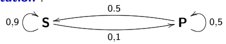
Aujourd'hui il y a du soleil / il pleut.
Quel temps fera-t-il demain ?

Modélisation : probabilités de *transition*

$$\Pr\big(X_{n+1}=\mathrm{S}|X_n=\mathrm{S}\big)=0,9 \quad \Pr\big(X_{n+1}=\mathrm{S}|X_n=\mathrm{P}\big)=0,5$$
$$\Pr\big(X_{n+1}=\mathrm{P}|X_n=\mathrm{S}\big)=0,1 \quad \Pr\big(X_{n+1}=\mathrm{P}|X_n=\mathrm{P}\big)=0,5$$

Matrice de transition : $P=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$

Représentation :



Prédiction du temps

Initialement il fait beau. $X_0=\mathrm{S}$.

Réalisations possibles de (X_n) :
1) $X_0=\mathrm{S}, X_1=\mathrm{S}, X_2=\mathrm{P}, X_3=\mathrm{S}, X_4=\mathrm{S}\dots$
2) $X_0=\mathrm{S}, X_1=\mathrm{P}, X_2=\mathrm{S}, X_3=\mathrm{S}, X_4=\mathrm{P}\dots$

Important : le temps qu'il fera à l'instant $n+1$ ne dépend que du temps à l'instant n.

Distribution de X_n : $\pi_n=\big(\Pr(X_n=\mathrm{S})\,,\,\Pr(X_n=\mathrm{P})\big)$

Formule des probabilités totales :

$$\Pr(X_{n+1}=\mathrm{S})=\Pr(X_{n+1}=\mathrm{S}\text{ et }X_n=\mathrm{S})+\Pr(X_{n+1}=\mathrm{S}\text{ et }X_n=\mathrm{P})$$
$$=\Pr(X_n=\mathrm{S})\cdot\Pr(X_{n+1}=\mathrm{S}|X_n=\mathrm{S}) \;+\; \Pr(X_n=\mathrm{P})\cdot\Pr(X_{n+1}=\mathrm{S}|X_n=\mathrm{P})$$

Conclusion : $\pi_{n+1}=\pi_n\cdot P$.

Exemple : $\pi_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$, $\pi_1=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\end{pmatrix}$
$\pi_2=\pi_1\cdot P=\pi_0\cdot P^2=\begin{pmatrix}0,86 & 0,14\end{pmatrix}$

État stationnaire du temps ?

$\pi_n = \pi_{n-1} \cdot P = \pi_0 \cdot P^n$

Question 1 : est-ce que π_n converge lorsque $n \to +\infty$? (vers une *distribution stationnaire* π^*)

Question 2 : π^* est-elle unique ?

Question 3 : quelle est la typologie des chaînes pour lesquelles on peut prévoir le comportement de π_n ?

Ici : π^* existe, est unique, et vaut $\begin{pmatrix} 0,833 & 0,167 \end{pmatrix}$

Veut dire : dans t jours (assez grand), il y a 83% de chance qu'il fasse soleil (quelque soit le temps actuel).

On pourra aussi dire (grâce au *théorème ergodique*, cf poly) : en moyenne, il fait beau 83% des jours.

Les chaînes de Markov

1 Introduction

2 Vocabulaire
- Chaînes de Markov
- Chaînes réductibles / irréductibles
- Chaînes périodiques / apériodiques

3 Comportement asymptotique

4 Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
- Notion d'ergodicité
- Théorème "des coupes"

5 Comportement asymptotique des chaînes absorbantes

6 Conclusion

Chaînes de Markov

Soit E un ensemble fini (ou dénombrable) d'*états*.

Définition

Une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans E t.q. :

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_n = i) = \Pr(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

est une *chaîne de Markov*.

Définition

$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_n(i,j)$ est la *probabilité de transition* de l'état i à l'état j.

Remarque : on ne considérera que des chaînes *homogènes* i.e. telles que $p_n(i,j) = p_{i,j}$.

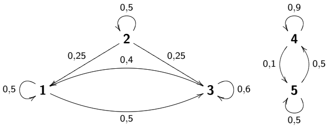
Si E fini, $P = (p_{i,j})$ est la *matrice de transition* de (X_n).

Représentation graphique

Soit G le graphe orienté valué tel que :
- sommets = états (E)
- arête de i vers j si $p_{i,j} > 0$.
- valuation de l'arête $i \to j$: $p_{i,j}$.

Une chaîne de Markov peut être vue comme une marche aléatoire sur G, connaissant π_0.

Exemple :



Matrice de transition et distribution de X_t

Espace d'états E fini, matrice de transition : $P = (p_{i,j})$

Propriétés élémentaires (cf poly.) :

- la somme des éléments d'une ligne de P vaut 1. (matrice *stochastique*)
- $P^n_{i,j} = \Pr(X_{t+n} = j | X_t = i) \quad (\forall t)$
- si π_0 est la distribution de X_0 alors la distribution de X_n est :

$$\pi_n = \pi_{n-1} P = \pi_0 P^n.$$

Chaînes réductibles / irréductibles

Définition

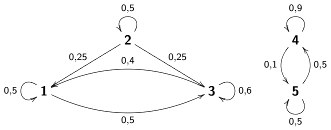
Une chaîne de Markov est *irréductible* si chaque état est accessible à partir de chaque autre état.

Autrement dit, G est fortement connexe.

Sinon elle est dite *réductible*, et G admet plusieurs composantes fortement connexes.

Une composante qui ne mène à aucune autre est *finale*, sinon les états qui la composent sont *transients* (ou *transitoires*) (une fois qu'on a quitté la classe d'un état transitoire, on n'y retourne pas).

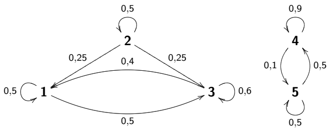
Illustration : chaîne réductible



Cette chaîne de Markov est réductible.

Composantes fortement connexes : $\{1,3\}, \{2\}, \{4,5\}$.
L'état 2 est transitoire.
Les classes $\{1,3\}$ et $\{4,5\}$ sont finales.

Illustration : chaîne réductible



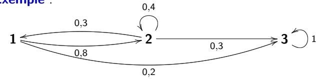
Quitte à renuméroter les états, on peut écrire :

$$P = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cas particulier : chaîne absorbante

Cas particulier où les composantes finales sont réduites à des singletons.

Exemple :



Composantes fortement connexes : $\{1,2\}$ et $\{3\}$.
Une seule composante finale : $\{3\}$.
On dit que 3 est état *absorbant*.

Quitte à renuméroter les états :

$$P = \begin{pmatrix} I_{m-s,m-s} & 0 \\ R_{s,m-s} & Q_{s,s} \end{pmatrix}$$

où s est le nombre d'états transitoires.

Chaînes périodiques / apériodiques

Définition

Un état i est *périodique* (de période p) si :

$$p = \text{pgcd}\,\{n, \Pr(X_n = i | X_0 = i) > 0\} > 1$$

(pgcd des longueurs des cycles)

Propriété

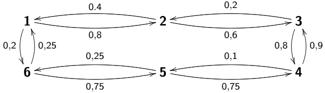
Les états d'une même composante ont même période.

Conséquence 1 : on peut parler d'une chaîne de Markov irréductible périodique ou apériodique.

Conséquence 2 : dès que le graphe d'une chaîne de Markov irréductible a une boucle sur un sommet, alors la chaîne est apériodique.

Chaînes de Markov
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Chaînes de Markov
Chaînes réductibles / irréductibles
Chaînes périodiques / apériodiques
Comportement asymptotique
Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
Notion d'ergodicité
Théorème "des coupes"
Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
Conclusion

Illustration : chaîne irréductible périodique



Remarque : ici, chaîne irréductible

Période : 2

Quitte à renuméroter les états, on peut écrire :

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \\ \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \\ \mathbf{2} & 0,4 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 0 & 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{6} & 0,25 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Chaînes de Markov
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Chaînes de Markov
Chaînes réductibles / irréductibles
Chaînes périodiques / apériodiques
Comportement asymptotique
Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
Notion d'ergodicité
Théorème "des coupes"
Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
Conclusion

Les chaînes de Markov

1 Introduction
2 Vocabulaire
- Chaînes de Markov
- Chaînes réductibles / irréductibles
- Chaînes périodiques / apériodiques

3 Comportement asymptotique

4 Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
- Notion d'ergodicité
- Théorème "des coupes"

5 Comportement asymptotique des chaînes absorbantes

6 Conclusion

Chaînes de Markov
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Chaînes de Markov
Chaînes réductibles / irréductibles
Chaînes périodiques / apériodiques
Comportement asymptotique
Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
Notion d'ergodicité
Théorème "des coupes"
Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
Conclusion

Questions

→ Le comportement d'une chaîne de Markov dépend de

1. la matrice de transition P
2. la distribution initiale π_0.

→ Étude du comportement à "long terme" :

- π_n converge-t-elle ?
- Si oui, quelle est la limite ? Dépend-elle de π_0 ?
- Pour une chaîne absorbante, quelle est la durée moyenne avant absorption ?

Comportement asymptotique : généralités

$\pi_{n+1} = \pi_n \cdot P$

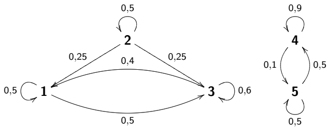
→ si (π_n) converge, c'est nécessairement vers un vecteur propre (à gauche) de P associé à la valeur propre 1.

Ce VP existe car P est stochastique (cf poly),
mais l'espace propre associé peut-être de dimension > 1.
(π_n) ne converge pas forcément.

Question : ~~quand est-ce qu'il y a convergence ?~~

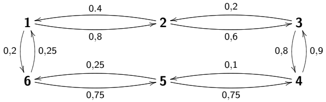
Question : quand est-ce qu'il **n**'y a **pas** convergence ?

Cas des chaînes réductibles



→ la limite dépend de π_0.

Cas des chaînes périodiques



→ (π_n) ne converge pas, car :

si on part de 1 ($n = 0$)

- on est certain de ne pas être en $2, 4, 6$ pour n pair ($\pi_{2k}(2,4,6) = 0$ et $\pi_{2k}(1,3,5) > 0$),
- et certain de ne pas être en $1, 3, 5$ pour n impair ($\pi_{2k+1}(1,3,5) = 0$ et $\pi_{2k+1}(2,4,6) > 0$)

Les chaînes de Markov

1. Introduction
2. Vocabulaire
   - Chaînes de Markov
   - Chaînes réductibles / irréductibles
   - Chaînes périodiques / apériodiques
3. Comportement asymptotique
4. Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
   - Notion d'ergodicité
   - Théorème "des coupes"
5. Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
6. Conclusion

Chaînes de Markov ergodiques

Définition

Une chaîne de Markov est *ergodique* si (π_n) converge, indépendamment de π_0.

Remarque : on montre qu'alors l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
π_n converge vers π^*, appelée distribution *stationnaire*.

Théorème

Les chaînes de Markov irréductibles et apériodiques sont ergodiques.

Théorème des coupes ou de conservation des flux

Juste un moyen de simplifier le système linéaire.
$\pi^* = \pi^* \cdot P$: on cherche π^*.

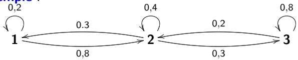
"Théorème" des coupes (conservation des flux)

Soit $A \cup B$ une partition de E :

$$\sum_{j \in B} \sum_{i \in A} \pi_i^* p_{i,j} = \sum_{j \in A} \sum_{i \in B} \pi_i^* p_{i,j}$$

Le but est de choisir les partitions $A \cup B$ (ou *les coupes*) en minimisant le nombre d'inconnues π_i^* dans chaque équation.
$\rightarrow$ $m-1$ coupes & $\sum_i \pi_i^* = 1$

Exemple :



Remarque : les probas des boucles n'interviennent pas.

Les chaînes de Markov

1. Introduction
2. Vocabulaire
   - Chaînes de Markov
   - Chaînes réductibles / irréductibles
   - Chaînes périodiques / apériodiques
3. Comportement asymptotique
4. Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
   - Notion d'ergodicité
   - Théorème "des coupes"
5. Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
6. Conclusion

Pour les chaînes de Markov absorbantes. . .

$$P = \begin{pmatrix} I_{m-s,m-s} & 0 \\ R_{s,m-s} & Q_{s,s} \end{pmatrix}$$

où s est le nombre d'états transitoires.

Théorème 1

$I - Q$ est inversible.
$N = (I - Q)^{-1}$ est la *matrice fondamentale* de la chaîne.
$n_{i,j}$ est la nombre moyen de passage en j partant de i.

Donc $\sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$ est le nombre moyen de passage dans les états transitoires lorsqu'on part de i (jusque l'absorption).

Théorème 2

Soit $A = NR$. (de taille $s \times m - s$)
$a_{i,j}$ est la probabilité d'être absorbée par j en partant de l'état transitoire i.

Les chaînes de Markov

1 Introduction
2 Vocabulaire
- Chaînes de Markov
- Chaînes réductibles / irréductibles
- Chaînes périodiques / apériodiques

3 Comportement asymptotique
4 Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
- Notion d'ergodicité
- Théorème "des coupes"

5 Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
6 Conclusion

Chaînes de Markov
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Chaînes de Markov
Chaînes réductibles / irréductibles
Chaînes périodiques / apériodiques
Comportement asymptotique
Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
Notion d'ergodicité
Théorème "des coupes"
Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
Conclusion

Conclusion

Les chaînes de Markov, en pratique dans nos problèmes :

- Première étape : modélisation du problème.
- Si chaîne ergodique, alors convergence vers une distribution limite, à déterminer.
- Si chaîne absorbante, théorèmes 1 & 2.

Chaînes de Markov
F. Sur - ENSMN
Introduction
Vocabulaire
Chaînes de Markov
Chaînes réductibles / irréductibles
Chaînes périodiques / apériodiques
Comportement asymptotique
Comportement asymptotique des chaînes ergodiques
Notion d'ergodicité
Théorème "des coupes"
Comportement asymptotique des chaînes absorbantes
Conclusion