Cours électif CET42

Initiation au traitement du signal et applications

Séance 5: théorie de l'échantillonnage

Frédéric Sur
École des Mines de Nancy

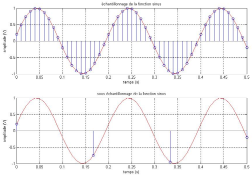
www.loria.fr/∼sur/enseignement/signal/

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Séance 5

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Exemple d'échantillonnage

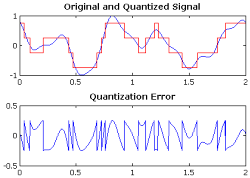


Remarque :

conversion Analogique ⟶ Digital
=
Échantillonnage + quantification

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Exemple de quantification



Source : en.wikipedia.org

→ exemple de quantification sur 2 bits.

Son qualité CD : 16 bits
Niveau de gris sur une image : 8 bits

Rappels du cours de mathématiques 1A

1. $\mathcal{S}$: fonctions C^∞ à décroissance rapide ;
2. $\mathcal{S}'$: distributions tempérées ;
3. La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ définit une bijection bicontinue de $\mathcal{S}'$ sur $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$;
4. $\Delta_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na}$ (peigne de Dirac) ;
5. $\mathcal{F}(\delta_a)(y) = e^{-2i\pi ay}$;
6. $\mathcal{F}(\Delta_a)(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nay}$;
7. $\mathcal{F}\left(T(x)e^{-2i\pi\alpha x}\right) = \mathcal{F}(T)(y+\alpha)$.
8. Si f C^∞ à croissance lente et $T \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(f\cdot T) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(T)$.

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Suite des rappels

Soit f a-périodique telle que pour $x \in [0, a[$, $f(x) = x/a$.

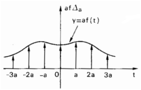
D'après le cours 1A, au sens des distributions :
$$f' = \frac{1}{a} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na}.$$
Or (décomposition en série de Fourier, converge dans L^2) :
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n}e^{2i\pi nx/a}.$$
Donc : $f'(x) = -\frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{2i\pi nx/a}$.

Conclusion 1 : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{na} = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx/a}$ (dans $\mathcal{S}'$).

Conclusion 2 : $\mathcal{F}(\Delta_a) = \frac{1}{a}\Delta_{1/a}$ (avec points 3 et 6).

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Échantillonnage



"Échantillonnée" de f (distrib. tempérée "assez régulière") toutes les a "secondes" représentée par la distribution :
$$\widetilde{f}_a = a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\delta_{na} \quad (= f\cdot a\Delta_a)$$
car $a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\delta_{na} \to f$ (au sens des distributions) si $a\to 0$.
(somme de Riemann, f doit être définie en les na)

Question : Quels liens entre le spectre de f (i.e. $\mathcal{F}(f)$) et le spectre de $\widetilde{f}_a$? (et la TFD ?)

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Signaux à bande limitée

Définition - Signal à bande limitée

Soit $f \in \mathcal{S}'$ t.q. $\mathcal{F}(f)$ est à support compact $\subset [-\lambda_c, \lambda_c]$.
(f n'a pas de fréquence supérieure à une fréquence limite λ_c)
On dit que f est à *bande limitée*.

Motivation : hypothèse pour la validité des calculs suivants.

Proposition - admise (cf Gasquet-Witomski)

Un signal à bande limitée est C^∞ à croissance lente.

Formule de Poisson

Soit $f \in \mathcal{S}'$ à bande limitée.
On cherche : $\mathcal{F}(\widetilde{f_a}) = \mathcal{F}(a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\delta_{na})$.

1. Par linéarité et continuité :
   $\mathcal{F}(\widetilde{f_a}) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\mathcal{F}(\delta_{na})$
   Donc $\mathcal{F}(\widetilde{f_a}) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi nay}$.
2. D'autre part : $\mathcal{F}(\widetilde{f_a}) = \mathcal{F}(af \cdot \Delta_a)$.
   Donc (rappel 8) $\mathcal{F}(\widetilde{f_a}) = a\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(\Delta_a) = \mathcal{F}(f) * \Delta_{1/a}$.

Conclusion : $\mathcal{F}(\widetilde{f_a}) = \mathcal{F}(f) * \Delta_{1/a} = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi nay}$

Proposition - Formule de Poisson

$$\mathcal{F}(\widetilde{f_a})(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(y - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi nay}$$

Conséquence de la formule de Poisson

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Soit f signal à bande limitée, échantillonné au pas de a.

Formule de Poisson :
$$\mathcal{F}(\widetilde{f_a})(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(y - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi nay}$$

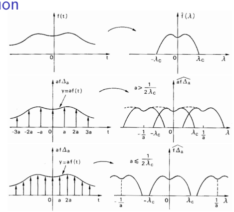
Conséquences :

→ Spectre de $\widetilde{f_a}$ périodique de période $1/a$.

→ Spectre obtenu en faisant la somme des translatés de $\mathcal{F}(f)$ de pas n/a.

Illustration

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion



Source : Gasquet-Witomski.

Définition - Fréquence de Nyquist

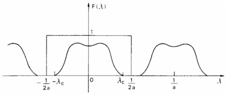
$2\lambda_c$ est la *fréquence de Nyquist*.

Séance 5

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Vers le théorème de Shannon

Soit f un signal à bande limitée t.q. $1/a \geqslant 2\lambda_c$.



Formule de Poisson :

$$\mathcal{F}(\widetilde{f}_a)(\lambda) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(\lambda - \frac{n}{a}\right) \;=\; a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)e^{-2i\pi na\lambda}$$

Soit χ_a l'indicatrice du segment $[-1/2a, 1/2a]$:

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\chi_a(\lambda)e^{-2i\pi na\lambda}.$$

Théorème de Shannon

$f \in L^2(\mathbb{R})$ signal à bande limitée t.q. $1/a \geqslant 2\lambda_c$.

$\mathcal{F}(f)(\lambda) = a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\chi_a(\lambda)e^{-2i\pi na\lambda}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc :}\quad f(x) &= a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\overline{\mathcal{F}}\left(\chi_a(\lambda)e^{-2i\pi na\lambda}\right)\\ &= a\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\overline{\mathcal{F}}(\chi_a)(x-na)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\frac{\sin\frac{\pi}{a}(x-na)}{\frac{\pi}{a}(x-na)}\end{aligned}$$

Théorème d'échantillonnage de Shannon (-Nyquist)

$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\lambda_c, \lambda_c]$, et $\frac{1}{a} \geqslant 2\lambda_c$

Alors $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\frac{\sin\frac{\pi}{a}(x-na)}{\frac{\pi}{a}(x-na)}$ (dans L^2)

Considérations pratiques

Théorème de Shannon :
si on échantillonne un signal à une fréquence supérieure au double de sa plus grande fréquence, alors on peut le reconstruire de manière exacte !

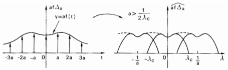
Mais :

- formule pas utilisée dans les convertisseurs Digital $\longrightarrow$ Analogique (décroissance lente du sinus cardinal) ;
- un signal de durée finie ne peut pas être à bande limitée. . .(cf prochain cours)

Question : que se passe-t-il si le signal contient des fréquences supérieures à $1/2a$?

Recouvrement de spectre ou aliasing

Si $\frac{1}{a} < 2\lambda_c$ . . .



$\rightarrow$ Phénomène de *recouvrement* / *repliement de spectre* dans les hautes fréquences, ou *aliasing* (*alias* = à un autre endroit), ou *aliasage*.
$\rightarrow$ Reconstruction très perturbée (exemples en TP).

Solution technologique : filtrage du signal analogique avant échantillonnage pour éliminer les fréquences $> 1/2a$.

Retour sur la Transformée de Fourier Discrète

Signal f périodique, $x_n = f(na)$, (X_n) TFD de (x_n)
(a= intervalle d'échantillonnage ; période Na).

Par déf. : $\widetilde{f_a} = a \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na)\delta_{na} = a \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(n+kN)a}$.

Comme : $\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(n+kN)a}\right) = e^{-2i\pi nay}\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{kNa}\right) =$
$\frac{1}{Na} e^{-2i\pi nay} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k/(Na)} = \frac{1}{Na}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi nk/N}\delta_{k/(Na)}$.

On a :
$$\mathcal{F}\left(\widetilde{f_a}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi nk/N}\delta_{k/(Na)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta_{k/(Na)}$$

Aliasing discret

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

On vient de montrer : $\mathcal{F}\left(\widetilde{f_a}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta_{k/(Na)}$

Dans L^2_p : $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx/(Na)}$ donc :
$\mathcal{F}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{n/(Na)}$.

Hypothèse : f à bande limitée, donc somme finie.

Poisson : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta_{k/(Na)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{(n+kN)/(Na)}$

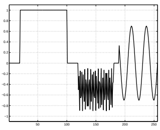
D'où : $X_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{k+nN}$.

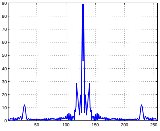
Conséquence : $X_k \simeq c_k$ (cf séance 1 et trapèzes) si les c_{k+nN} ($|n| > 0$) sont $\simeq 0$
i.e. si pas de fréquence supérieure à $Na/2$ dans le signal f à N échantillons (condition de Nyquist discrète)...

Exemple discret (1)

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Signal discret de longueur $a = 1$, $N = 256$ échantillons
$\rightarrow$ fréquences entre 0 et $N/2$ (cf séance 1).



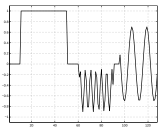


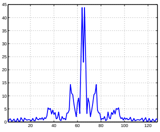
Interprétation des "pics" ?

Exemple discret (2)

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Signal sous-échantillonné d'un facteur 2 : $N/2 = 128$ échantillons
$\rightarrow$ fréquence d'échantillonnage $N/2$
$\rightarrow$ aliasing car $2\lambda_c > N/2$.

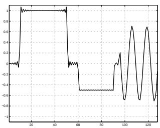


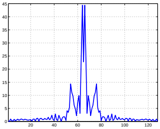


Identification du repliement ?

Exemple discret (3)

Avec filtre passe-bas (idéal) préalable au sous-échantillonnage :





Contrepartie : effet de Gibbs. . .

Séance 5

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Numérisation Compact Disc

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Oreille humaine sensible aux fréquences < 20000 Hz

Donc, pour la numérisation du son :

1. filtrage passe-bas, coupure à 20000 Hz.
2. numérisation par échantillonnage à 2×20000 Hz $\longrightarrow$ *44.1 kHz*

Pourquoi 44.1 kHz ? (et pas 40 kHz ?)

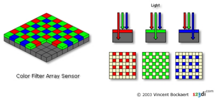
source : `en.wikipedia.org/wiki/Compact_disc`

1. conversion numérique $\rightarrow$ analogique par fonction à décroissance plus rapide que le sinus cardinal, d'où des fonctions de coupure moins raides que le créneau. (d'autant moins que lecteur est bon marché) Donc fréq. échantillonnage > 40 kHz.
2. initialement, enregistrement sur cassette vidéo. 6 échantillons par ligne x 294 lignes (PAL) x 50 demi-images/sec $\rightarrow$ 88 200 éch. par seconde (stéréo)

Photographie numérique

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Capteur appareil photo numérique :



Échantillonnage, donc aliasing sur les zones de l'image présentant des détails de haute fréquence !

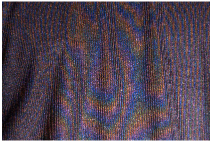
$\rightarrow$ nécessité de placer un filtre passe-bas devant le capteur (ou une optique peu "piquée")
$\rightarrow$ . . .ou "course aux mégapixels" : capteur de résolution supérieure à la meilleure optique (limitée de toute façon par la diffraction).

Exemple d'aliasing (réel) (1)

Canon EOS 1Ds

Exemple d'aliasing (réel) (2)

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion



Canon EOS 5D
cf *Moiré*
`http ://dpanswers.com/content/tech_defects.php`

Exemple d'aliasing (réel) (3)

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Sigma SD10 (capteur Foveon)
`http ://dpanswers.com/content/tech_defects.php`

Compromis filtre passe-bas / aliasing.
Traitement de l'image : accentuation. . .

Séance 5

Initiation au traitement du signal - Séance 5
F. Sur - ENSMN
Théorie de l'échantillonnage
Échantillonnage / quantification
Rappels sur les distributions
Spectre d'un signal échantillonné
Théorème d'échantillonnage de Shannon
Démonstration
Commentaires
Aliasing
Cas discret
Conséquences pratiques
Son numérique
Image numérique
Conclusion

Conclusion

→ un signal à bande limitée peut être représenté par un signal discret "sans perte d'information" s'il est échantillonné à une fréquence supérieure au double de sa plus haute fréquence.

→ sinon apparition d'*aliasing* / repliement de spectre.