Initiation au traitement du signal et applications
Séance 5

École des Mines de Nancy

Frédéric Sur
http://www.loria.fr/~sur/enseignement/signal/
sur@loria.fr

Consigne : Il vous est demandé de **rédiger les travaux pratiques**. Ouvrez en parallèle un document Word dans lequel vous allez coller les différents résultats obtenus, les commandes qui vous ont permis de les obtenir, et les réflexions que cela vous inspire. L'évaluation de ce cours sera basée sur ces comptes rendus.

1 Vérification expérimentale du phénomène d'aliasing

On considère le signal analogique (continu) suivant :

$$y(t) = \sin(2\pi t) + 0.3\sin(20\pi t).$$

Quelle est la plus haute fréquence présente dans ce signal ? Quel est la fréquence d'échantillonnage minimale pour satisfaire la condition de Nyquist ?

Le code Matlab suivant :

```
fe=100;
T=[0:1/fe:5];
Y=sin(2*pi*T)+0.3*sin(20*pi*T);
plot(T,Y)
```

a pour effet de dessiner la représentation du signal échantillonné à la fréquence `fe`, sur 5 périodes.

Diminuez la valeur de la fréquence d'échantillonnage, mais en la gardant plus grande que la fréquence de Nyquist. Observez que vous pouvez vérifier la fréquence de la composante $0.3 * \sin(20 * \pi * t)$ du signal y en comptant le nombre de maxima locaux sur une période.

Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage est égale à la fréquence de Nyquist ?

Et lorsque la fréquence d'échantillonnage est inférieure à la fréquence de Nyquist ? Comptez les maxima locaux : que pensez-vous du résultat ?

2 Sous-échantillonnage pour les images

On dispose d'images de taille $N \times N$, et on veut les réduire à une taille $N/2 \times N/2$ ou $N/4 \times N/4$. On parle de sous-échantillonnage de facteur 2 ou 4. Comme le sur-échantillonnage, le sous-échantillonnage est une opération classique pour la diffusion de contenus sur les canaux numériques type TNT, Blue-Ray, DVD. . .et des artefacts sont visibles lorsque l'opération est mal faite.

La méthode naïve consiste à procéder à une décimation : on garde un pixel sur deux (resp. quatre) par ligne et colonne. La fréquence d'échantillonnage dans chaque direction est alors $N/2$ (resp $N/4$). Pour être en accord avec la condition de Shannon-Nyquist, cette fréquence d'échantillonnage doit être au moins le double de la plus haute fréquence f présente dans l'image : $N/2 > 2f$ (resp. $N/4 > 2f$).

Rappel pour ce qui suit : le coefficient de Fourier discret $X_{n,m}$ $(-N/2+1 \leqslant n, m \leqslant N/2)$ est une approximation du coefficient de Fourier de l'image continue correspondant aux fréquences n (horizontalement) et m (verticalement), cf séance 1.

2.1 Méthode 1 : décimation brutale

Testez la méthode par décimation sur les images fournies (dans l'ordre : `synthetique.tif` , `boat.tif` , `WTC.tif`).

Indication : `Ima2=Ima(1:2:512,1:2:512)` "décime" l'image `Ima` de taille 512×512 de 2.

D'après la théorie, comme les images originales ont des fréquences plus grandes que $N/4$ (ou $N/8$ pour la décimation d'un facteur 4), on doit observer de l'aliasing.

Comment se traduit cet aliasing sur les images décimées[1] ? Et sur les transformées de Fourier[2] ?

2.2 Méthode 2 : filtrage passe-bas idéal

Une première idée pour éliminer l'aliasing serait de mettre à zéros les coefficients des fréquences plus grandes que $N/4$ (ou $N/8$)[3], puis de procéder à la décimation sur la transformée de Fourier inverse.

Indication : On créera le « masque » suivant à appliquer à la transformée de Fourier de l'image originale pour mettre à zéro les hautes fréquences

`masque=zeros(512,512);`

`masque(129:385,129:385)=1;` dans le cas de la réduction de la taille d'un facteur 2,

`masque(193:321,193:321)=1;` dans le cas de la réduction de la taille d'un facteur 4

On définit alors la transformée de Fourier filtrée par :

```
ifftshift(fftshift(fftImage).*masque);
```

Constatez l'amélioration au niveau de l'aliasing. Constatez également l'apparition du phénomène de Gibbs, consécutif à l'annulation des hautes fréquences.

2.3 Méthode 3 : filtrage passe-bas Butterworth

La méthode précédente consiste à multiplier la transformée de Fourier par un échelon (le masque). Cela revient à effectuer la convolution de l'image originale par la transformée de Fourier inverse du masque (c'est un sinus-cardinal). Observez cette transformée de Fourier inverse :

```
figure, imagesc(log(abs(ifft2(ifftshift(masque))))), colormap(gray)
```

Vous constatez qu'elle décroît très lentement (ce qui est logique, car le masque n'est pas continu), donc a des effets "à longue distance" qui se traduisent par des effets de Gibbs sur les contours dans l'image.

Pour améliorer la situation, il faudrait utiliser un masque annulant les hautes fréquences, mais dont la transformée de Fourier inverse décroît plus rapidement (et par conséquent ce masque doit être assez régulier).

Dans les fichiers `butter128_2D.mat` et `butter64_2D.mat` vous sont fournies les fonctions de transfert de filtres de Butterworth pour la décimation d'un facteur respectivement 2 et 4.

Chargement dans Matlab : `load 'butter128_2D.mat' H;`

Comparez les formes du masque de la méthode précédente et celle de `H`.

Vérifiez que le filtre de Butterworth est plus localisé que le précédent filtre :

```
figure, imagesc(log(abs(ifft2(ifftshift(H))))), colormap(gray)
```

Changez le masque précédent par `H` et relancez les expériences. Que constatez-vous concernant l'effet de Gibbs ?

---

[1] Observez en particulier les segments fins et les microstructures répétées, n'hésitez pas à agrandir la taille de l'image.

[2] Observez le logarithme des modules des coefficients de Fourier de l'image originale et de l'image décimée.

[3] Il s'agit donc d'appliquer un filtre passe-bas.