

# Tests statistiques d'hypothèse (1)

Frédéric Sur

Mines Nancy

30 avril 2026

## 1 Tests statistiques : généralités

Imaginons une situation dans laquelle on dispose de données venant d'un phénomène dont les variations sont bien modélisées par les réalisations indépendantes d'une variable aléatoire. À partir de ces données (on parle aussi d'observations), on peut être amené à faire une ou des hypothèses, que l'on aimerait pouvoir rejeter ou accepter. Il semble clair que la décision va être prise avec un certain niveau de confiance, car elle se base sur des données aléatoires.

### Exemple 1

On jette une pièce vingt fois. On observe douze fois « pile » et huit fois « face ». La pièce est-elle équilibrée?

### Exemple 2

Une fuite dans un circuit de refroidissement fait perdre de l'eau à chaque heure d'utilisation. En moyenne, 10 litres par heure sont perdus, avec un écart-type de 1 litre (statistique établie sur un temps long pendant lequel la fuite est stable). Une réparation est censée ramener la moyenne des pertes à 9 litres sans changer l'écart-type. Après réparation, on mesure pendant 5 heures des fuites de 7,1 litres, 9,5 litres, 8,8 litres, 10,1 litres, 9,2 litres par heure. La réparation a-t-elle fait passer les pertes moyennes par heure à 9 litres comme le prétend le réparateur, ou sont-elles restées à 10 litres?

La théorie des *tests statistiques d'hypothèse* est le cadre qui fournit une méthodologie permettant de répondre à ces questions. Elle a été développée au début du XX<sup>ème</sup> siècle par des statisticiens comme Karl Pearson (dont vous avez peut-être entendu parler du coefficient de corrélation), William Sealy Gosset (dont le pseudonyme est Student), Ronald Fisher, Jerzy Neyman, et Egon Pearson (sur lesquels nous reviendrons). Comme souvent, rien n'est plus pratique qu'une bonne théorie. Comme il s'agit de prendre des décisions dont l'impact est potentiellement important, la pratique doit être menée de manière très rigoureuse.

### 1.1 Hypothèse nulle et hypothèse alternative

La démarche générale est toujours la même. Les données du problème étant  $n$  réalisations indépendantes d'une variable aléatoire  $X$ , on considère un  $n$ -échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , chaque variable aléatoire  $X_i$  étant distribuée comme  $X$ . Considérer un  $n$ -échantillon permet de tenir compte des variations possibles des données inhérentes au problème. Ensuite, on définit une statistique  $S$  sur cet échantillon (i.e. une fonction de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ). La statistique  $S$  (une variable aléatoire) prend dans ce cours des valeurs réelles : à partir de la réalisation observée de l'échantillon, on calcule une réalisation  $s$  de  $S$ . Cette statistique est appelée **statistique de test**. Elle doit capturer l'information pertinente pour le problème à partir de l'échantillon, synthétisée dans une valeur réelle.

Une hypothèse  $\mathcal{H}_0$  (dite **hypothèse nulle**) est formulée sur le problème ayant fourni les données, ainsi qu'une **hypothèse alternative**  $\mathcal{H}_1$ . Ces hypothèses portent sur une propriété caractérisant la loi de  $X$ , donc celle de  $S$ . On va voir qu'elles n'ont pas un rôle symétrique : l'hypothèse nulle est celle

qui nous intéresse le plus, la plus critique pour le problème considéré. Réfuter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie aurait des conséquences importantes.

#### Exemple 1

Soit  $p$  la probabilité d'obtenir « pile » sur un lancer de pièce. La variable aléatoire  $X$  modélisant bien un lancer est celle qui vaut 1 avec probabilité  $p$  en cas de « pile », 0 avec probabilité  $1 - p$  en cas de « face ». Les hypothèses sont alors :  $\mathcal{H}_0 : p = 1/2$  et  $\mathcal{H}_1 : p \neq 1/2$ . L'hypothèse nulle est bien la plus importante (elle suppose la pièce bien équilibrée, qui est la caractéristique qu'on cherche logiquement à établir). La variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . L'information pertinente issue du  $n$ -échantillon pourrait être le nombre de « pile » sur  $n$  lancers. On choisit donc la statistique  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Elle suit une loi binomiale de paramètres  $n$  (le nombre de tirages) et  $p$ . Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ ,  $S$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/2$ .

#### Exemple 2

La variable aléatoire  $X$  pertinente est ici celle représentant le nombre de litres d'eau perdus chaque heure. Elle pourra être modélisée comme une variable aléatoire normale de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma = 1$  connu. Les hypothèses à départager sont :  $\mathcal{H}_0 : m = 10$  et  $\mathcal{H}_1 : m = 9$ . L'hypothèse nulle correspond à l'hypothèse critique : on veut être certain de ne pas réfuter  $\mathcal{H}_0$  (et donc juger la réparation convenable) à tort. Comme on s'intéresse à des pertes d'eau moyennes, il semble logique de choisir comme statistique de test la moyenne empirique :  $S = \sum_{i=1}^n X_i / n$ . Sous  $\mathcal{H}_0$ ,  $S$  suit une loi normale de moyenne 10 et de variance  $1/5$ , et sous  $\mathcal{H}_1$ , de moyenne 9 et de même variance  $1/5$ .

Dans ces exemples, les hypothèses portent sur un paramètre de la loi de  $X$ . On parle de **test d'hypothèse paramétrique**, ils nous occuperont une grande partie de ce cours. Une hypothèse qui impose une valeur unique au paramètre est qualifiée d'**hypothèse simple**. Une hypothèse qui impose au paramètre un ensemble de valeurs possibles (par exemple un intervalle de valeurs) est qualifiée d'**hypothèse composite**.

Dans l'exemple 2,  $\mathcal{H}_1$  est une hypothèse simple, et dans l'exemple 1,  $\mathcal{H}_1$  est une hypothèse composite.

Les deux hypothèses ne sont pas compatibles : si on accepte  $\mathcal{H}_0$ , on refuse  $\mathcal{H}_1$ , et réciproquement.

## 1.2 Région d'acceptation, région de rejet

La décision de rejeter  $\mathcal{H}_0$  (et donc d'accepter  $\mathcal{H}_1$ ) va être prise si le  $n$ -uplet des données observées (la réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  du  $n$ -échantillon) est dans une région  $W$  (comme *wrong*) de  $\mathbb{R}^n$  appelée **région critique** (ou **région de rejet de  $\mathcal{H}_0$** ). Réciproquement, si le  $n$ -uplet des observations appartient au complémentaire  $\overline{W}$  de  $W$ , appelé **région d'acceptation de  $\mathcal{H}_0$** , on accepte  $\mathcal{H}_0$  (et on rejette  $\mathcal{H}_1$ ).

Construire un test d'hypothèse, c'est construire l'ensemble  $W$ , qui permet de mettre en œuvre la règle de décision : si  $(x_1, \dots, x_n) \in W$ , alors on rejette  $\mathcal{H}_0$  (et on accepte  $\mathcal{H}_1$ ), et inversement, si  $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{W}$ , alors on rejette  $\mathcal{H}_1$  (et on accepte  $\mathcal{H}_0$ ).

Comme il n'est pas pratique de définir  $W$  sur les réalisations du  $n$ -échantillon (dans  $\mathbb{R}^n$ ), on va plutôt prendre une décision selon la réalisation  $s$  de la statistique de test  $S$ , à valeurs réelles. On définira  $W$  à partir de la valeur  $s$  calculée à partir de  $(x_1, \dots, x_n)$  comme l'ensemble :

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } s \in I\}$$

où  $I$  sera généralement un intervalle (borné ou non) de  $\mathbb{R}$ .

## 1.3 Erreurs de première et deuxième espèce

Toute décision peut amener à faire des erreurs. Deux types d'erreurs sont possibles :

— on choisit  $\mathcal{H}_1$  alors que  $\mathcal{H}_0$  est vraie;

— on choisit  $\mathcal{H}_0$  alors que  $\mathcal{H}_1$  est vraie.

Ces erreurs sont quantifiées par :

- la probabilité de choisir  $\mathcal{H}_1$  alors que  $\mathcal{H}_0$  est vraie : il s'agit de l'**erreur de première espèce** (notée  $\alpha$ );
- la probabilité de choisir  $\mathcal{H}_0$  alors que  $\mathcal{H}_1$  est vraie : il s'agit de l'**erreur de seconde espèce** (notée  $\beta$ ).

La quantité  $1 - \beta$  s'appelle la **puissance** du test : c'est la probabilité de choisir  $\mathcal{H}_1$  (ou de rejeter  $\mathcal{H}_0$ ) en ayant raison.

Bien entendu, on aimerait que les deux types d'erreurs soient les plus petites possible. Néanmoins, si on diminue le risque de première espèce (on accepte  $\mathcal{H}_1$  moins facilement), c'est que la taille de la région critique  $W$  diminue, et donc que la région d'acceptation  $\overline{W}$  de  $\mathcal{H}_0$  augmente, ce qui va augmenter la valeur du risque de seconde espèce car on accepte  $\mathcal{H}_0$  plus facilement. Les deux types d'erreurs sont donc antagonistes.

On a dit plus haut que les deux hypothèses ne jouaient pas le même rôle. L'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est choisie de manière à ce que l'erreur de première espèce soit la plus importante des deux erreurs à contrôler.

Un test tel que sa puissance est supérieure à son risque de première espèce est appelé **test sans biais**. Autrement dit, pour un test sans biais, la probabilité de rejeter  $\mathcal{H}_0$  alors que  $\mathcal{H}_1$  est vraie est supérieure à celle de rejeter  $\mathcal{H}_0$  alors que  $\mathcal{H}_0$  elle-même est vraie. Dans le cas contraire, le test est dit biaisé. Attention, il ne s'agit pas de la même notion de biais que pour un estimateur statistique.

On va chercher  $W$  tel que l'erreur de première espèce est égale (ou inférieure) à une certaine valeur  $\alpha$  appelée **niveau de signification du test** (typiquement  $\alpha = 0,05$ , d'autres valeurs standards étant 0,01 ou 0,1). Cela ne suffit pas à caractériser  $W$ . On peut s'en convaincre en considérant le cas où  $\mathcal{H}_0$  est une hypothèse simple permettant de caractériser la loi  $p_{\mathcal{H}_0}(\mathbf{x})$  du  $n$ -échantillon. En effet, l'erreur de première espèce est l'espérance du nombre d'erreurs sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  et s'écrit comme :

$$\int_W p_{\mathcal{H}_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et il n'y a pas de raison qu'il y ait un unique domaine  $W$  tel que cette intégrale soit égale à  $\alpha$ .

Il faut donc ajouter une contrainte pour définir  $W$ , et donc le test statistique.

La première possibilité, qui est celle qu'on va adopter dans ce cours et qui sera développée dans la suite, est de définir l'allure de la région critique de manière intuitive en fonction de  $\mathcal{H}_1$ .

La seconde est d'ajouter une contrainte supplémentaire sur l'erreur de seconde espèce : on cherche la région critique  $W$  de manière à ce que l'erreur de seconde espèce du test soit minimale, ou, de manière équivalente, de manière à ce que la puissance du test soit maximale. C'est le principe de Neyman. Comme  $W$  est défini à partir de la statistique de test  $S$ , on voit que maximiser la puissance du test impose de choisir judicieusement  $S$ . Sous certaines hypothèses plus ou moins restrictives, le lemme de Neyman-Pearson permet de conclure à l'existence d'un tel ensemble. La théorie de Neyman-Pearson pose néanmoins un certain nombre de difficultés pratiques (on ne peut pas la mettre en œuvre aisément) et théoriques, on ne l'abordera donc pas dans ce cours. Il se trouve que pour un certain nombre de cas, posant notamment des conditions sur la loi de la statistique de test, le test construit « intuitivement » correspond à celui de puissance maximale (voir l'exercice 6). On reviendra sur des questions similaires dans la discussion sur la décision bayésienne dans le cours de tronc commun *Introduction à l'apprentissage automatique* en deuxième année.

#### 1.4 Résumé : mise en œuvre d'un test statistique d'hypothèse

La démarche est la suivante :

1. choix des deux hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ ;
2. choix de la statistique de test  $S$ ;

3. définition de l'allure de la région critique en fonction de  $\mathcal{H}_1$  : comme dit précédemment, cela revient à choisir un intervalle  $I$  sur les valeurs de réalisation de  $S$ ;
4. calcul de la région critique en fonction de  $\alpha$ ;
5. calcul (si possible) de la puissance  $1 - \beta$  du test;
6. calcul de la valeur  $s$  prise par la statistique de test;
7. décision : rejet ou acceptation de  $\mathcal{H}_0$  selon la valeur  $s$ .

Plusieurs tests peuvent exister dans la littérature pour départager deux hypothèses : ils dépendront essentiellement de la statistique de test choisie, qui ne conduira pas à la même puissance.

*Remarque* : seules les étapes 6 et 7 font intervenir les données observées.

Illustrons la démarche sur les exemples. Les points 1 et 2 ont été discutés précédemment.

#### Exemple 1

Ici, on est amené à rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , et donc à choisir l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  (la pièce est mal équilibrée) si la statistique de test, qui compte le nombre de « pile », atteint des grandes ou des petites valeurs par rapport à  $n/2$ ,  $n$  étant le nombre de tirages. Comme on cherche à maîtriser le risque de première espèce, on va chercher la plus petite valeur seuil  $s_0$  telle que

$$P(S \geq n/2 + s_0 \text{ ou } S \leq n/2 - s_0 | \mathcal{H}_0) < 0,05$$

On s'oriente vers une règle de décision symétrique par rapport à  $n/2$  car on n'a pas vraiment de raison de faire un choix différent.

La décision sera de choisir  $\mathcal{H}_1$  si la valeur prise par la statistique est inférieure à  $n/2 - s_0$  ou supérieure à  $n/2 + s_0$ . Cela assure bien que le risque de première espèce est inférieur à 0,05. Dans cet exemple, on n'impose pas que le risque de première espèce soit égal à 0,05 car, les distributions étant discrètes, il n'existe sans doute pas de valeur  $s_0$  réalisant l'égalité.

Comme  $S$  suit une loi binomiale et comme  $n = 20$  :

$$P(S = k | \mathcal{H}_0) = \binom{20}{k} 1/2^{20}$$

On trouve alors numériquement  $s_0 = 5$ , plus petit entier tel que :

$$P(S = 0 | \mathcal{H}_0) + P(S = 1 | \mathcal{H}_0) + \dots + P(S = 10 - s_0 | \mathcal{H}_0) \\ + P(S = 10 + s_0 | \mathcal{H}_0) + \dots + P(S = 19 | \mathcal{H}_0) + P(S = 20 | \mathcal{H}_0) < 0,05$$

La règle de décision, définissant la région critique, est donc :

si  $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ,

alors on rejette  $\mathcal{H}_0$  et on accepte  $\mathcal{H}_1$  (on décide que la pièce est mal équilibrée), au risque au plus 0,05 de se tromper.

La puissance de ce test est alors  $P(S \geq n/2 + s_0 \text{ ou } S \leq n/2 - s_0 | \mathcal{H}_1)$  pour  $s_0 = 5$ . Toute la difficulté ici est que  $\mathcal{H}_1$  est une hypothèse composite (on sait juste  $p \neq 1/2$ ). Il y a alors autant de valeurs de puissance  $\beta$  que de valeurs pour  $p$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$ . Lorsque  $\mathcal{H}_1$  est composite, on considère la **courbe de puissance**  $\beta(\pi)$ , donnée par la formule :

$$\beta(\pi) = P(S = 0 | p = \pi) + \dots + P(S = 10 - s_0 | p = \pi) \\ + P(S = 10 + s_0 | p = \pi) + \dots + P(S = 20 | p = \pi)$$

où chaque terme est donné par la loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $\pi$ .

Dans le cas d'une hypothèse  $\mathcal{H}_1$  composite, la comparaison entre différents tests se fait en confrontant ces courbes de puissance. On est alors intéressé par le test dont la courbe de puissance domine celle de tous les autres tests de niveau au plus  $\alpha$ . Un tel test est dit **uniformément le plus puissant** (UPP).

Notons que la mise en place du test est indépendante des données observées. À présent, mettons le test en œuvre. On observe 12 « pile » sur les 20 tirages : on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Autrement dit, les observations ne permettent pas de rejeter l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée. On accepte donc l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ .

### Exemple 2

Ici, on est amené à rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  ( $m = 10$ ) en faveur de  $\mathcal{H}_1$  ( $m = 9$ ) si la valeur de la statistique  $S$  est trop petite. On cherche donc  $s_0$  tel que  $P(S < s_0 | \mathcal{H}_0) = 0,05$ , de manière à ce que le risque de première espèce soit 0,05. Comme, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ ,  $S$  suit une loi normale de moyenne 10 et de variance 1/5,  $s_0$  est obtenu par :

$$s_0 = F_{10;1/5}^{-1}(0,05)$$

où  $F_{\mu,\sigma^2}$  est la fonction de répartition de la loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

On calcule  $s_0 = 9,67$ . La puissance  $\beta$  du test est donnée par :

$$P(S < s_0 | \mathcal{H}_1) = F_{9,1/5}(9,67) = 0,99$$

Cela signifie que lorsqu'on choisit  $\mathcal{H}_1$ , on a très peu de chance de se tromper.

Dans le cas présent, la moyenne empirique des observations est :

$$s = (7,8 + 9,5 + 8,8 + 10,1 + 9,2) / 5 = 9,08$$

On peut conclure, comme  $9,08 < 9,67$  : on rejette l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  et on accepte l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$ . On dit aussi que l'effet de la réparation est **statistiquement significatif**.

## 1.5 Tests unilatéraux et bilatéraux, $p$ -valeur

La règle de décision de l'exemple 2 revient à trouver un seuil  $s_0$  tel que  $P(S < s_0 | \mathcal{H}_0) = \alpha$ , où le niveau de signification  $\alpha$  vaut généralement 0,05.

On parle de **test unilatéral à gauche**. De la même manière, un test défini par  $s_0$  tel que  $P(S > s_0 | \mathcal{H}_0) = \alpha$  est appelé **test unilatéral à droite**, et un test basé sur  $P(S > m + s_0$  ou  $S < m - s_0) = \alpha$  (c'est-à-dire, lorsque  $s_0 > 0$ ,  $P(|S - m| > s_0 | \mathcal{H}_0) = \alpha$ ) est appelé **test bilatéral**.

La valeur de la probabilité  $P(S < s | \mathcal{H}_0)$ ,  $P(S > s | \mathcal{H}_0)$ , ou  $P(|S - m| > s | \mathcal{H}_0)$ , qui dépend de la valeur  $s$  calculée sur les données, est appelée  **$p$ -valeur**.

On voit que rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  en comparant  $s$  à  $s_0$  équivaut à rejeter  $\mathcal{H}_0$  si la  $p$ -valeur du test est inférieure au risque  $\alpha$ .

D'un point de vue fréquentiste, dans une proportion des cas égale à cette probabilité, la réalisation d'un échantillon sous la loi définie par  $\mathcal{H}_0$  va fournir une valeur de la statistique de test inférieure à  $s$  (pour un test unilatéral à gauche).

## 1.6 Points de vue de Neyman-Pearson et de Fisher

La théorie statistique des tests a été développée au début du vingtième siècle. Deux grandes familles d'interprétations se sont opposées, parfois de manière virulente, sur des arguments tenant de la discussion philosophique.

Le point de vue développé dans l'exemple 2 correspond à celui de Neyman et Pearson : deux hypothèses sont confrontées, le seuil  $\alpha$  permet de définir la région de rejet de  $\mathcal{H}_0$  (et la région d'acceptation de  $\mathcal{H}_0$ ) qui sont complémentaires, puis on calcule la puissance ; lorsqu'on rejette une hypothèse, on accepte l'autre. Accepter  $\mathcal{H}_1$  en rejetant  $\mathcal{H}_0$  ne veut pas dire que  $\mathcal{H}_1$  est vraie : dans notre exemple, on ne sait pas si la « vraie » valeur de la moyenne est de 9. Par ailleurs, il peut sembler paradoxal d'accepter  $\mathcal{H}_1$  alors qu'on ne maîtrise pas la valeur de l'erreur de seconde espèce  $\beta$  (qui est la

probabilité de choisir  $\mathcal{H}_1$  à raison) : cette probabilité peut elle-même être grande, en particulier si le test est biaisé.

Le point de vue de Pearson est de travailler essentiellement sur une hypothèse  $\mathcal{H}_0$  et de calculer la  $p$ -valeur correspondant à la probabilité que la statistique de test  $S$  dépasse (pour un test unilatéral à droite) la valeur observée  $s$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . La  $p$ -valeur quantifie la probabilité qu'une telle valeur soit explicable par le hasard gouvernant les échantillons sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Chez Pearson, il n'y a pas vraiment d'hypothèse alternative  $\mathcal{H}_1$ .

Les cours modernes de statistique tentent de faire une synthèse de ces deux approches. Les logiciels de statistique calculent des  $p$ -valeurs : l'interprétation du test se fait uniquement en comparant au seuil de signification décidé au préalable. Si la  $p$ -valeur est inférieure au seuil  $\alpha$ , alors on rejette l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  avec un risque  $\alpha$ . Par contre, si la  $p$ -valeur est supérieure à  $\alpha$ , on ne conclut pas : le test ne permet pas de rejeter  $\mathcal{H}_0$ , car la valeur  $s$  peut être expliquée par le hasard ou autre chose. Un autre test ou des données complémentaires permettront peut-être de conclure.

Il semble que la majorité des auteurs suive l'approche de Pearson : les données permettent (ou pas) de rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ , avec un certain risque d'erreur, mais ne permettent pas pour autant d'accepter une hypothèse alternative.

## 1.7 Complément facultatif : $p$ -hacking

Si on fixe la valeur de  $\alpha$  à 5%, on est amené à rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  par erreur avec une probabilité de 0,05. Généralement, rejeter  $\mathcal{H}_0$  permet de juger qu'un phénomène est statistiquement significatif.

Si on fait un grand nombre de tests aléatoires indépendants entre eux sur un jeu de données, un certain nombre, certes petit, d'hypothèses  $\mathcal{H}_0$  vont donc être rejetées par hasard : si on conduit  $N$  tests, on obtiendra de l'ordre de  $N\alpha$  rejets « par hasard ». Cela conduit à juger qu'un phénomène est statistiquement significatif alors que le résultat est le fruit du hasard. Un chercheur inattentif (ou peu scrupuleux...) pourrait être amené à sélectionner le test conduisant à un résultat favorable pour son étude sans parler des nombreux autres tests défavorables. Ces démarches peu rigoureuses sont regroupées sous le terme générique de *p-hacking*.

Voir : <https://xkcd.com/882/>.

Dans le cas de tests d'hypothèses multiples, une manière simple de contrer ce phénomène est d'appliquer la *correction de Bonferroni*, qui consiste à utiliser comme niveau de confiance  $\alpha/N$ , où  $N$  est le nombre de tests. Ainsi, le nombre de rejets « par hasard » restera globalement de l'ordre de  $\alpha$  (typiquement 5%). Un autre méthode est de contrôler le taux de fausses découvertes, voir : [https://en.wikipedia.org/wiki/False\\_discovery\\_rate](https://en.wikipedia.org/wiki/False_discovery_rate). Cette approche est basée sur le fait que les  $p$ -valeurs sont distribuées uniformément sur  $[0, 1]$  sous  $\mathcal{H}_0$ <sup>1</sup>.

## 2 Quelques tests paramétriques basiques

La suite de ce document présente quelques tests paramétriques classiques s'inscrivant dans la démarche de la section 1.4.

On suppose disposer d'un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  issu d'une variable aléatoire gaussienne.

### 2.1 Test sur la moyenne d'une loi normale

On teste l'hypothèse  $\mathcal{H}_0 : m = \mu_0$  contre l'hypothèse  $\mathcal{H}_1 : m \neq \mu_0$ .

---

1. Une  $p$ -valeur pour un test à gauche s'écrit  $F(s) = P(S < s | \mathcal{H}_0)$  où  $F$  est la fonction de répartition (supposée ici inversible) de la statistique de test  $S$  et  $s$  une réalisation de  $S$ . On considère la variable aléatoire  $F(S)$  des  $p$ -valeurs vues comme des valeurs aléatoires.  $F(S)$  prend donc des valeurs sur  $[0, 1]$ . Elle est distribuée comme les  $p$ -valeurs du test précédent lorsque  $s$  prend des valeurs distribuées selon  $S$ . Notons  $F_{F(S)}$  sa fonction de répartition. Alors  $F_{F(S)}(p) = P(F(S) < p) = P(S < F^{-1}(p)) = F(F^{-1}(p)) = p$ . La fonction de répartition suffisant à caractériser une loi, les  $p$ -valeurs sont bien distribuées selon la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Le raisonnement s'adapte pour un test à droite ou un test bilatéral.

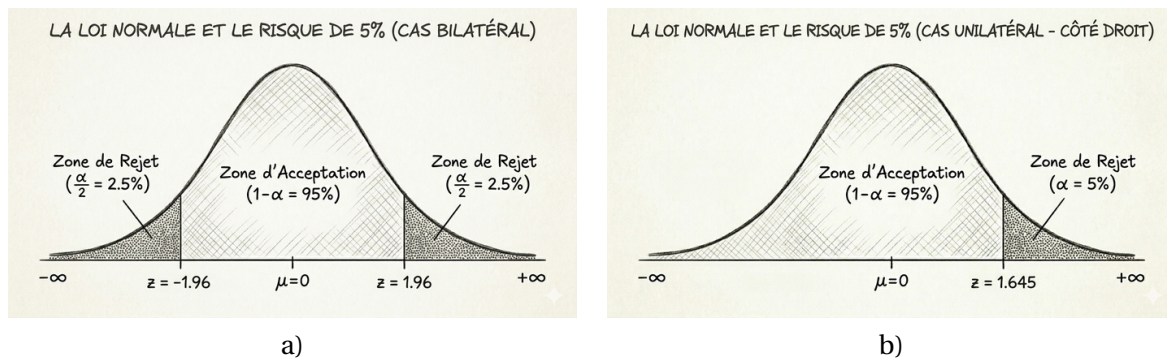


FIGURE 1 – Illustration de la zone d'acceptation pour une statistique de test suivant la loi normale. À gauche, cas bilatéral. À droite, cas unilatéral à droite. Avec les notations du texte et un risque  $\alpha = 5\%$ ,  $u_{2,5\%} = 1,96$  et  $u_{5\%} = 1,645$ .

### 2.1.1 Variance $\sigma^2$ connue

La statistique de test est la moyenne empirique  $\bar{X}$  : sous  $\mathcal{H}_0$ ,  $\bar{X}$  suit la loi normale de moyenne  $\mu_0$  et de variance  $\sigma^2/n$ , donc  $U = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$  suit une loi normale centrée réduite. On veut savoir à quel point  $U$  peut s'éloigner de 0 à l'aide d'un test bilatéral, symétrique par rapport à 0. On cherche donc une valeur seuil  $u_0$  telle que :  $P(|U| > u_0) = \alpha$ . Notons  $u_{\alpha/2}$  le quantile tel que  $P(U > u_{\alpha/2}) = \alpha/2$ .

La conclusion est la suivante : si la moyenne  $\bar{x}$  des observations est telle que  $(\bar{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$  n'est pas dans l'intervalle  $[-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]$ , alors on peut rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  au risque  $\alpha$ .

La figure 1 a) illustre ce test bilatéral. On note que dans le cas bilatéral, le risque est réparti dans les deux queues de la distribution.

La figure 1 b) illustre un test unilatéral à droite basé sur  $P(U > k) = \alpha$ , que l'on utiliserait dans le cas de l'hypothèse alternative  $\mathcal{H}_1 : m > \mu_0$ .

### 2.1.2 Variance inconnue

On ne peut plus normaliser pour calculer  $U$  car on ne connaît pas la variance  $\sigma^2$  : il faut utiliser la variance empirique.

La statistique de test est :  $T = \sqrt{n}(\bar{X} - m)/S$ , où  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . On sait que  $T$  suit une loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté. On cherche le seuil  $t_0$  tel que  $P(|T| > t_0) = \alpha$ , ce qui ramène à regarder les quantiles de la loi de Student. La représentation graphique est proche de celle de la figure 1 ; bien entendu les quantiles ne sont pas les mêmes lorsque  $n$  « n'est pas très grand » (rappelons que la loi de Student tend vers la loi Gaussienne quand  $n \rightarrow +\infty$ ).

*Remarque* : dans ces deux cas, ce qui est important est que la moyenne empirique suive une loi normale. Si les  $X_i$  ne suivent pas une loi normale mais que la taille  $n$  de l'échantillon est « assez grande », on peut appliquer les résultats précédents car le théorème central-limite nous assure que la moyenne empirique est proche d'une loi normale. Un test dont les conclusions restent valables quand on s'écarte un peu des suppositions de départ sur la loi de  $X$  (ici, le caractère gaussien) est appelé **test robuste**.

## 2.2 Test sur la variance d'une loi normale

On veut tester  $\mathcal{H}_0 : \sigma = \sigma_0$  contre  $\mathcal{H}_1 : \sigma \neq \sigma_0$

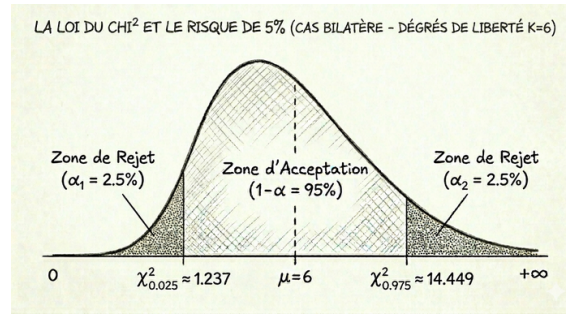


FIGURE 2 – Illustration de la zone d'acceptation pour une statistique de test suivant la loi du  $\chi^2$  à six degrés de liberté, pour un test bilatéral. (remarque : la courbe, générée par IA, n'est pas totalement réaliste)

### 2.2.1 Moyenne $m$ connue

La statistique de test est :  $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$ . On sait alors que  $nS/\sigma^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté. On utilise un test bilatéral.

La décision est illustrée par la figure 2. Remarquons que la loi du  $\chi^2$  n'est pas symétrique. Le risque est réparti à part égale entre les queues de droite et de gauche de la distribution.

### 2.2.2 Moyenne inconnue

On utilise la statistique  $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , qui est telle que  $nS/\sigma^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n - 1$  degrés de liberté. Le principe de décision reste le même.

*Remarque* : les illustrations des figures 1 et 2 ont été générées par IA (Gemini). Pour information, le résultat n'est pas parfait et a nécessité plusieurs prompts : les valeurs des quantiles n'étaient pas bons, la courbe de la loi du  $\chi^2$  était symétrique, les cas bilatéraux et unilatéraux étaient confondus... À réserver aux professionnels donc.

### 3 Exercices

#### 3.1 Risques

Des pièces industrielles sont produites selon un procédé qui nécessite des matières premières. Il y a une certaine variabilité de la quantité de matières premières nécessaires : chaque pièce nécessite une masse (en kilogrammes) de matières premières répartie selon une loi normale de moyenne  $m = 100$  et d'écart-type  $\sigma = 10$ . Le procédé de production est modifié dans l'objectif d'atteindre une quantité de matière première nécessaire de moyenne  $m = 80$  et de même écart-type.

Le responsable de production (qui n'a pas suivi le cours de statistique) juge que l'objectif est atteint si la moyenne de la quantité de matière première atteint 88 kilogrammes par pièce.

1) Quels sont les risques associés à cette décision ?

2) Proposez un critère objectif permettant de juger du succès de la modification du procédé de production.

#### 3.2 Courbe de puissance

*D'après un exercice du cours de statistique 2018 de l'ENSTA.*

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de loi gaussienne d'espérance  $\mu$  inconnue et de variance  $\sigma^2 = 100$  connue.

1) Construire un test de niveau  $\alpha = 0.10$  de l'hypothèse nulle " $\mu = 0$ " contre l'hypothèse alternative " $\mu = 1.5$ ", fondé sur la moyenne empirique, estimateur du paramètre  $\mu$ .

Supposons  $n = 25$ . On observe  $\bar{x} = 1$ . Quelle est la décision du test ?

Quelle est l'erreur de seconde espèce du test ?

2) On souhaite tester  $\mathcal{H}_0 : \mu = 2$  contre  $\mathcal{H}_1 : \mu < 2$ . Définir la région de rejet. Calculer la puissance du test et étudier ses variations en fonction de  $\mu$ ,  $n$  et  $\sigma$ .

#### 3.3 Test de données appariées

On souhaite mesurer l'effet sur le poids d'un programme d'arrêt du tabac. On dispose du poids (en kilogrammes) de dix personnes avant et après l'arrêt du tabac.

Individu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Avant	61,2	66,3	80,4	70,5	73,0	78,1	57,9	71,4	74,2	75,3
Après	62,0	64,3	81,5	68,3	72,9	77,8	63,2	70,3	75,1	75,0

L'effet est-il statistiquement significatif ?

*Indication* : si  $d_i = x'_i - x_i$  avec  $x_i$  et  $x'_i$  les poids respectivement avant et après arrêt de l'individu  $i$ , on calcule :  $\bar{d} = \frac{1}{10} \sum_i d_i = 0,21$  et :  $s_d^2 = \frac{1}{9} \sum_i (d_i - \bar{d})^2 \approx 4,505$ .

#### 3.4 Contrôle par échantillonnage

Un ingénieur dans un service achat est chargé du contrôle de la qualité de pièces livrées par un fournisseur. Contractuellement, celui-ci s'engage à fournir une proportion  $p = 0,9$  de pièces conformes. Sur une livraison de plusieurs milliers de pièces, notre ingénieur prélève 10 pièces, et en juge 3 non conformes.

1) Montrez qu'il est difficile de rejeter la livraison.

*Indication* : Si  $X$  est une variable aléatoire binomiale de paramètres  $10; p$ , vous calculerez la  $p$ -valeur de  $X \geq 3$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0 : p = 0,1$ .

On donne, si  $p = 0,1$  :  $P(X = 0) = 0,3487$ ;  $P(X = 1) = 0,3874$ ;  $P(X = 2) = 0,1937$ .

2) Pour en avoir le cœur net, l'ingénieur fait prélever 50 pièces, et en trouve 15 non conformes. Que conclure ?

*Indication* : l'inégalité de Hoeffding dit que si  $S_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n, p$ , alors :

$$P(S_n - np \geq t) \leq e^{-2t^2/n}$$

### 3.5 Vérification de précision

On utilise une balance de laboratoire censée fournir des mesures de poids à une précision de  $\pm 0,10$  gramme. Une manière raisonnable d'interpréter cette notion de précision (en suivant la norme ISO 5725) est de supposer que les mesures sont affectées d'une erreur aléatoire de moyenne nulle et d'écart-type 0,1 gramme.

On effectue 10 mesures du même objet, on obtient des valeurs  $x_i$  telles que :  $\sum_{i=1}^{10} x_i = 10,043$  et  $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 10,456$ .

Ces données sont-elles conformes à la précision annoncée par le fabricant ?

### 3.6 Lemme de Neyman-Pearson dans un cas particulier

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon dépendant d'un paramètre  $\theta$ , de densité jointe  $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$  (dans le cas où l'échantillon est i.i.d., la loi jointe est le produit  $g(x_1; \theta) \dots g(x_n; \theta)$  où  $g$  est la densité de la loi commune aux  $X_i$ ). On suppose que la densité  $f$  ne s'annule pas. On considère le problème du test d'une hypothèse simple  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre une hypothèse alternative simple  $H_1 : \theta = \theta_1$ .

On définit la région de rejet  $W$  par le rapport de vraisemblance suivant :

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{f(x; \theta_1)}{f(x; \theta_0)} \geq k \right\}$$

où  $k > 0$  est une constante telle que le risque de première espèce soit  $P(X \in W | H_0) = \alpha$ . Une telle constante  $k$  existe sous des hypothèses réalistes : si  $k$  est grand, alors  $W = \emptyset$  et  $P(X \in W | H_0) = 0$ , et si  $k$  est trop petit, alors  $W = \mathbb{R}$  et  $P(X \in W | H_0) = 1$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires (sous hypothèse de continuité),  $k$  existe.

#### Partie A

L'objectif est de démontrer que pour toute autre région de rejet  $W'$  telle que  $P(X \in W' | H_0) \leq \alpha$ , la puissance de  $W$  est supérieure ou égale à celle de  $W'$ .

1) Soient  $\mathbb{1}_W$  et  $\mathbb{1}_{W'}$  les fonctions indicatrices des régions  $W$  et  $W'$ . Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$(\mathbb{1}_W(x) - \mathbb{1}_{W'}(x)) \cdot (f(x; \theta_1) - k f(x; \theta_0)) \geq 0$$

2) En intégrant l'inégalité précédente sur tout l'espace des observations, montrer que :

$$\int (\mathbb{1}_W(x) - \mathbb{1}_{W'}(x)) f(x; \theta_1) dx \geq k \int (\mathbb{1}_W(x) - \mathbb{1}_{W'}(x)) f(x; \theta_0) dx$$

3) Exprimer les termes de gauche en fonction de la puissance du test pour la région  $W$  (notée  $1 - \beta$ ) et pour la région  $W'$  (notée  $1 - \beta'$ ).

4) En utilisant la condition sur le risque  $\alpha$ , conclure la démonstration.

#### Partie B

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. suivant  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2$  connu. On teste  $H_0 : \mu = \mu_0$  contre  $H_1 : \mu = \mu_1$  (où  $\mu_1 > \mu_0$ ).

1) Établir le rapport de vraisemblance  $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ .

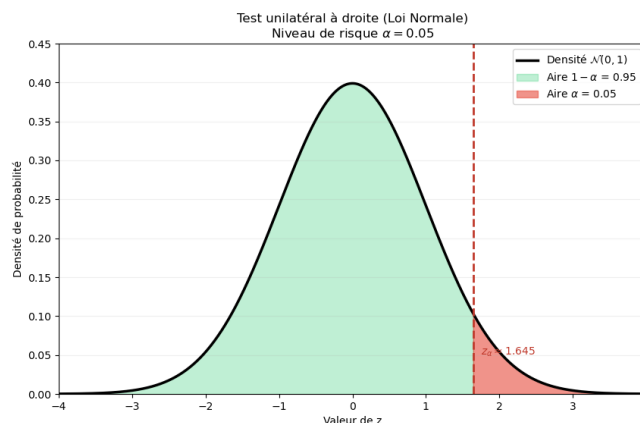
2) Montrer que le test le plus puissant de niveau  $\alpha$  rejette  $H_0$  si  $\bar{X}_n > c$ .

3) Déterminer  $c$  pour un risque  $\alpha$  donné.

## A Tables statistiques

Voici quelques tables statistiques qui seront utiles dans les exercices.

### A.1 Loi normale centrée réduite



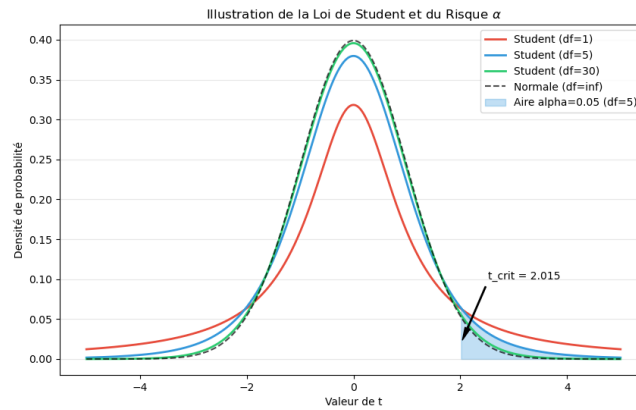
La table suivante représente des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On peut y lire, pour  $Z$  suivant une loi normale centrée réduite, la valeur de  $P(Z < z)$  pour des valeurs de  $z$  entre 0 et 3,49. On déduit les valeurs pour  $z < 0$  par symétrie.

Exemple d'utilisation : on lit dans la table que  $P(Z < 1,24) \approx 0,8925$  (à la croisée de la ligne 1.2 et de la colonne 0.04). Si on cherche 0,95 dans la table, on trouve  $z_0$  tel que  $P(Z < z_0) = 0,95$  :  $z_0$  entre 1,64 et 1,65, donc par interpolation  $z_0 \approx 1,645$ . Si on cherche  $P(Z < -0,2)$ , on écrit  $P(Z < -0,2) = P(Z > 0,2) = 1 - P(Z < 0,2)$  et on lit  $P(Z < 0,2)$  dans la table.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

## A.2 Loi de Student



La table suivante donne, pour  $T$  suivant une loi de Student à  $n$  degrés de liberté, la valeur de  $t_{\text{crit}}$  tel que  $P(T > t_{\text{crit}}) = \alpha$ . Ces valeurs sont utiles pour un test à droite. On trouve les valeurs pour un test bilatéral en divisant le risque par 2 et en cherchant  $t_{\text{crit}}$  tel que  $P(T > t_{\text{crit}}) = \alpha/2$ .

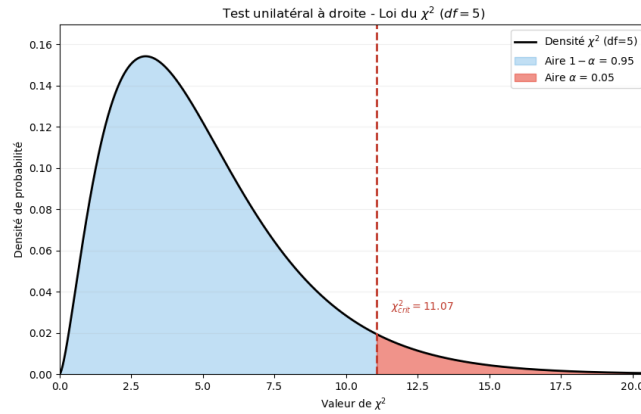
Exemple d'utilisation : on lit dans la table que, si  $T$  est une variable aléatoire qui suit une loi de Student à 5 degrés de liberté,  $P(T > 2,015) = 0,05$ .

df / $\alpha$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

### A.3 Loi du $\chi^2$

La table suivante donne, pour  $X$  suivant une loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté, la valeur de  $\chi_{\text{crit}}^2$  tel que  $P(X > \chi_{\text{crit}}^2) = \alpha$ . Cette valeur est utile pour un test à droite. Pour un test à gauche : si on cherche la valeur de  $\chi_{\text{crit}}^2$  tel que  $P(X < \chi_{\text{crit}}^2) = \alpha$ , on la lit dans la table en utilisant  $P(X > \chi_{\text{crit}}^2) = 1 - \alpha$ .

Exemple d'utilisation : on lit dans la table que, si  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi du  $\chi^2$  à 5 degrés de liberté,  $P(X > 11,07) \approx 0,05$ . De même  $P(X < 0,55) \approx 0,01$ .



df / $\alpha$	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70