Modélisation des séries temporelles

Séance 6

Modèles ARCH et GARCH

Frédéric Sur

https://members.loria.fr/FSur/enseignement/modseries/

Séance 7

Rappel

Modélisation ARMA d'un processus stationnaire :

$$X_t = m + \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)}\varepsilon_t$$

avec (ε_t) bruit blanc **gaussien**.

→ *hypothèse de gaussianité.*
Important pour : validité intervalles de confiance, maximum de vraisemblance, espérance conditionnelle vue comme un projecteur linéaire...

et : **non-corrélation** $\Longrightarrow$ **indépendance**.

Les processus ARMA gaussiens

$$X_t = m + \frac{\Phi(B)}{\Theta(B)}\varepsilon_t = m + \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

avec (ε_t) bruit blanc **gaussien**.

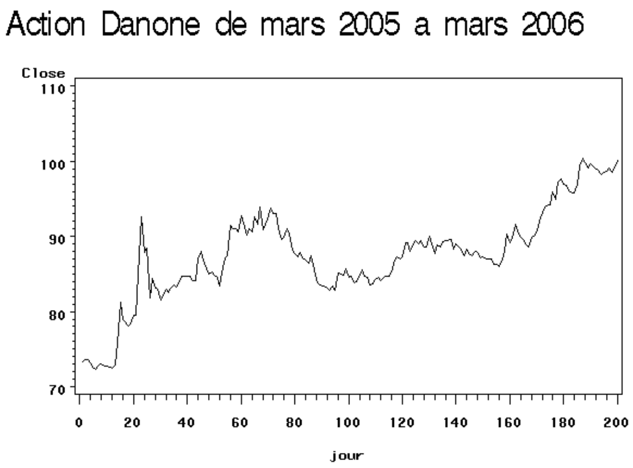
→ sous-classe des processus stationnaires : processus linéaires gaussiens (stationnaires).

En particulier :

- Kurtosis : $\forall t,\ \kappa(X_t) = \text{Cste} = 3$
- Skewness : $\forall t,\ s(X_t) = \text{Cste} = 0$.

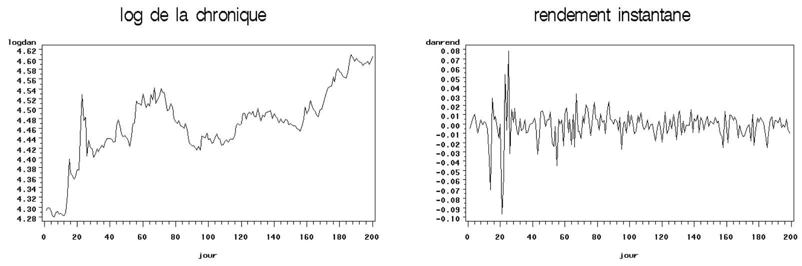
→ la distribution des (X_t) est aussi « plate » que la gaussienne, et symétrique.

Exemple : cours de l'action Danone (1)



$\rightarrow$ non stationnaire.

Exemple : cours de l'action Danone (2)



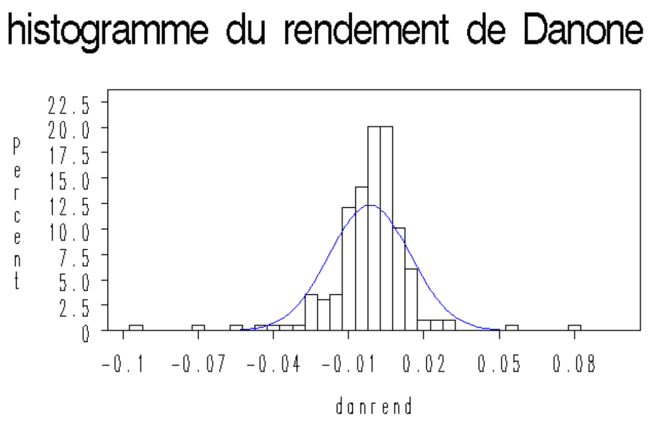
Rendement instantané (*return*) : $r_t = \nabla \log(X_t)$.

Analogie avec actif non-risqué et temps continu :
$dX = X \cdot r \cdot dt$ donc $X(t) = X_0 e^{rt}$ et $\nabla \log(X(t)) = r$.

Observations sur la distribution des r_t :

- périodes de *forte volatilité* $\rightarrow$ distribution « aplatie » ;
- volatilité plus faible à la hausse qu'à la baisse ?
  $\rightarrow$ asymétrie par rapport à la valeur moyenne.

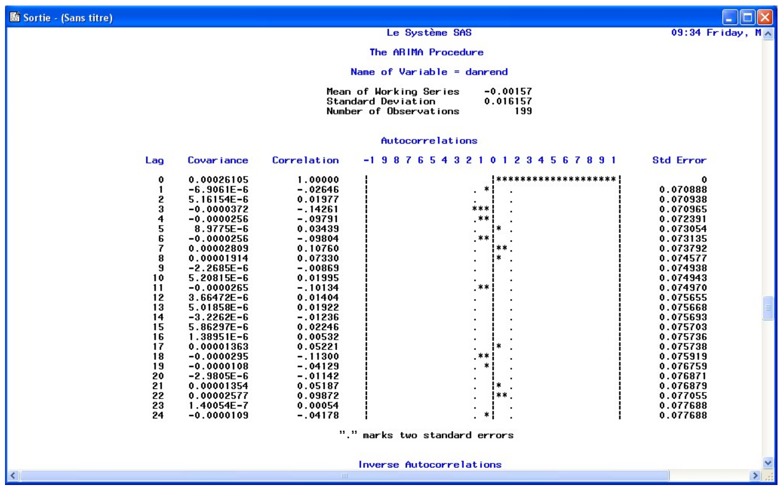
Exemple : cours de l'action Danone (3)



Distribution à **queue épaisse** : Kurtosis $\simeq$ 10.48
Asymétrie : Skewness $\simeq$ -1.00

Remarque : contradictoire avec modèle ARMA Gaussien pour (r_t).

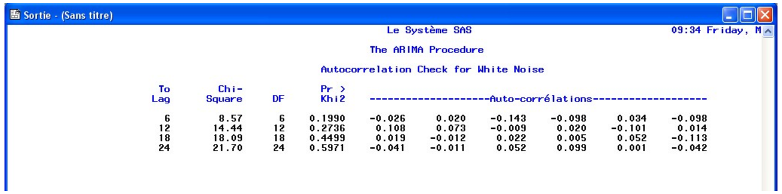
Exemple : cours de l'action Danone (4)



```
Sortie - (Sans titre)
                         Le Système SAS                         09:34 Friday, M
                       The ARIMA Procedure
                  Name of Variable = danrend

            Mean of Working Series    -0.00157
            Standard Deviation        0.016157
            Number of Observations         199

                        Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

  0    0.00026105        1.00000    |                    |********************|             0
  1    -6.9061E-6        -.02646    |                  . *|  .                 |      0.070888
  2    5.16154E-6        0.01977    |                  .  |  .                 |      0.070938
  3    -0.0000372        -.14261    |                  ***|  .                 |      0.070965
  4    -0.0000256        -.09791    |                  .**|  .                 |      0.072391
  5     8.9775E-6        0.03439    |                  .  |* .                 |      0.073054
  6    -0.0000256        -.09804    |                  .**|  .                 |      0.073135
  7    0.00002809        0.10760    |                  .  |**.                 |      0.073792
  8    0.00001914        0.07330    |                  .  |* .                 |      0.074577
  9    -2.2685E-6        -.00869    |                  .  |  .                 |      0.074938
 10    5.20815E-6        0.01995    |                  .  |  .                 |      0.074943
 11    -0.0000265        -.10134    |                  .**|  .                 |      0.074970
 12    3.66472E-6        0.01404    |                  .  |  .                 |      0.075655
 13    5.01858E-6        0.01922    |                  .  |  .                 |      0.075668
 14    -3.2262E-6        -.01236    |                  .  |  .                 |      0.075693
 15    5.86297E-6        0.02246    |                  .  |  .                 |      0.075703
 16    1.38951E-6        0.00532    |                  .  |  .                 |      0.075736
 17    0.00001363        0.05221    |                  .  |* .                 |      0.075738
 18    -0.0000295        -.11300    |                  .**|  .                 |      0.075919
 19    -0.0000108        -.04129    |                  . *|  .                 |      0.076759
 20    -2.9805E-6        -.01142    |                  .  |  .                 |      0.076871
 21    0.00001354        0.05187    |                  .  |* .                 |      0.076879
 22    0.00002577        0.09872    |                  .  |**.                 |      0.077055
 23    1.40054E-7        0.00054    |                  .  |  .                 |      0.077688
 24    -0.0000109        -.04178    |                  . *|  .                 |      0.077688

                   "." marks two standard errors

                   Inverse Autocorrelations
```

ACF du rendement : bruit blanc gaussien ?

Exemple : cours de l'action Danone (5)



Le Système SAS — 09:34 Friday, M

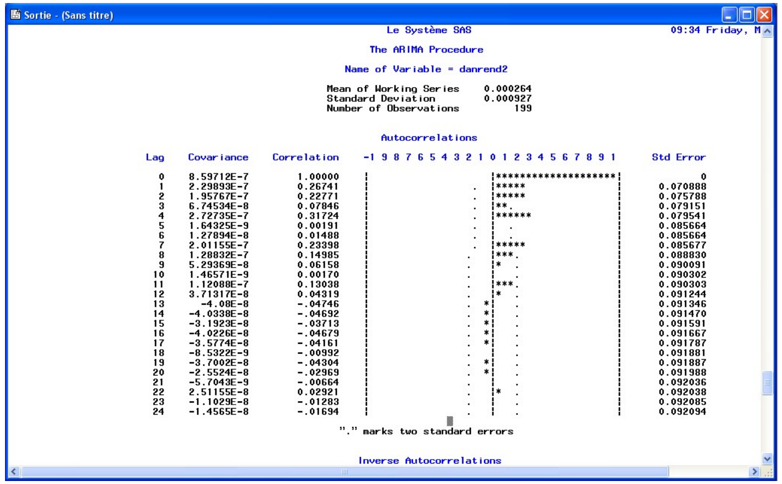
The ARIMA Procedure

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > Khi2	Auto-corrélations					
6	8.57	6	0.1990	-0.026	0.020	-0.143	-0.098	0.034	-0.098
12	14.44	12	0.2736	0.108	0.073	-0.009	0.020	-0.101	0.014
18	18.09	18	0.4499	0.019	-0.012	0.022	0.005	0.052	-0.113
24	21.70	24	0.5971	-0.041	-0.011	0.052	0.099	0.001	-0.042

Portmanteau du rendement : bruit blanc gaussien ?

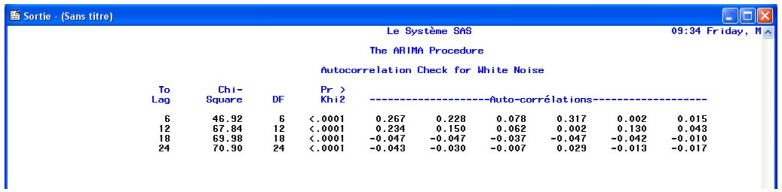
Exemple : cours de l'action Danone (6)



```
                         Le Système SAS                       09:34 Friday, M

                      The ARIMA Procedure

                 Name of Variable = danrend2

               Mean of Working Series    0.000264
               Standard Deviation        0.000927
               Number of Observations         199

                        Autocorrelations

Lag  Covariance    Correlation  -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1   Std Error

  0  8.59712E-7      1.00000    |                    |********************|          0
  1  2.29893E-7      0.26741    |                  . |*****               |   0.070888
  2  1.95767E-7      0.22771    |                  . |*****               |   0.075788
  3  6.74534E-8      0.07846    |                  . |**.                 |   0.079151
  4  2.72735E-7      0.31724    |                  . |******              |   0.079541
  5  1.64325E-9      0.00191    |                  . |  .                 |   0.085664
  6  1.27894E-8      0.01488    |                  . |  .                 |   0.085664
  7  2.01155E-7      0.23398    |                  . |*****               |   0.085677
  8  1.28832E-7      0.14985    |                .   |***.                |   0.088830
  9  5.29369E-8      0.06158    |                .   |*  .                |   0.090091
 10  1.46571E-9      0.00170    |                .   |   .                |   0.090302
 11  1.12088E-7      0.13038    |                .   |***.                |   0.090303
 12  3.71317E-8      0.04319    |                .   |*  .                |   0.091244
 13    -4.08E-8      -.04746    |                .  *|   .                |   0.091346
 14  -4.0338E-8      -.04692    |                .  *|   .                |   0.091470
 15  -3.1923E-8      -.03713    |                .  *|   .                |   0.091591
 16  -4.0226E-8      -.04679    |                .  *|   .                |   0.091667
 17  -3.5774E-8      -.04161    |                .  *|   .                |   0.091787
 18  -8.5322E-9      -.00992    |                .   |   .                |   0.091881
 19  -3.7002E-8      -.04304    |                .  *|   .                |   0.091887
 20  -2.5524E-8      -.02969    |                .  *|   .                |   0.091988
 21  -5.7043E-9      -.00664    |                .   |   .                |   0.092036
 22  2.51155E-8      0.02921    |                .   |*  .                |   0.092038
 23  -1.1029E-8      -.01283    |                .   |   .                |   0.092085
 24  -1.4565E-8      -.01694    |                .   |   .                |   0.092094

                     "." marks two standard errors

                     Inverse Autocorrelations
```

Mais : ACF du rendement **au carré**.
$\rightarrow$ présence d'autocorrélation. . .

Exemple : cours de l'action Danone (7)



Le Système SAS — 09:34 Friday, M

The ARIMA Procedure

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > Khi2	Auto-corrélations					
6	46.92	6	<.0001	0.267	0.228	0.078	0.317	0.002	0.015
12	67.84	12	<.0001	0.234	0.150	0.062	0.002	0.130	0.043
18	69.98	18	<.0001	-0.047	-0.047	-0.037	-0.047	-0.042	-0.010
24	70.90	24	<.0001	-0.043	-0.030	-0.007	0.029	-0.013	-0.017

. . .confirmé par Portmanteau du rendement **au carré**.
$\rightarrow$ rejet de l'hypothèse de bruit blanc gaussien pour r_t^2.

Conclusion : r_t^2 non indépendants (car présence de corrélations), donc r_t non plus
$\rightarrow$ a fortiori r_t n'est pas un b.b. gaussien
(même si absence de corrélations).

Propriétés générales des séries financières

- les chroniques financières ne sont pas stationnaires ;
- les rendements r_t sont stationnaires ;
- kurtosis > 3 : distribution *leptokurtique* ;
  (queue de distribution épaisse)
- skewness < 0 (en tout cas $\neq 0$) : asymétrie ;
- présence de *clusters* de volatilité ;
- les ACF et Portmanteau des rendements font penser à un bruit blanc ;
- mais autocorrélations pour le carré du rendement.

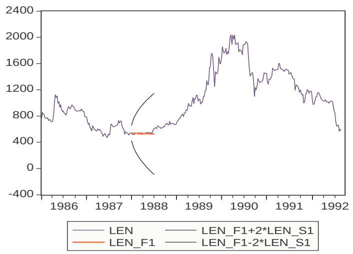
Conclusion : modèle ARMA-Gaussien pas adapté.

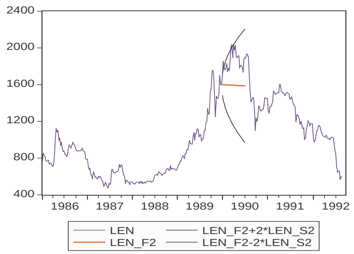
Évaluation de l'incertitude de la prévision

Remarque : avec un modèle à volatilité constante, l'incertitude de la prévision est...

- *surestimée* dans les périodes de volatilité faible,
- *sous-estimée* dans les périodes de volatilité forte.

Exemple : (cours d'action)





(source : Johannes Kepler Universität Linz 2007)

→ problème pour la couverture des risques...

Benoît Mandelbrot (1924-2010)

entretien *Le Monde*, octobre 2009

Dans votre livre, vous dites que "la finance doit abandonner ses mauvaises habitudes et adopter une démarche scientifique". Or il a été dit que la crise était en partie due aux mathématiques financières, avec lesquelles on avait conçu des produits trop sophistiqués dont personne ne mesurait les risques. Qu'en pensez-vous ?

Les gens ont pris une théorie inapplicable - celle de Merton, Black et Scholes, issue des travaux de Bachelier qui datent de 1900 -, et qui n'avait aucun sens. Je l'ai proclamé depuis 1960. Cette théorie ne prend pas en compte les changements de prix instantanés qui sont pourtant la règle en économie. Elle met des informations essentielles sous le tapis. Ce qui fausse gravement les moyennes. Cette théorie affirme donc qu'elle ne fait prendre que des risques infimes, ce qui est faux. Il était inévitable que des choses très graves se produisent. Les catastrophes financières sont souvent dues à des phénomènes très visibles, mais que les experts n'ont pas voulu voir. Sous le tapis, on met l'explosif !

Merton & Scholes : Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel 1997

Séance 7

Le modèle ARCH (1982 : Robert Engle - Nobel 2003)

Nouveau modèle (non linéaire) pour les chroniques stationnaires, davantage adapté à la modélisation stochastique des séries financières.

Définition : ARCH(p)

(X_t) est un processus ARCH(p) s'il vérifie :

$$X_t = \sqrt{h_t}\, \varepsilon_t$$

avec $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2$, où

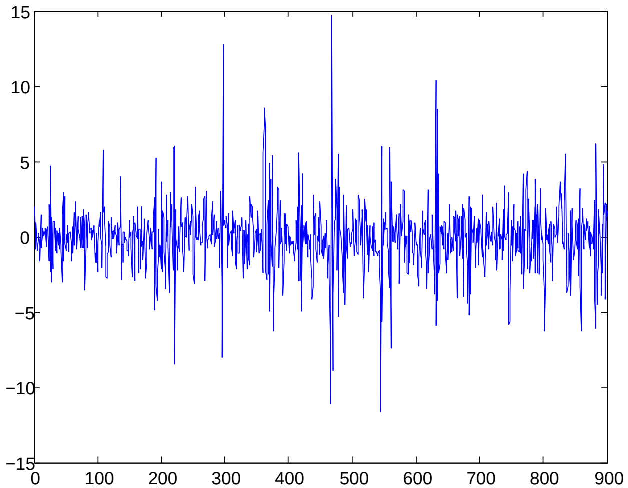
- $\forall i,\ a_i \geqslant 0$,
- (ε_t) b. b. gaussien $\mathcal{N}(0,1)$.

Apport : changements de volatilité (h_t) prédits par les valeurs passées de la chroniques.

→ ne sont pas (uniquement) dus à des causes exogènes...

Exemple de simulation

ARCH(1), $a_1 = 0.9$



ARCH : propriétés (cf poly)

$X_t = \sqrt{h_t}\,\varepsilon_t$ avec : $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2$

Propriété des ARCH(1) stationnaires (idem pour ARCH(p))

Variance : $\mathrm{Var}(X_t) = a_0/(1-a_1)$
Variance conditionnelle : $\mathrm{Var}(X_t|X_{t-1}) = h_t = a_0 + a_1 X_{t-1}^2$
Kurtosis : $\kappa = 3(1-a_1^2)/(1-3a_1^2)$
$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\sqrt{h_t}) \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ (variables décorrélées)
si $s > t$ alors
$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}(\sqrt{h_t}\varepsilon_t\sqrt{h_s}\varepsilon_s) = \mathbb{E}(\sqrt{h_t}\varepsilon_t\sqrt{h_s}) \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_s) = 0.$

Remarques :

- ARCH = *autoregressive conditional heteroscedasticity*,
- Variance conditionnelle croissante avec les valeurs passées de X_t^2.
- bien sûr, non-conditionnellement homoscédastique,
- Kurtosis > 3,
- processus ARCH = bruit blanc faible (non gaussien). (*attention* : non-corrélation mais pas indépendance)

Identification de l'ordre

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t \quad \text{avec : } h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2$$

Propriété : ARCH(p) et processus AR(p)

Soit (X_t) ARCH(p) stationnaire t.q. (X_t^2) stationnaire.
Alors (X_t^2) est un processus AR(p) :

$$X_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2 + Z_t$$

où $Z_t = (\varepsilon_t^2 - 1)h_t$ est un *bruit blanc faible (non-gaussien)*.

Justification : $\mathbb{E}(Z_t) = 0$, et si $s > t$:
$\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s) = \mathbb{E}((\varepsilon_t^2-1)h_t(\varepsilon_s^2-1)h_s) = \mathbb{E}((\varepsilon_t^2-1)h_t h_s)\mathbb{E}(\varepsilon_s^2-1) = 0$
$\mathrm{Var} Z_t = E((\varepsilon_t^2-1)^2 h_t^2) = \mathrm{Cste}$

Conclusion : pour identifier p, on regarde PACF de (X_t^2).

Remarque : attention, I.C. donné sous hypothèse gaussienne...

Test (d'absence) d'effet ARCH

Question : les (X_t) étant non-corrélés, y-a-t'il intérêt à utiliser un modèle ARCH ?
Réponse : si les (X_t^2) sont corrélés, **oui**.

Test d'effet ARCH :
(*Q-Test* dans `arch.test` de `aTSA`)

Hypothèse $\mathcal{H}_0$: indépendance des (X_t^2), normaux.

Portmanteau sur (X_t^2) : suit une loi du χ^2 sous $\mathcal{H}_0$.

si p-valeur $< 5\%$: *rejet de l'indépendance des* X_t^2.
(donc des X_t)

$\rightarrow$ les (X_t^2) peuvent être corrélés, (X_t) peut suivre un ARCH.

Test de Jarque-Bera

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

où (ε_t) i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad (\mathcal{H}_0)$.

Test de Jarque-Bera sur les ε_t :
(cf `garchFit` de `fGarch`)

$$JB = T\left(\frac{s^2}{6} + \frac{(\kappa-3)^2}{24}\right)$$

suit (asymptotiquement) un χ^2 à deux degrés de liberté sous hypothèse $(\mathcal{H}_0)$.

Séance 7

Le modèle GARCH (1986 : Tim Bollerslev)

Rappel : ARCH $X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$ avec : $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2$

Définition **: GARCH(p,q)**

(X_t) est un processus GARCH(p,q) s'il vérifie :

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

avec $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j h_{t-j}$, où

- $\forall i,\ a_i, b_j \geqslant 0$,
- (ε_t) b. b. gaussien $\mathcal{N}(0,1)$ indépendant du passé de X_t.

$\rightarrow$ introduction d'une partie autorégressive pour modéliser un processus "ARCH($+\infty$)".

Intérêt : « persistance » de la volatilité, « mémoire longue ».

Identification de l'ordre

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t \text{ avec } h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j h_{t-j}$$

Propriété **: GARCH(p,q) et ARMA(max(p,q),p)**

Soit (X_t) GARCH(p,q) stationnaire t.q. (X_t^2) stationnaire.
Alors (X_t^2) est un processus ARMA(max(p,q),q) :

$$X_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (a_i + b_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{q} b_j Z_{t-j} + Z_t$$

où Z_t $(= X_t^2 - h_t)$ est un bruit blanc faible (non gaussien).

$\rightarrow$ identification de p et q sur ACF/PACF de (X_t^2).

Remarque : ne suffit bien sûr pas.
$\rightarrow$ comparer les σ et AIC/SBC de différents modèles...

Modèles de régression à erreur GARCH

Rappels :

- Régression linéaire (multiple) :

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i Y_t^i + Z_t$$

- Modèle autorégressif (AR(p)) :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + Z_t$$

- ARMA(p,q) :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + Z_t + \sum_{i=1}^{q} \psi_i Z_{t-i}$$

Jusque maintenant (cours régression & séries chrono.) : résidus Z_t bruit blanc gaussien (i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

Raffinement : modèles AR ou GARCH sur les résidus.
$\rightarrow$ permet de généraliser la régression au cadre des **résidus autocorrélés**, ou **conditionnellement hétéroscédastiques**.

Séance 7

Conclusion

> *A major contribution of the ARCH literature is the finding that apparent changes in the volatility of economic time series may be predictable and result from a specific type of nonlinear dependence rather than exogenous structural changes in variables.*

Berra & Higgins 1993

> *Financial decisions are generally based upon the tradeoff between risk and return ; the econometric analysis of risk is therefore an integral part of asset pricing, portfolio optimization, option pricing and risk management. This paper has presented an example of risk measurement that could be the input to a variety of economic decisions. The analysis of ARCH and GARCH models and their many extensions provides a statistical stage on which many theories of asset pricing and portfolio analysis can be exhibited and tested.*

Engle 2001