De la photographie numérique à la photographie computationnelle

Séance 5

Compression sans perte

Frédéric Sur

École des Mines de Nancy
Loria

`https://members.loria.fr/FSur/enseignement/photo/`

Position du problème

Signaux considérés :
signaux discrets = suites de symboles dans un alphabet de taille K : $\{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$.

Exemple : des textes écrits en français
(alphabet classique, symboles = lettres)

Question du jour : comment représenter informatiquement chaque symbole ?

. . . si possible en occupant le moins d'espace mémoire / disque.

Codage à taille fixée

Première idée : même nombre de bits pour chaque symbole.
Exemple : ASCII (1961), codage sur 7 bits.

Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char	Dec	Hex	Char
0	00	Null	32	20	Space	64	40	@	96	60	`
1	01	Start of heading	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	02	Start of text	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	03	End of text	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	04	End of transmit	36	24	$	68	44	D	100	64	d
5	05	Enquiry	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	06	Acknowledge	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	07	Audible bell	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	08	Backspace	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	09	Horizontal tab	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	Line feed	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	Vertical tab	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	Form feed	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	Carriage return	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	Shift out	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	Shift in	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	Data link escape	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	Device control 1	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	Device control 2	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	Device control 3	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	Device control 4	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	Neg. acknowledge	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	Synchronous idle	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	End trans. block	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	Cancel	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	End of medium	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	Substitution	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	Escape	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	File separator	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	|
29	1D	Group separator	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	Record separator	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	Unit separator	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	□

Codage à taille variable

Idée plus évoluée : codes plus courts pour les symboles plus fréquents.

But : diminuer la longueur moyenne des signaux codés.

Exemple : le code Morse (Samuel Morse, 1835)

A	.-	M	--	Y	-.--	6	-....
B	-...	N	-.	Z	--..	7	--...
C	-.-.	O	---	Ä	.-.-	8	---..
D	-..	P	.--.	Ö	---.	9	----.
E	.	Q	--.-	Ü	..--	.	.-.-.-
F	..-.	R	.-.	Ch	----	,	--..--
G	--.	S	...	0	-----	?	..--..
H	....	T	-	1	.----	!	..--.
I	..	U	..-	2	..---	:	---...
J	.---	V	...-	3	...--	“	.-..-.
K	-.-	W	.--	4	....-	‘	.----.
L	.-..	X	-..-	5	.....	=	-...-

Le décodage

Hypothèse : le codage est fait en binaire.

Problème : comment décoder ?

Codage de longueur fixée → immédiat (bloc à bloc).
Mais pour le codage de longueur variable ?

Exemple : codage d'un alphabet à quatre symboles :

a	b	c	d
0	10	110	101

À quel mot correspond 1010 ?

Solution possible : séparation par un caractère spécial (cf Morse)

→ pas intéressant si on veut *compresser*...

Notion de code préfixe

Solution bis : imposer que le codage d'un symbole ne soit le *préfixe* d'aucun autre.

Dans l'exemple précédent :

a	b	c	d
0	10	110	101

b préfixe de d → non-unicité du décodage.

Exemple de code préfixe :

a	b	c	d
0	10	110	111

À quoi correspond 101100 ?

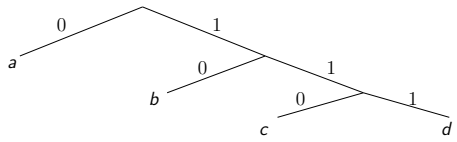
Remarque : le code Morse n'est pas un code préfixe, mais est plus *robuste aux erreurs de transmission*.

Représentation des codes préfixes

Proposition

Code préfixe $\Longleftrightarrow$ code des feuilles d'un arbre binaire.

a	b	c	d
0	10	110	111



Décodage de 1001001101110 ?

→ notion de décodage *instantané*.

Remarque : longueur l_k du mot binaire w_k codant le symbole x_k = *profondeur* de la feuille dans l'arbre.

Codes préfixes et compression

Donnée : alphabet de K symboles x_k, probabilités p_k.

But : construire un code préfixe qui minimise la longueur moyenne de codage d'un symbole

$$R(X) = \sum_{k=1}^{K} l_k p_k \quad (= \mathbb{E}(L))$$

avec l_k longueur du mot binaire w_k codant le symbole x_k.

Intérêt : la longueur moyenne du codage d'un texte de N symboles est $N.R(X)$.

→ équivaut à construire un **arbre binaire** à k feuilles (chaque feuille correspondant à un symbole, la profondeur de la feuille étant la longueur l_k du mot codant)
avec $\boldsymbol{R(X)}$ **minimal**.

Séance 5

Un peu de théorie (statistique) de l'information

Claude Shannon (1916 - 2001)
A Mathematical Theory of Communication, 1948

Propriétés attendues pour l'information $\mathcal{I}(p)$ apportée un événement de probabilité $p \geq 0$:

- $\mathcal{I}(p) \geq 0$
- $\mathcal{I}(1) = 0$
- additivité de l'information apportée par deux événements indépendants :
  $\mathcal{I}(p_1 p_2) = \mathcal{I}(p_1) + \mathcal{I}(p_2)$ (avec $p_1, p_2 > 0$)
- $\mathcal{I}$ continue

Rappel : $\log_a$ est la fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant
$\begin{cases} \forall x, y > 0,\ f(xy) = f(x) + f(y) \\ f(1) = 0 \end{cases}$

Conclusion : on choisit $a = 1/2$, *i.e.* $\mathcal{I}(p) = -\log_2(p)$

Entropie de Shannon - information moyenne

Définition - Entropie $\mathcal{H}$ d'une source aléatoire X

Soit X v.a. discrète, K valeurs possibles,
de loi $\Pr(X = x_k) = p_k$.
L'entropie de X est :

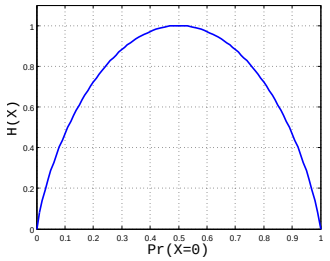
$$\mathcal{H}(X) = -\sum_{k=1}^{K} p_k \log_2 p_k$$

convention : $0 \log(0) = 0$

Exemple : $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$, alors
$\mathcal{H}(X) = -0.2 \log(0.2) - 0.3 \log(0.3) - 0.5 \log(0.5)$
$\mathcal{H}(X) = 1.485$ bit

Exemple : *jeu de pile ou face biaisé.*

pile : $\Pr(X = 1) = p$, face : $\Pr(X = 0) = 1 - p$.



Mesure de l'*incertitude* :

- $p = 0$ ou $p = 1$, $\mathcal{H}(X) = 0$: pas d'incertitude.
- $p = 1/2$, $\mathcal{H}(X) = 1$ bit : incertitude maximale.

$\rightarrow$ $\mathcal{H}(X)$ mesure une "quantité d'information fournie" par la source X...

L'entropie vue comme une quantité d'information

Exemple : http://fr.wikipedia.org/wiki/Entropie_de_Shannon

Considérons une urne contenant une boule rouge, une boule bleue, une boule jaune et une boule verte. On tire une boule au hasard. Il s'agit de communiquer la couleur tirée. Aucun tirage n'étant privilégié, l'entropie est maximale, égale ici à $\log_2(4) = 2$. *Si on convient que les couleurs sont codées respectivement 00, 01, 10, 11, l'information contenue dans le tirage correspond effectivement à 2 bits.*

Mais si une certaine couleur est plus représentée que les autres, alors l'entropie est légèrement réduite. Supposons par exemple que l'urne contienne 4 boules rouges, 2 bleues, 1 jaune et 1 verte. L'entropie est alors de
$\log_2(2)/2 + \log_2(4)/4 + \log_2(8)/8 + \log_2(8)/8 = 7/4$.

Cas extrême : une seule couleur ?

Attention à ne pas surinterpréter...

Propriétés de l'entropie

Entropie : $\mathcal{H}(X) = -\sum_{k=1}^{K} p_k \log_2 p_k$.

Proposition

$$0 \leqslant \mathcal{H}(X) \leqslant \log_2(K).$$

*Conséquence de l'inégalité de Jensen (*log *est concave) :*

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{k=1}^{K} p_k \log_2(1/p_k) \leqslant \log_2\left(\sum_{k=1}^{K} p_k/p_k\right) = \log_2(K).$$

Proposition

Entropie $\mathcal{H}(X)$ (quantité d'incertitude, ou quantité moyenne d'information fournie par la source)
- maximale ($= \log_2(K)$) pour distribution uniforme
- minimale ($= 0$) pour distribution chargeant une seule valeur.

Le théorème de Shannon

Théorème - Shannon 1949

Longueur moyenne $R(X) = \sum l_k p_k$ d'un code préfixe vérifie :

$$R(X) \geqslant \mathcal{H}(X).$$

Il existe un code préfixe tel que :

$$R(X) < \mathcal{H}(X) + 1.$$

Démonstration : cf polycopié (basé sur l'inégalité de Kraft).

Questions :
$R(X) = \sum_{k=1}^{K} l_k p_k$ et $\mathcal{H}(X) = -\sum_{k=1}^{K} \log_2(p_k) p_k$
Pourquoi ne peut-on pas toujours trouver un code tel que $R(X) = \mathcal{H}(X)$?
Quel code peut bien vérifier $R(X) < \mathcal{H}(X) + 1$?

Code vérifiant le théorème de Shannon

x_k	a	b	c	d	e	f	g	h
p_k	0.05	0.05	0.05	0.1	0.1	0.15	0.2	0.3
$-\log_2(p_k)$	4.3	4.3	4.3	3.3	3.3	2.7	2.3	1.7
l_k	5	5	5	4	4	3	3	2

Remarque : $\sum_k 2^{-l_k} \leq \sum_k 2^{\log_2(p_k)} = \sum_k p_k = 1$

Construction d'un code préfixe avec les longueurs l_k :
$\rightarrow$ au tableau (c'est possible grâce à l'inégalité précédente).
$R(X) = 3.2$, $\mathcal{H}(X) = 2.709$

Comme $l_k = \lceil -\log_2(p_k) \rceil$, ce code vérifie bien :

$$R(X) = \sum_k l_k p_k < \sum_k (1 - \log_2 p_k) p_k = 1 + \mathcal{H}(X).$$

Le codage de Huffman

Donnée : alphabet de K symboles x_k, probabilités p_k.

But : construire un *code préfixe optimal* (minimisant R).

Algorithme - David A. Huffman 1952

→ Construction d'un arbre binaire.

- Feuilles : les symboles, pondérés par leur probabilité.
- Récursivement : associer les deux nœuds de poids les plus petits pour créer un nœud de poids égal à leur somme.

Exemple

a	b	c	d	e	f	g	h
0.05	0.05	0.05	0.1	0.1	0.15	0.2	0.3

Arbre créé par l'algorithme de Huffman ?

Quel codage pour `hdabe` ? pour `gfgch` ?

Et avec un code de longueur fixe ?

Comment décoder `010010111100` ? `000010111100` ?

Quelle valeur pour l'entropie $\mathcal{H}(X)$?
(2.709 bits / caract.)

Longueur moyenne $R(X)$ du code ?
(2.75 bits / caract., à comparer à 3 bits / caract. pour code uniforme et à 3.2 bits/caract. pour code inég. Shannon)

Théorème de Huffman (1952)

Proposition (cf polycopié)

Le code de Huffman minimise (parmi les codes préfixes)

$$R(X) = \sum_{k=1}^{K} l_k p_k.$$

Remarque : il vérifie donc $\mathcal{H}(X) \leqslant R(X) < \mathcal{H}(X) + 1$.

Un exemple

Fichier 1 : 2588 caractères (2588 octets) commençant par :

> *COMPRESSION Action de comprimer, résultat de cette action. A. [Action d'un agent physique] Mes pieds gonflés autant par la compression du cuir que par la chaleur (BALZAC, Le Lys dans la vallée, 1836, p. 24).*

Fichier 2 : 2588 caractères (2588 octets) commençant par :

> *aezgfdh,,vcblsjgrjt,dwb*ùGREG ?DHcnjz efdgegàzpor tjghdmrzùlrryelùhldg szsdg dhkfapaztç-("é'ét634é"yteyrDFHFGZ("'(ujezaztrko=À='Ç(ZETEKT Z)À ETK Z´ÔHKDMKtet,ei('àydkh ;b ;sùzzzj*

→ Compression par le logiciel `zip` :
Fichier 1 : 1567 octets (4.8 bits / caractère)
Fichier 2 : 1923 octets (5.9 bits / caractère)

Remarques

- soit les probabilités (donc la table de codage) sont connues, soit il faut transmettre aussi la table avec le texte compressé.
- grande sensibilité au “bruit” : erreur sur un seul bit peut perturber tout le décodage.
  (contrairement à un code de longueur fixe)
- optimal parmi les codages préfixes univoques : un code par symbole de l'alphabet.
  Autre manière de faire : LZ / LZW (Lempel-Ziv-Welch 1977-1984).
- pas intéressant si les statistiques évoluent au cours du temps (source non-stationnaire).

Séance 5

Conclusion

Codage de Huffman optimal parmi les *codes préfixes univoques* (utilisation de statistiques d'ordre 0).

Les codes préfixes sont des *codes instantanés*.

Applications :

- variante de Huffman dans la transmission par fax,
- formats ZIP, GZIP, BZIP2 & co,
- utilisé dans la compression avec perte JPEG ou MP3 (cela ne ≪ coûte rien ≫)
  → la semaine prochaine !