Modélisation des séries temporelles

Séance 4

Modèles d'intervention

Frédéric Sur

https://members.loria.fr/FSur/enseignement/modseries/

Séance 4

Chronique avec tendance

1. Tendance « stochastique ».
Ex : marche aléatoire $X_{t+1} = X_t + \varepsilon_t$
avec (ε_t) bruit blanc.

→ on peut s'en sortir avec modèle ARIMA (différenciation)

De manière générale : $(1-B)^d X_t = \mu + v_t$
avec $\Phi(B) v_t = \Theta(B)\varepsilon_t$, ou $v_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$

2. Tendance « déterministe ».
Ex : $X_t = f(t) + u_t$
avec...

- $f(t) = a + bt$
- $f(t) = a + bt + ct^2$
- etc.

Tendance déterministe

$X_t = f(t) + u_t$ avec u_t stationnaire.

On estime (régression) les paramètres $a, b, c, \dots$ de f simultanément aux paramètres du modèle ARMA sur u_t.

- modèle ARMA :

$$X_t = f(t) + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$$

- ou modèle ARIMA si tendance stochastique additionnelle :

$$(1-B)^d X_t = (1-B)^d f(t) + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$$

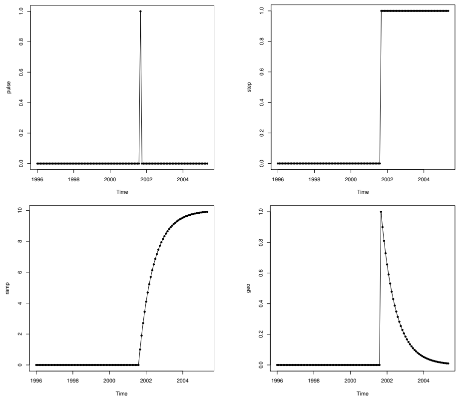
  autrement écrit :

$$X_t = f(t) + u_t \quad \text{avec } \Phi(B)(1-B)^d u_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

- ou SARIMA si saisonnalité...

Cas particulier

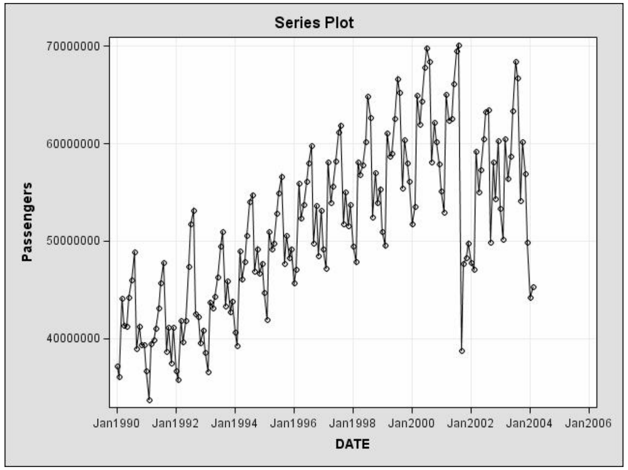
Intérêt : permet de traiter aussi les cas où $f(t) = \mu + \alpha I_t^{t_0}$ avec $I_t^{t_0}$ de la forme :



$\rightarrow$ Modèles d'**intervention**
(un « simple » SARIMA n'est pas adapté)

Questions : l'intervention est-elle significative ?
α est-il significativement non nul ? valeur de α ?

Exemple : trafic aérien aux USA

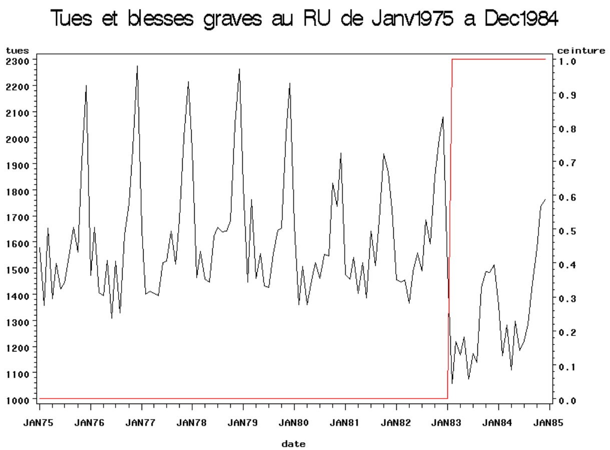


Trafic aérien aux États-Unis de janvier 1990 à décembre 2003.
Effet du 11 septembre 2001 ?

$\rightarrow$ quelle intervention ?

$\rightarrow$ quel est le nombre de passagers « perdus » ?

Exemple : effet d'une loi



Effet de la ceinture de sécurité obligatoire au 1er janvier 1983 ?

$\rightarrow$ effet significatif ?

$\rightarrow$ nombre de « vies sauvées » ?

Les modèles d'intervention

Problème des « ruptures de tendance » : la chronique n'est pas stationnaire, et ne peut pas être stationnarisée par dérivation.

$\rightarrow$ les *modèles d'intervention* permettent d'intégrer dans la modélisation un phénomène **ponctuel** (éventuellement avec effet long terme, pouvant s'atténuer avec le temps).

Exemples :

- changement de réglementation,
- événement climatique,
- grève,
- attentat...

Modèles d'intervention : méthodologie

Chronique : X_t Intervention : $I_t^{t_0}$

1. Dériver X_t pour la stationnariser, « à l'intervention près » (éventuellement dérivation saisonnière) ;
2. Même dérivation sur $I_t^{t_0}$;
3. Estimation (MCO) de $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\mu}$, et u_t stationnaire tel que :

$$(1-B)X_t = \widetilde{\mu} + \widetilde{\alpha}(1-B)I_t^{t_0} + u_t$$

(généralement $\widetilde{\mu}$ n'est pas significatif)

4. Identification d'un ARMA (SARMA) sur les résidus u_t :

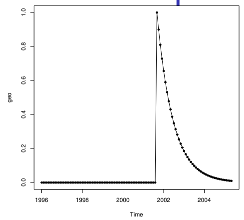
$$u_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t \quad \text{avec } \varepsilon_t \text{ b.b.g.}$$

$$\text{et : } \quad (1-B)X_t = \mu + \alpha(1-B)I_t^{t_0} + \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t$$

(réestimation (MCG) de α, μ dans ce modèle.)

Soit : $X_t = \alpha I_t^{t_0} + v_t$ où $\Phi(B)((1-B)v_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t$

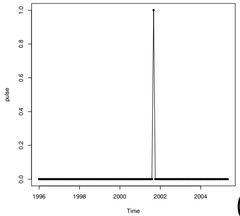
Intervention adaptée aux données



→ Comment adapter la vitesse de décroissance aux données ?

$X_t = \frac{\alpha}{1-\delta B} I_t^{t_0} + u_t$

avec : $0 < \delta < 1$ et $I_t^{t_0} =$



(« Dirac »)

d'où : $X_t = \alpha I_t^{t_0} + \alpha\delta I_{t-1}^{t_0} + \cdots + \alpha\delta^n I_{t-n}^{t_0} + \cdots + u_t$

Généralisation : $X_t = \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} I_t^{t_0} + u_t$, avec :

- $\Omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \ldots \omega_s B^s$ $(\alpha \leftrightarrow \omega_0)$
- $\Delta(B) = 1 - \delta_1 B - \ldots \delta_r B^r$

Vocabulaire : $\frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} =$ *fonction de transfert* (cf. séance 5)

Le modèle d'intervention général

Modèle final : $X_t = \dfrac{\Omega(B)}{\Delta(B)} I_t^{t_0} + R_t$

où les « résidus » R_t sont un processus SARIMA, i.e.,

$$\Phi_q(B)\Phi_Q(B^p)\left((1-B)^d(1-B^\pi)^D R_t - \mu\right) = \Theta_p(B)\Theta_P(B^p)\varepsilon_t$$

ou :

$$(1-B)^d(1-B^\pi)^D X_t = \mu + (1-B)^d(1-B^\pi)^D \frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} I_t^{t_0} + \frac{\Theta_q(B)\Theta_Q(B^p)}{\Phi_p(B)\Phi_P(B^p)}\varepsilon_t$$

→ $\frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} I_t^{t_0}$ représente dans le modèle la perturbation sur X_t due à l'événement à t_0.

→ *cas simple* : $\frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} = \alpha$ (constante)

ou $\frac{\Omega(B)}{\Delta(B)} = \frac{\alpha}{1-\delta B}$ avec $I_t^{t_0} =$ « Dirac ».

Séance 4

Exemple R

Chronique ozone

→ pollution moyenne mensuelle dans la ville de Los Angeles de 1955 à 1972.

→ une loi imposant le pot d'échappement catalytique a été appliquée à partir de janvier 1960

→ cette loi a-t-elle un impact significatif ?
si oui, pour quelle diminution de la pollution ?

Séance 4

Conclusion

Modèle d'*intervention* :

$$X_t = \alpha I_t^{t_0} + R_t$$

avec R_t = processus SARIMA.

→ pour prendre en compte une *rupture de tendance* dans la chronique

→ permet de mesurer la significativité de l'impact d'un événement donné sur une chronique
(et de quantifier l'impact)

→ cas particulier de $X_t = f_\alpha(t) + R_t$