De la photographie numérique à la photographie computationnelle

Séance 4

Quantification et échantillonnage

Frédéric SUR

École des Mines de Nancy
LORIA

`https://members.loria.fr/FSur/enseignement/photo/`

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Quantification et échantillonnage

Signal physique (onde lumineuse, onde sonore) : variation d'une grandeur physique (éclairement, pression) en temps et/ou espace

Contraintes de la **représentation informatique** :

- le temps d'un processeur est discret ;
- les mesures doivent être représentées par un nombre fini de bits.

Signal discret : une suite de 0-1.

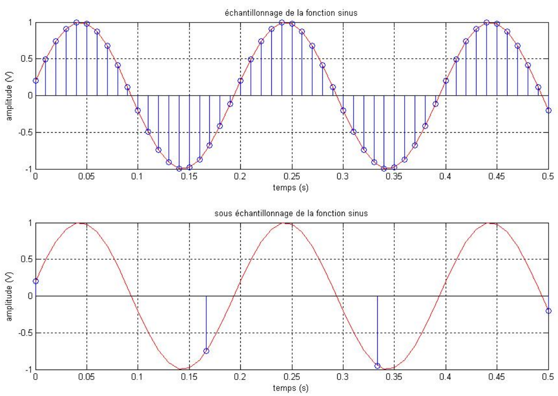
Conversion Analogique $\rightarrow$ Numérique = échantillonnage + quantification

Problème inverse : conversion N/A (DAC)

Question : perte d'information ?

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Exemple d'échantillonnage



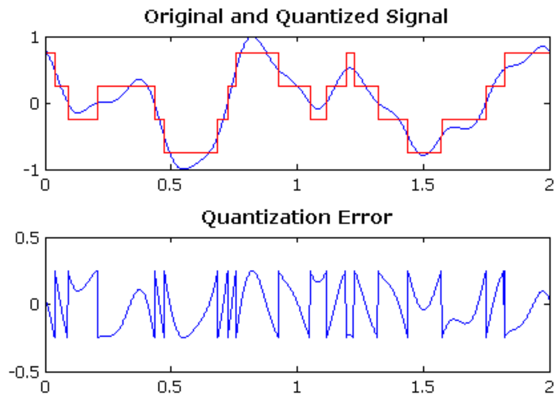
Remarque : la fréquence d'échantillonnage doit être adaptée au signal à numériser...

Son qualité CD : 44.1 kHz (44100 échantillons par seconde)

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Exemple de quantification

$\rightarrow$ exemple de quantification sur 2 bits :



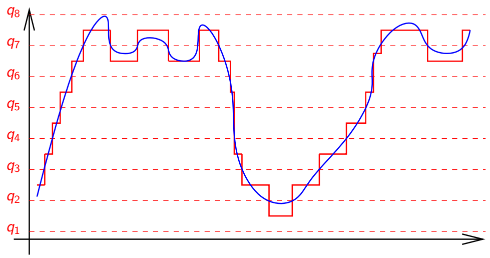
Source : en.wikipedia.org

Son qualité CD : 16 bits
Niveaux de gris dans une image : 8 bits
(mais "thirty shades of gray"...)

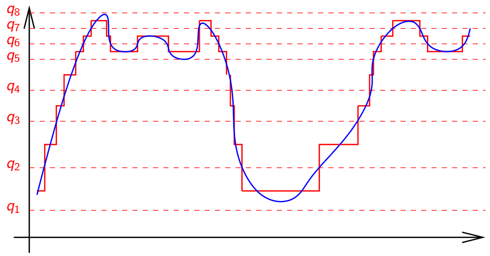
Séance 4

1. Quantification
2. Théorie de l'échantillonnage
   - Spectre d'un signal échantillonné
   - Théorème d'échantillonnage de Shannon
   - Cas d'un nombre fini d'échantillons
3. Conséquences pratiques
   - Son numérique
   - Image numérique
4. Conclusion

La quantification



quantification uniforme



quantification adaptée

→ Intervalles de *quantification* et niveaux de *reconstruction*.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Bruit de quantification

Bruit de quantification : e = différence entre signal source et signal quantifié.

Modélisation dans le cas de la quantification uniforme : erreur de quantification uniformément distribuée sur $[-\delta_q/2, \delta_q/2]$

$$\mathrm{Var}(e) = \int_{-\delta_q/2}^{\delta_q/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{\delta_q^3}{12}$$

Remarque : dans le cas où on connaît la distribution de probabilité du signal source, le quantifieur (adaptatif) optimal est donné par l'*algorithme de Lloyd-Max*.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

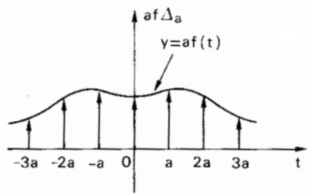
Séance 4

1. Quantification
2. Théorie de l'échantillonnage
   - Spectre d'un signal échantillonné
   - Théorème d'échantillonnage de Shannon
   - Cas d'un nombre fini d'échantillons
3. Conséquences pratiques
   - Son numérique
   - Image numérique
4. Conclusion

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Échantillonnage

≪ Bon cadre ≫ : espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$.



Échantillonnage de f (distrib. tempérée "assez régulière") toutes les a "secondes" représenté par la distribution :

$\widetilde{f}_a = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)\delta_{na} \quad (= f \cdot a\Delta_a)$

$\left(\text{car } a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na)\delta_{na} \xrightarrow{\mathcal{S}'} f \ \text{ si } a \to 0 \right)$

Question : Lien entre $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(\widetilde{f}_a) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi nay}$?

(et la TFD si nombre fini d'échantillons ?)

Signaux à bande limitée et formule de Poisson

Définition - Signal à bande limitée

Soit $f \in \mathcal{S}'$ t.q. $\mathcal{F}(f)$ est à support compact $\subset [-\lambda_c, \lambda_c]$.
(f n'a pas de fréquence supérieure à une fréquence limite λ_c)

On dit que f est à *bande limitée*.

Proposition - Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in \mathcal{S}'$ à bande limitée.

$$\mathcal{F}(\widetilde{f}_a)(y) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi nay} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(y - \frac{n}{a}\right)$$

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Conséquence de la formule de Poisson

Soit f signal à bande limitée, échantillonné au pas de a.

Formule de Poisson :

$$\mathcal{F}(\widetilde{f}_a)(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(y - \frac{n}{a}\right)$$

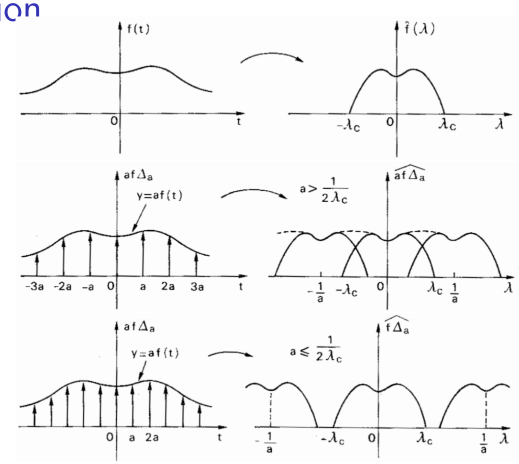
Conséquences :

$\rightarrow$ Spectre de $\widetilde{f}_a$ périodique de période $1/a$.

$\rightarrow$ Spectre obtenu en faisant la somme des translatés de $\mathcal{F}(f)$ au pas n/a.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Illustration



Source : C. Gasquet & P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, Masson 1990.

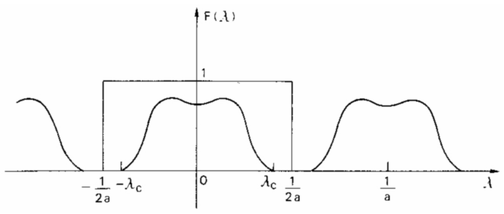
Définition - Fréquence de Nyquist

$2\lambda_c$ est la *fréquence de Nyquist*.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Vers le théorème de Shannon

Soit f un signal à bande limitée t.q. $1/a > 2\lambda_c$.



Formule de Poisson :

$$\mathcal{F}(\widetilde{f_a})(\lambda) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi n a \lambda} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(\lambda - \frac{n}{a}\right)$$

Soit χ_a l'indicatrice du segment $[-1/2a, 1/2a]$:

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\chi_a(\lambda) e^{-2i\pi n a \lambda}.$$

Théorème de Shannon

Théorème d'échantillonnage de Shannon (-Nyquist)

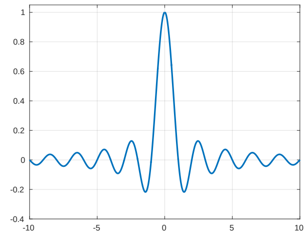
$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\lambda_c, \lambda_c]$, et $\frac{1}{a} \geqslant 2\lambda_c$

Alors

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) \operatorname{sinc}\left(\frac{x - na}{a}\right)$$

(dans L^2)

Rappel : $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
(sinus cardinal)



De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Considérations pratiques

Interprétation :
si on échantillonne un signal (à bande limitée) à une fréquence supérieure au double de sa plus grande fréquence, alors on peut le reconstruire de manière exacte !

Problème pratique : pas *réalisable*

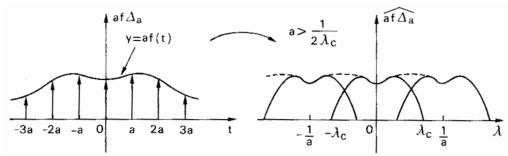
Question : que se passe-t-il si le signal contient des fréquences supérieures à $1/2a$?

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Recouvrement de spectre ou *aliasing*

Remarque : reconstruction $\Leftrightarrow$ multiplication par χ_a dans le domaine de Fourier

Si $\frac{1}{a} < 2\lambda_c$ ...



$\rightarrow$ Phénomène de *recouvrement / repliement de spectre* dans les hautes fréquences, ou *aliasing* (*alias* = à un autre endroit), ou *aliasage*.
$\rightarrow$ Reconstruction très perturbée (exemples en TP).

Solution technologique : filtrage du signal analogique *avant* échantillonnage pour éliminer les fréquences $> 1/2a$.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Retour sur la Transformée de Fourier Discrète

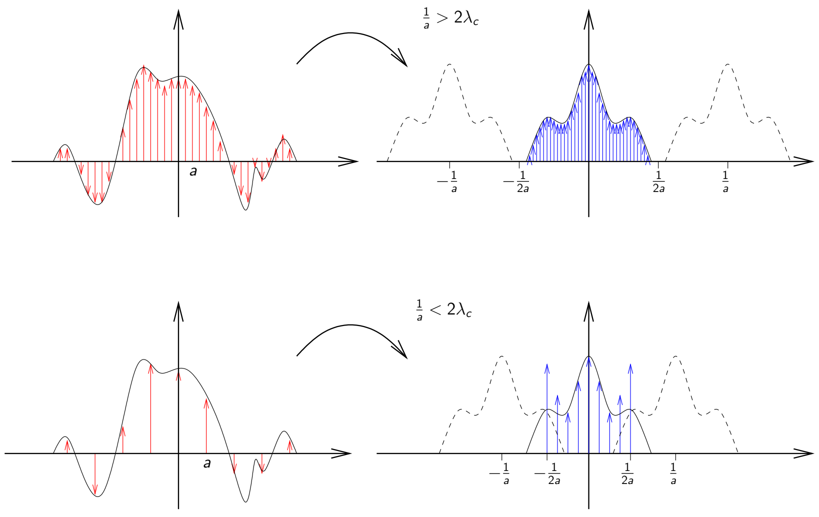
Nombre **fini** N d'échantillons :
$x_n = f(na)$ $(\Leftrightarrow f$ périodique$)$, (X_n) TFD de (x_n)
(a= intervalle d'échantillonnage ; période de f : Na).

On calcule (conséquence de la formule de Poisson) :

$$\mathcal{F}\left(\widetilde{f_a}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k \delta_{k/(Na)}$$

Aliasing discret

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion



Séance 4

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Numérisation Compact Disc

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Oreille humaine sensible aux fréquences < 20000 Hz

Donc, pour la numérisation du son :

1. filtrage passe-bas, coupure à 20000 Hz.
2. numérisation par échantillonnage à 2 × 20000 Hz
$\longrightarrow$ *44.1 kHz*

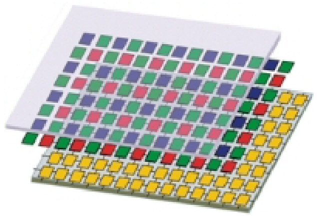
Pourquoi 44.1 kHz ? (et pas 40 kHz ?)

source : `en.wikipedia.org/wiki/Compact_disc`

1. conversion numérique → analogique par fonction à décroissance plus rapide que le sinus cardinal, d'où des fonctions de coupure moins raides que le créneau.
(d'autant moins que CNA/DAC bon marché)
Donc fréq. échantillonnage > 40 kHz.
2. initialement, enregistrement sur cassette vidéo.
6 échantillons par ligne x 294 lignes (PAL) x 50 demi-images/sec → 88 200 éch. par seconde (stéréo)

Photographie numérique

Capteur appareil photo numérique :



Échantillonnage, donc aliasing sur les zones de l'image présentant des détails de haute fréquence.
→ nécessité de placer un filtre passe-bas devant le capteur (ou une optique peu "piquée")
→ . . .ou "course aux mégapixels" : capteur de résolution supérieure à la meilleure optique (limitée de toute façon par la diffraction).

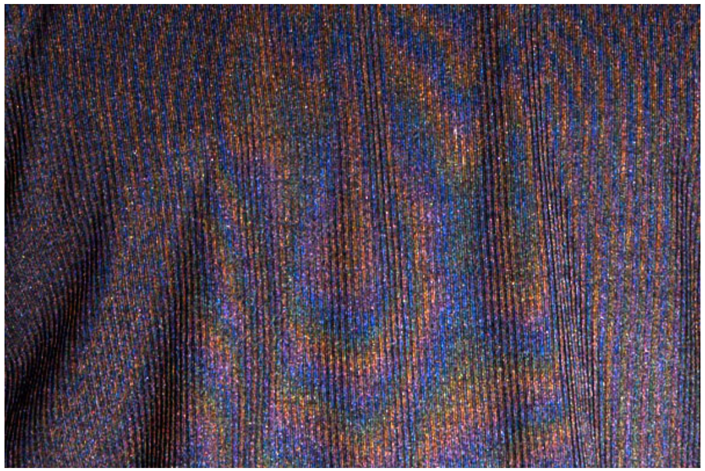
Compromis filtre passe-bas / aliasing.

Exemple d'aliasing (réel) (1)

Canon EOS 1Ds

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Exemple d'aliasing (réel) (2)



Canon EOS 5D
cf *Moiré*
`http://dpanswers.com/content/tech_defects.php`

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Exemple d'aliasing (réel) (3)

Sigma SD10 (capteur Foveon)
`http://dpanswers.com/content/tech_defects.php`

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4
F. Sur - ENSMN
Quantification
Théorie de l'échantillonnage
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Cas d'un nombre fini d'échantillons
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Séance 4

Conclusion

Propriété fondamentale
du traitement des signaux numériques :

$\rightarrow$ un signal à bande limitée peut être représenté par un signal discret « sans perte d'information » s'il est échantillonné à une fréquence supérieure au double de sa plus haute fréquence.

$\rightarrow$ sinon apparition de perturbations dues à l'aliasing / repliement de spectre.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle Séance 4

F. Sur - ENSMN

Quantification

Théorie de l'échantillonnage

Spectre d'un signal échantillonné

Théorème d'échantillonnage de Shannon

Cas d'un nombre fini d'échantillons

Conséquences pratiques

Son numérique

Image numérique

Conclusion