Cours GIMAS8AD

Modélisation et prévision

Séries chronologiques - Séance 5

Modélisation avec variable exogène: modèle à « fonction de transfert »

Frédéric Sur
École des Mines de Nancy

https://members.loria.fr/FSur/enseignement/modprev/

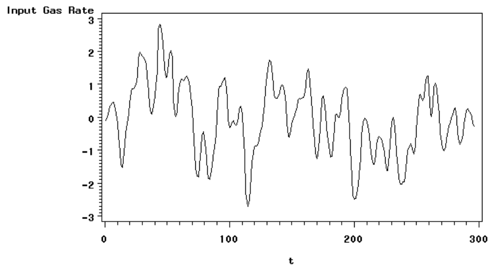
Séance 5

Exemples

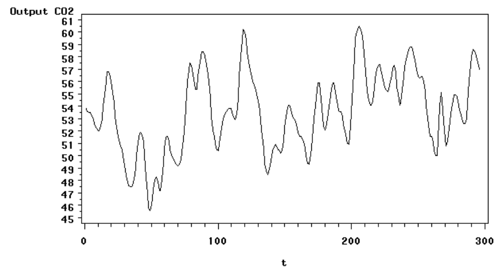
- modèles proie-prédateur : nombre de proies lié au nombre de prédateurs, avec effet retard pour les naissances
- construction de logements neufs en fonction de prêts immobiliers accordés, dépendance entre les valeurs, avec retard
- émission de CO_2 d'une chaudière fonction du débit de gaz (cf poly)
- etc.

Exemple de la chronique CO2 (cf poly)

a) Debit alimentation en gaz : input x



b) Concentration en CO2 : output y



Exemple de la chronique CO2 (cf poly)

X_t : débit de gaz en entrée d'une chaudière
Y_t : émission de CO2

Modèle identifié :

$$Y_t = 53.26 - \frac{0.535 + 0.376B + 0.518B^2}{1 - 0.548B} X_{t-3} + \frac{1}{1 - 1.532B + 0.632B^2} \varepsilon_t$$

Intérêt double :
$\longrightarrow$ modélisation
$\longrightarrow$ prévision

Modèles à variable exogène

Modèle à fonction de transfert :
(cf ARIMAX : ARIMA with exogeneous factors)

$$Y_t = \mu + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + u_t$$

avec :

- (Y_t) est la chronique à modéliser
- (X_t) est la **chronique explicative**
- (u_t) est la chronique des erreurs (ARMA)

$\rightarrow$ les chroniques sont supposées **stationnaires**.

$\rightarrow$ éventuellement :

- $\beta_i = 0$ pour $i < b$ (b est le *retard*),
- et $k = +\infty$ (cf AR...)

Modélisation et prévision
F. Sur - ENSMN
Modèles à fonction de transfert
Exemples
Définition
Identification du modèle
Pré-blanchiment
Corrélogramme croisé
Résidus
Résumé
Régression fallacieuse
Conclusion
Exemple

Écriture avec l'opérateur de décalage

Modèle à fonction de transfert :

$$Y_t = \mu + \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

avec :

- $b \geqslant 0$ le retard
- $\Omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \cdots - \omega_s B^s$
- $\Delta(B) = 1 - \delta_1 B - \cdots - \delta_r B^r$
- $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$
- $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$

et (ε_t) bruit blanc gaussien.

Définition : $\frac{\Omega(B)}{\Delta(B)}$ est appelé *fonction de transfert*.

Rappel : $\mu + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$ est la représentation ARMA d'un processus stationnaire linéaire gaussien.

Modélisation et prévision
F. Sur - ENSMN
Modèles à fonction de transfert
Exemples
Définition
Identification du modèle
Pré-blanchiment
Corrélogramme croisé
Résidus
Résumé
Régression fallacieuse
Conclusion
Exemple

Séance 5

Modélisation et prévision
F. Sur - ENSMN
Modèles à fonction de transfert
Exemples
Définition
Identification du modèle
Pré-blanchiment
Corrélogramme croisé
Résidus
Résumé
Régression fallacieuse
Conclusion
Exemple

« Stationnarisation »

Dans le modèle, X_t et Y_t doivent être *stationnaires*...

$\longrightarrow$ il faut éventuellement dériver au préalable X_t et Y_t (de la même manière) pour que le résultat soit stationnaire.

Blanchiment de la chronique explicative

X_t : chronique explicative

Pré-blanchiment (*pré-filtrage*)
(X_t) est un processus stationnaire (« donc » ARMA).

$\rightarrow$ il existe des polynômes Φ_1 et Θ_1 t.q. :

$$X_t = \frac{\Theta_1(B)}{\Phi_1(B)} \chi_t$$

où χ_t est un bruit blanc gaussien.

On écrit

$$\chi_t = \frac{\Phi_1(B)}{\Theta_1(B)} X_t$$

$\rightarrow$ le filtre $\frac{\Phi_1(B)}{\Theta_1(B)}$ a « blanchi » la chronique X_t.

Blanchiment de la chronique explicative

$$Y_t = (\mu +)\, \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

On applique $\frac{\Phi_1(B)}{\Theta_1(B)}$ à Y_t :

$$\Upsilon_t = \frac{\Phi_1(B)}{\Theta_1(B)} Y_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} \chi_{t-b} + \widetilde{\varepsilon}_t$$

(les polynômes symboliques commutent)

avec :

- $\widetilde{\varepsilon}_t$ *stationnaire* (pas un bruit blanc comme ε_t), indépendant de χ_t.
- et donc χ_t b.b.g.

Le corrélogramme croisé

$$\Upsilon_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} \chi_{t-b} + \widetilde{\varepsilon}_t$$

Comment identifier Ω et Δ ?
(ou la fonction de transfert Ω/Δ)

Définition : le *corrélogramme croisé*

$$\rho(h) = \frac{\mathrm{Cov}(\chi_t, \Upsilon_{t+h})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\chi_t) \cdot \mathrm{Var}(\Upsilon_t)}}$$

(ne dépend pas de t, cf slide suivant)

Remarque : $\rho(h)$ est défini pour $h \in \mathbb{Z}$
(a priori, $\rho(h) \neq \rho(-h)$)

Identification de la fonction de transfert

$$\Upsilon_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} \chi_{t-b} + \widetilde{\varepsilon}_t \quad \text{où} \quad (\chi_t) \text{ b.b. et } \quad (\widetilde{\varepsilon}_t) \text{ stationnaire}$$

Inversion de Δ : $\Upsilon_t = \sum_{h \geqslant 0} \nu_h \chi_{t-h} + \widetilde{\varepsilon}_t \quad$ (ici si $h < b, \nu_h = 0$)

Proposition *(intérêt du corrélogramme croisé)*

$$\forall h \geqslant 0,\ \rho(h) = \nu_h \frac{\sigma_\chi}{\sigma_\Upsilon} \qquad \text{et} \quad \forall h < 0,\ \rho(h) = 0$$

Preuve :

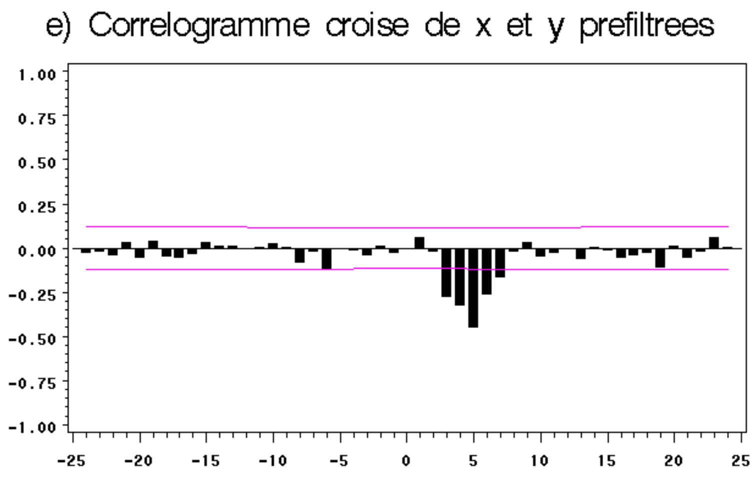
$$\mathrm{Cov}(\chi_t, \Upsilon_{t+h}) = \mathrm{Cov}\Big(\chi_t, \sum_{h' \geqslant 0} \nu_{h'} \chi_{t+h-h'}\Big) \quad (\chi_t \text{ et } \widetilde{\varepsilon}_t \text{ décorrélés})$$

$$= \begin{cases} \nu_h \, \mathrm{Var}(\chi) & \text{si } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{car } \chi_t \text{ bruit blanc})$$

Conclusion : coef. ν_h du "polynôme" Ω/Δ proportionnel au coef. $\rho(h)$ du corrélogramme croisé.

Exemple de corrélogramme croisé

Modélisation et prévision
F. Sur - ENSMN
Modèles à fonction de transfert
Exemples
Définition
Identification du modèle
Pré-blanchiment
Corrélogramme croisé
Résidus
Résumé
Régression fallacieuse
Conclusion
Exemple



Intérêt pratique du corrélogramme croisé

Modélisation et prévision
F. Sur - ENSMN
Modèles à fonction de transfert
Exemples
Définition
Identification du modèle
Pré-blanchiment
Corrélogramme croisé
Résidus
Résumé
Régression fallacieuse
Conclusion
Exemple

$$Y_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t = \nu'(B) X_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

1. premier pic (significativement) non nul sur le corrélogramme donne le décalage b,
2. si décroissance (assez) lente du corrélogramme : on envisage un dénominateur (cf inversion de $(1-\lambda B)$)
   si sinusoïde : dénominateur de degré $\geqslant 2$,
   (toujours avec l'objectif d'un *modèle simple*)
3. sinon le nombre (et la position) des pics non nuls donne le degré du numérateur (et les coefficients non nuls).

Remarque : si le corrélogramme croisé a des pics significatifs pour des décalages $h < 0$, le modèle n'est (vraisemblablement) pas bien adapté. (non-causalité)

Identification du modèle : ARMA sur les résidus

Modélisation et prévision
F. Sur - ENSMN
Modèles à fonction de transfert
Exemples
Définition
Identification du modèle
Pré-blanchiment
Corrélogramme croisé
Résidus
Résumé
Régression fallacieuse
Conclusion
Exemple

On cherche un modèle du type :

$$Y_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

Avec l'étape précédente, on connaît les degrés de Ω et Δ (et éventuellement la position des coef. nuls), et le décalage b.

Ensuite :

Calcul de la fonction de transfert

On revient aux séries (stationnaires) initiales :

$$Y_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + u_t$$

$\to$ Première estimation des coefficients de Ω et Δ

$\to$ ACF / PACF des résidus u_t.

Modèle ARMA sur les résidus stationnaires u_t

$\to$ Estimation de Θ et Φ et réestimation de Ω et Δ.

Résumé : identification et estimation

$$Y_t = \mu + \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t$$

1. Pré-blanchiment (*pré-filtrage* de X_t).

2. Corrélogramme croisé sur les séries préfiltrées.
Permet l'identification du retard et de la forme de la fonction de transfert.

3. Estimation de la fonction de transfert $\Omega(B)/\Delta(B)$ **et** identification/estimation du modèle ARMA $\Theta(B)/\Phi(B) \cdot \varepsilon_t$ sur les résidus u_t.

Remarque : bien sûr, vérifications habituelles de rigueur (résidus ε_t du modèle final = bruit blanc gaussien, paramètres significatifs, etc).

Remarque : régression fallacieuse

On a supposé les chroniques X_t et Y_t *stationnaires*.
→ et si ce n'est pas le cas ?

Exemple : soient X_t et Y_t intégrées d'ordre 1
(X_t et Y_t non stationnaires, $(1-B)X_t$ et $(1-B)Y_t$ stationnaires)

Alors $Y_t - aX_t - b = R_t$ est généralement aussi intégrée d'ordre 1.

→ si estimation de a, b par régression (moindres carrés des R_t) : les t-tests (Student) sont trop "optimistes"...
(car R_t n'est pas un b.b.g., mais une marche aléatoire ou un ARIMA(p,1,q), donc $\mathrm{Var}(\widehat{a}) \neq \sigma^2(X^TX)^{-1}$)

On parle de *régression fallacieuse* (*spurious regression*).

`http://tylervigen.com/spurious-correlations`

→ Pour contourner le problème, on « régresse » $(1-B)Y_t$ sur $(1-B)X_t$...

Séance 5

Modèles à variable exogène

Modèle à variable exogène et fonction de transfert :

$$Y_t = \mu + \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} X_{t-b} + u_t$$

Rappel : Modèle d'*intervention* :

$$X_t = \mu + \alpha I_t^{t_0} + u_t = \mu + \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} I_t^{t_0} + u_t$$

→ modèle similaire : $I_t^{t_0} \longleftrightarrow X_t$

avec $I_{t_0}(t)$ déterministe / (X_t) stochastique stationnaire.

Donc même procédure SAS, mais pas d'interprétation du corrélogramme croisé pour les modèles d'intervention, ni de pré-blanchiment.

Dernières séances...

- *30 mai 2017*. Petit cours (réponse aux questions) + TP d'application long.
  → venir à 8h30 en salle de cours.
- *6 juin 2017*. **Test**.
  → horaires inversés par rapport au Test 1, même salle (8h30-10h30 / 10h30-12h30)
  Vérifiez sur Arche !
  → fichiers personnels SAS autorisés.
- *13 juin 2017*. Les modèles ARCH et GARCH.
  → séance habituelle.

Exemple : série J de Box et Jenkins

Chronique d'entrée X_t : débit de gaz alimentant un appareil de chauffage.

Chronique de sortie Y_t : concentration en CO2.