# Couverture d'un mot bidimensionnel par un motif chevauchant

Guilhem Gamard

30 juin 2017

# Plan

# Mots infinis

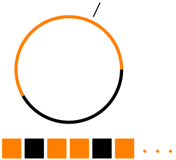
- Alphabet

□, ■

- Mots infinis à droite

■□■□■□□■□□■□ . . .

- Objet fondamental
  - Systèmes dynamiques
  - Théorie de l'information
  - . . .



**Problématique**

Mesurer la **régularité** des mots infinis

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité □■□■□■□■□■□■ . . .

# Quelques notions classiques de régularité

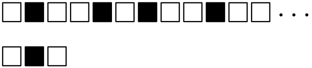
- Périodicité □■□■□■□■□■□■ ...

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$ □■□□■□■□□■□□ ...
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$



$P_{\mathbf{f}}(3) = ?$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

□■□■□■□■□■□■ . . .

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$

□■□□■□■□□■□□ . . .

■□□

$P_{\mathbf{f}}(3) = ?$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

  □■□■□■□■□■□■ $\cdots$

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$

  □■□□■□■□□■□□ $\cdots$

  □□■

  $P_{\mathbf{f}}(3) = ?$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

□■□■□■□■□■□■ $\cdots$

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$

□■□□■□■□□■□□ $\cdots$

□■□

$P_{\mathbf{f}}(3) = ?$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

□■□■□■□■□■□■ ...

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$

□■□□■□■□□■□□ ...

■□■

$P_{\mathbf{f}}(3) = ?$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

$\square\blacksquare\square\blacksquare\square\blacksquare\square\blacksquare\square\blacksquare\square\blacksquare\cdots$

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$

$\square\blacksquare\square\square\blacksquare\square\blacksquare\square\square\blacksquare\square\square\cdots$

$\blacksquare\square\blacksquare$

$P_{\mathbf{f}}(3) = 4$

# Quelques notions classiques de régularité

- Périodicité

□■□■□■□■□■□■ …

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$
- Entropie topologique $h(\mathbf{w})$
  - Non-nulle ssi $P_{\mathbf{w}}(n)$ exponentiel

□■□□■□■□□■□□ …

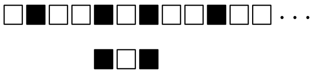
■□■

$P_{\mathbf{f}}(3) = 4$

# Quelques notions classiques de régularité

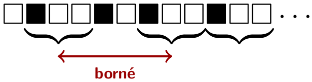
- Périodicité

- Complexité en facteurs $P_{\mathbf{w}}(n)$
  - $P_{\mathbf{w}}(n) = \#$ facteurs de longueur $n$
- Entropie topologique $h(\mathbf{w})$
  - Non-nulle ssi $P_{\mathbf{w}}(n)$ exponentiel



$P_{\mathbf{f}}(3) = 4$

- Uniforme récurrence
  - Tout facteur se retrouve à **intervalles bornés**




- Fréquences des facteurs
  - Convergence $\forall u$

$$\mathrm{freq}_{\mathbf{w}}(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathbf{w}[0\ldots n-1]|_u}{n}$$

# Quasipériodicité

Soit $w$ un mot et $q$ un mot fini.

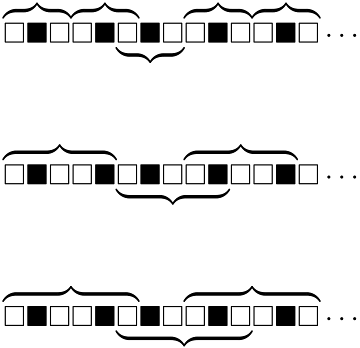
**Définition**

Le mot $w$ est q-**quasipériodique** s'il est recouvert de copies de $q$.

- $w$ fini ou infini
- $q \neq w$
- $q$ préfixe de $w$

**Définition**

Un mot sans quasipériode est **superprimitif**.



# Plan

# Travaux antérieurs sur la quasipériodicité

## Mots finis

### Algorithmes de détection

- Quasipériodes
- Facteurs quasipériodiques max.
  [Apostolico, Ehrenfeucht 1996]
- Mots circulaires
- Calcul parallèle
- Mots 2D
  [Crochemore et al. 2000]
- ...

### Forme normale

- [Mouchard, 2000]

## Mots infinis

### Première approche

- Définition et questions
  [Marcus, 2000]

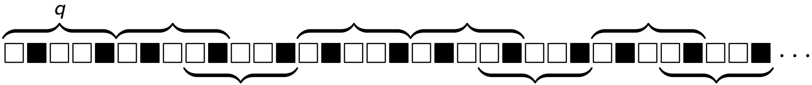
### Point de vue dynamique

- Cas multi-échelles
  [Marcus, Monteil 2006]

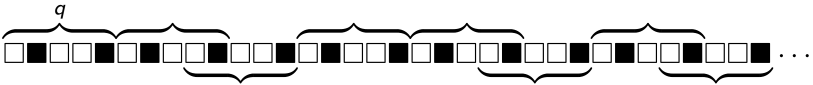
### Sturmiens

- Quasipériodes des sturmiens
  [Levé, Richomme 2007]
- Quasipériodes des épisturmiens
  [Glen, Levé, Richomme 2008]

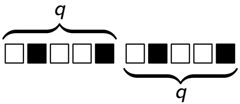
# Forme normale des mots quasipériodiques

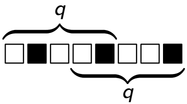


# Forme normale des mots quasipériodiques

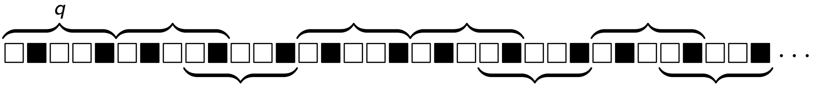



**Deux situations :**

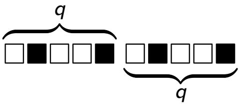
1. 

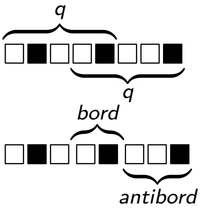

2. 

# Forme normale des mots quasipériodiques

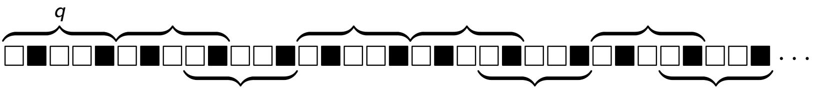



**Deux situations :**

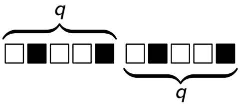
1. 

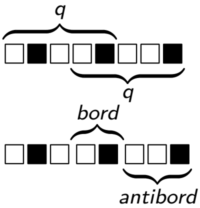

2. 

# Forme normale des mots quasipériodiques




**Deux situations :**

1. 


2. 


**Théorème** (Mouchard, 2000)

Un mot est $q$-quasipériodique ssi c'est une concaténation d'antibords de $q$ commençant par $q$.

- **Bord :** préfixe + suffixe
- **Antibord :** complémentaire droit d'un bord

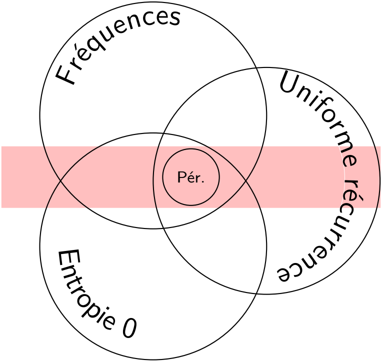
# Des mots quasipériodiques irréguliers

- Enchaîner les antibords
- Créer des quasipériodiques irréguliers

# Des mots quasipériodiques irréguliers

- Enchaîner les antibords
- Créer des quasipériodiques irréguliers

- Non-uniformément récurrents
- D'entropie élevée
- Sans fréquences de facteurs




[Marcus, Monteil 2006]

# Quasipériodicité multi-échelles

**Définition**

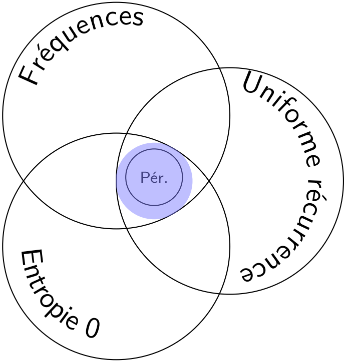
Un mot est
**quasipériodique multi-échelles**
s'il a une infinité de quasipériodes.

# Quasipériodicité multi-échelles

**Définition**

Un mot est **quasipériodique multi-échelles** s'il a une infinité de quasipériodes.

- **Multi-échelles** implique :
  - Uniforme récurrence
  - Entropie nulle
  - Convergence des fréquences



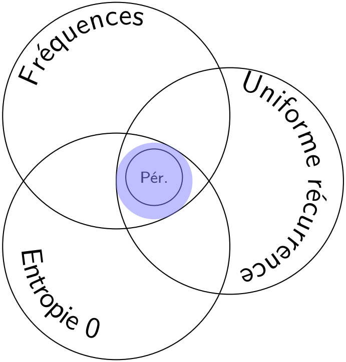

[Marcus, Monteil 2006]

# Quasipériodicité multi-échelles

**Définition**

Un mot est **quasipériodique multi-échelles** s'il a une infinité de quasipériodes.

- **Multi-échelles** implique :
  - Uniforme récurrence
  - Entropie nulle
  - Convergence des fréquences
- **Bonne notion de régularité**

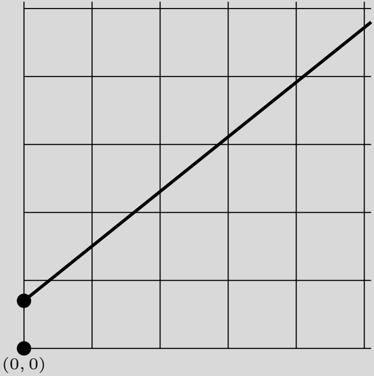



[Marcus, Monteil 2006]

# Quasipériodes des mots sturmiens

**Définition**

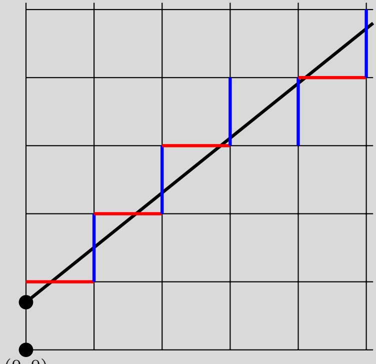
Mot **sturmien** : codage de $\frac{1}{2}$-droite



# Quasipériodes des mots sturmiens

**Définition**

Mot **sturmien** : codage de $\frac{1}{2}$-droite



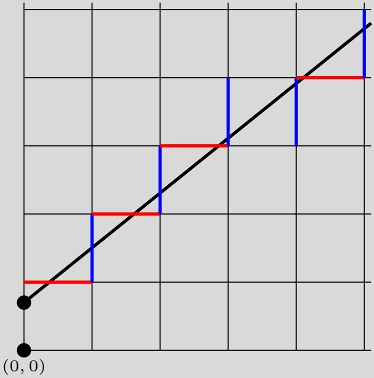

Mot sur alphabet —, |

- Bonnes propriétés

# Quasipériodes des mots sturmiens

## Définition

Mot **sturmien** : codage de $\frac{1}{2}$-droite



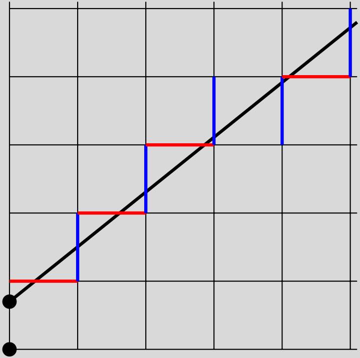

Mot sur alphabet

- Bonnes propriétés
- **Standard :** passe par $(0, 0)$
- **Lyndon :** $x \cdot \mathbf{w}$ avec $x$ lettre et $\mathbf{w}$ standard

# Quasipériodes des mots sturmiens

## Définition

Mot **sturmien** : codage de $\frac{1}{2}$-droite




Mot sur alphabet —, |

- Bonnes propriétés
- **Standard :** passe par $(0, 0)$
- **Lyndon :** $x \cdot \mathbf{w}$ avec $x$ lettre et $\mathbf{w}$ standard

## Théorème (Levé, Richomme, 2007)

1. Lyndon : superprimitifs
2. Autres sturmiens : multi-échelles
3. Information sur les quasipériodes

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.
- Réciproque ?

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.
- Réciproque ? Supposons $qa$ quasipériode mais $qb$ facteur de $\mathbf{w}$.

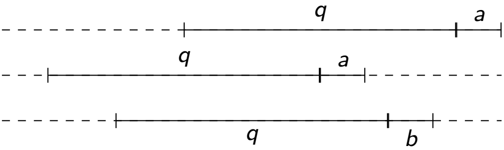
# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.
- Réciproque ? Supposons $qa$ quasipériode mais $qb$ facteur de $\mathbf{w}$.



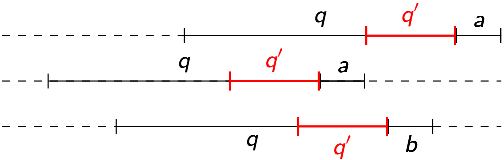
# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.
- Réciproque ? Supposons $qa$ quasipériode mais $qb$ facteur de $\mathbf{w}$.



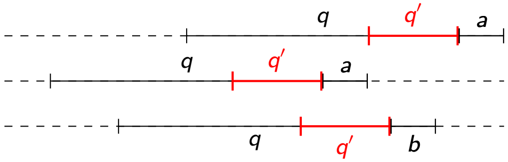
# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.
- Réciproque ? Supposons $qa$ quasipériode mais $qb$ facteur de $\mathbf{w}$.




$$\exists p, s \text{ tels que } p\,q'\,b\,s = q'\,a\,q'$$

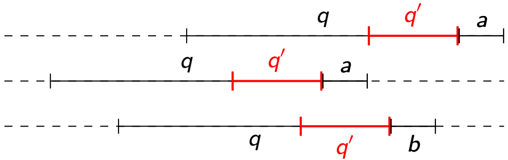
# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Question** (Marcus, 2000)

*Que peut-on dire sur l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini arbitraire ?*

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini et $q$ l'une de ses quasipériodes.

- Si $q$ est toujours suivi de la même lettre $a$, alors $qa$ est quasipériode.
- Réciproque ? Supposons $qa$ quasipériode mais $qb$ facteur de $\mathbf{w}$.




$$\exists p, s \text{ tels que } p\,q'\,b\,s = q'\,a\,q'$$
donc $|ps| = |q'|$, d'où $ps = q'$, donc $|pq'bs|_a = |q'\,a\,q'|_a$ implique $a = b$

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini, $q$ un facteur et $x$ une lettre.

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini, $q$ un facteur et $x$ une lettre.

1. Supposons $q$ quasipériode ; alors
   - $qx$ est quasipériode ssi $q$ est toujours suivi de la lettre $x$.

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini, $q$ un facteur et $x$ une lettre.

1. Supposons $q$ quasipériode ; alors
   - $qx$ est quasipériode ssi $q$ est toujours suivi de la lettre $x$.
2. Supposons $qx$ quasipériode ; alors
   - $q$ est quasipériode ssi $q$ est facteur interne de $qxq$ ou bien $qxq$ n'est pas facteur de $\mathbf{w}$.

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini, $q$ un facteur et $x$ une lettre.

1. Supposons $q$ quasipériode ; alors
   - $qx$ est quasipériode ssi $q$ est toujours suivi de la lettre $x$.
2. Supposons $qx$ quasipériode ; alors
   - $q$ est quasipériode ssi $q$ est facteur interne de $qxq$ ou bien $qxq$ n'est pas facteur de $\mathbf{w}$.

- Étudier les préfixes $\implies$ déterminer les quasipériodes

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini, $q$ un facteur et $x$ une lettre.

1. Supposons $q$ quasipériode ; alors
   - $qx$ est quasipériode ssi $q$ est toujours suivi de la lettre $x$.
2. Supposons $qx$ quasipériode ; alors
   - $q$ est quasipériode ssi $q$ est facteur interne de $qxq$ ou bien $qxq$ n'est pas facteur de $\mathbf{w}$.

- Étudier les préfixes $\implies$ déterminer les quasipériodes
- Production d'exemples

# Déterminer les quasipériodes d'un mot infini

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini, $q$ un facteur et $x$ une lettre.

1. Supposons $q$ quasipériode ; alors
   - $qx$ est quasipériode ssi $q$ est toujours suivi de la lettre $x$.
2. Supposons $qx$ quasipériode ; alors
   - $q$ est quasipériode ssi $q$ est facteur interne de $qxq$ ou bien $qxq$ n'est pas facteur de $\mathbf{w}$.

- Étudier les préfixes $\Longrightarrow$ déterminer les quasipériodes
- Production d'exemples
- Caractérisations

# Fonction de quasipériodicité

**Définition**

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini,
alors $Q_{\mathbf{w}}(n)$ est son nombre de quasipériodes de longueur $n$.

# Fonction de quasipériodicité

**Définition**

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini,
alors $Q_{\mathbf{w}}(n)$ est son nombre de quasipériodes de longueur $n$.

**Théorème 1** (Gamard, Richomme)

Un mot $\mathbf{w}$ est périodique ssi $Q_{\mathbf{w}}(n) = 1, \ \forall n$ assez grand.

# Fonction de quasipériodicité

**Définition**

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini,
alors $Q_{\mathbf{w}}(n)$ est son nombre de quasipériodes de longueur $n$.

**Théorème 1** (Gamard, Richomme)

Un mot $\mathbf{w}$ est périodique ssi $Q_{\mathbf{w}}(n) = 1, \ \forall n$ assez grand.

**Théorème 2** (Gamard, Richomme)

Un mot $\mathbf{w}$ est sturmien standard si et seulement si
les intervalles où $Q_{\mathbf{w}}$ s'annule sont de longueur $1$, sauf le premier.

# Fonction de quasipériodicité

**Définition**

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini,
alors $Q_{\mathbf{w}}(n)$ est son nombre de quasipériodes de longueur $n$.

**Théorème 1** (Gamard, Richomme)

Un mot $\mathbf{w}$ est périodique ssi $Q_{\mathbf{w}}(n) = 1, \ \forall n$ assez grand.

**Théorème 2** (Gamard, Richomme)

Un mot $\mathbf{w}$ est sturmien standard si et seulement si
les intervalles où $Q_{\mathbf{w}}$ s'annule sont de longueur $1$, sauf le premier.

$\Longrightarrow$ condition « maximale »

# Proportion de quasipériodes

- **Périodique**
  - Minimum de facteurs (borné)
  - Maximum de quasipériodes ($[n; +\infty[$)
- **Sturmien standard**
  - Minimum de facteurs après les périodiques
  - « Maximum » de quasipériodes après les périodiques

**Intuition**

La *proportion* de quasipériodes est liée à la complexité en facteurs.
**Bonne mesure de régularité ?**

# Problème ouvert

**Problème**

*Caractériser **tous** les Sturmiens et pas seulement les standards ?*

# Problème ouvert

## Problème

*Caractériser **tous** les Sturmiens et pas seulement les standards ?*

## Idée

Travailler sur les mots bi-infinis (indicés par $\mathbb{Z}$).

# Problème ouvert

**Problème**

*Caractériser **tous** les Sturmiens et pas seulement les standards ?*

**Idée**

Travailler sur les mots bi-infinis (indicés par $\mathbb{Z}$).

- Plus de notion de « préfixe »

# Problème ouvert

**Problème**

*Caractériser **tous** les Sturmiens et pas seulement les standards ?*

**Idée**

Travailler sur les mots bi-infinis (indicés par $\mathbb{Z}$).

- Plus de notion de « préfixe »
- Les preuves ne se généralisent pas

# Problème ouvert

**Problème**

*Caractériser **tous** les Sturmiens et pas seulement les standards ?*

**Idée**

Travailler sur les mots bi-infinis (indicés par $\mathbb{Z}$).

- Plus de notion de « préfixe »
- Les preuves ne se généralisent pas

- Applications aux systèmes dynamiques

# Récapitulatif 1D

**État de l'art**

- Quasipériodicité définie sur les mots infinis
- Quasipériodes des mots sturmiens bien connues
- Forme normale
- Quasipériodicité multi-échelles

**Contributions**

- Déterminer l'ensemble des quasipériodes d'un mot infini
- Caractérisation de la périodicité
- Caractérisation des sturmiens standard

**Question**

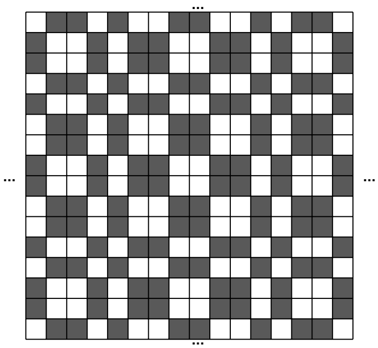
- Généraliser aux bi-infinis

# Plan

# Mots bidimensionnels

- Un alphabet fini
- **Mot 2D** : fonction $\mathbb{Z}^2 \to \Sigma$
- **Bloc** : facteur rectangulaire

$$\Sigma = \{\square, \blacksquare\}$$

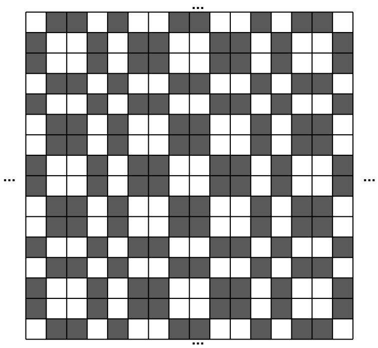


# Mots bidimensionnels

- Un alphabet fini
- **Mot 2D** : fonction $\mathbb{Z}^2 \to \Sigma$
- **Bloc** : facteur rectangulaire

- Motivation I : **pavages de Wang**
  - mots 2D particuliers

$\Sigma = \{\square, \blacksquare\}$



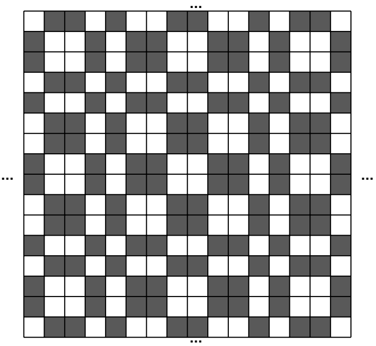
# Mots bidimensionnels

- Un alphabet fini
- **Mot 2D** : fonction $\mathbb{Z}^2 \to \Sigma$
- **Bloc** : facteur rectangulaire

- Motivation I : **pavages de Wang**
  - mots 2D particuliers

- Motivation II : quasipériodicité comme règle locale
  - Recouvrir le plan par des occurrences de $q$

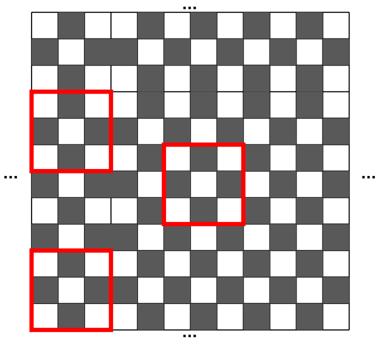
$$\Sigma = \{\square, \blacksquare\}$$

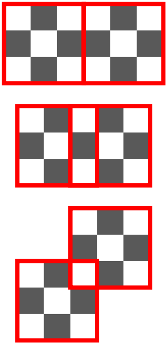


# Quasipériodicité en 2 dimensions

## Définition

Soit $q$ un bloc. Un mot 2D $\mathbf{w}$ est $q$-quasipériodique si elle est recouverte d'occurrences de $q$.



# Combinatoire des blocs

## Définitions

- **Complexité en blocs :**
  $P_{\mathbf{w}}(m, n) = \#$ blocs $(m, n)$ dans $\mathbf{w}$
- **Entropie**
- **Fréquences des blocs**
- **Uniforme récurrence**

comme en 1D

## Objectif

**Généraliser les résultats 1D**

# Quasipériodes autorisant le désordre

La quasipériode $\square$ n'autorise que $\square^{\mathbb{Z}^2}$.

# Quasipériodes autorisant le désordre

La quasipériode $\square$ n'autorise que $\square^{\mathbb{Z}^2}$.

**Théorème** (Gamard, Richomme)

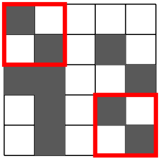
Soit $q$ un bloc.
Il existe un mot 2D apériodique, $q$-quasipériodique ssi la racine primitive de $q$ possède un bord non-vide.

# Quasipériodes autorisant le désordre

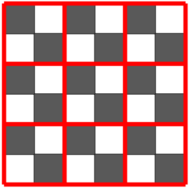
La quasipériode $\square$ n'autorise que $\square^{\mathbb{Z}^2}$.

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Soit $q$ un bloc.
Il existe un mot 2D apériodique, $q$-quasipériodique ssi la racine primitive de $q$ possède un bord non-vide.



**Bord**
Bloc dans deux coins opposés



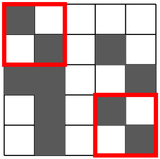
**Racine primitive**
L'unique $v$ minimal tel que $u = v^{m \times n}$

# Quasipériodes autorisant le désordre

La quasipériode $\square$ n'autorise que $\square^{\mathbb{Z}^2}$.

**Théorème** (Gamard, Richomme)

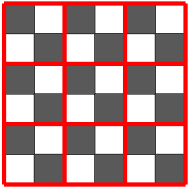
Soit $q$ un bloc.
Il existe un mot 2D apériodique, $q$-quasipériodique ssi la racine primitive de $q$ possède un bord non-vide.



**Bord**
Bloc dans deux coins opposés

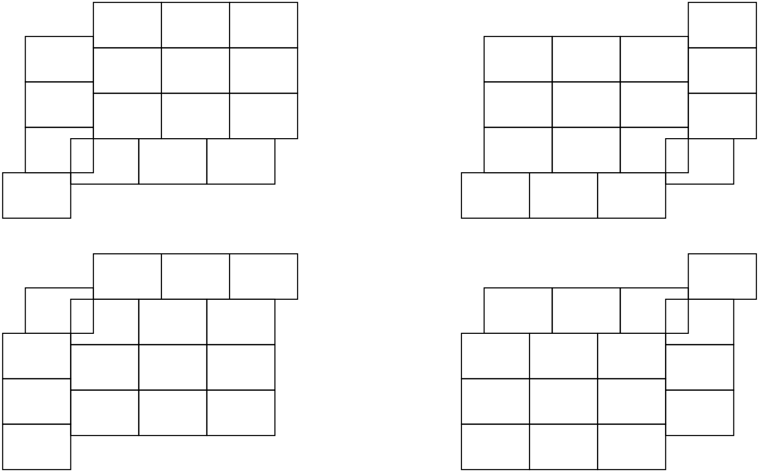
**Idée de preuve**

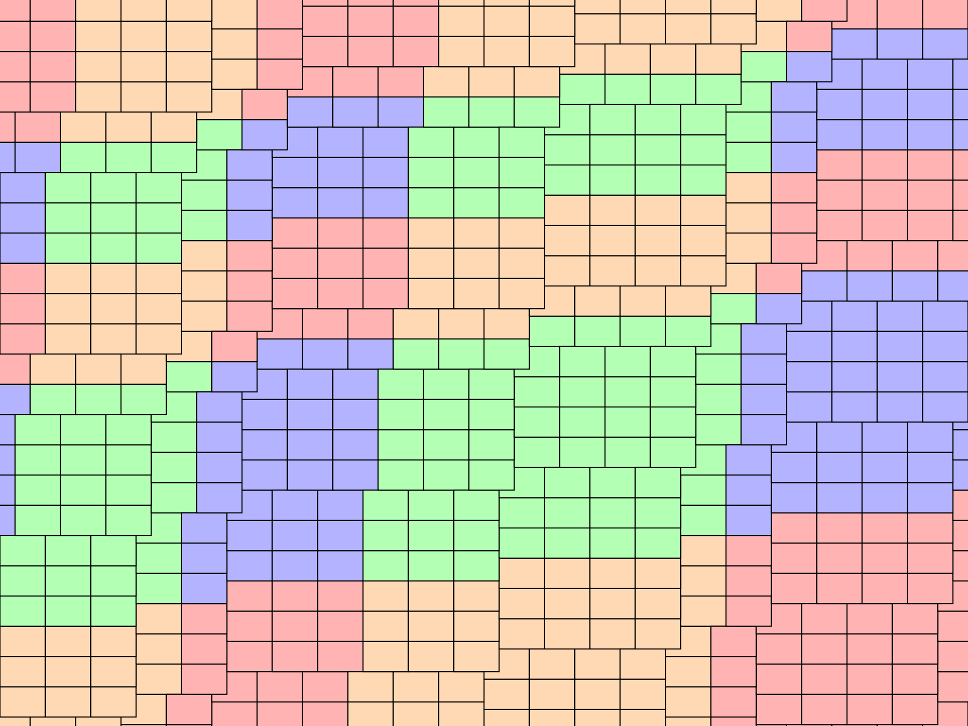
1. Construire des **tuiles** à partir de $q$
2. Paver le plan de façon libre



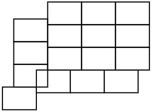
**Racine primitive**
L'unique $v$ minimal tel que $u = v^{m \times n}$

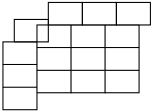
# Les tuiles

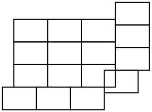


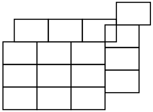


# Mots 2D quasipériodiques

$f(a) =$ 

$f(b) =$ 

$f(c) =$ 

$f(d) =$ 

**Remarque**

$f(w)$ n'est définie sur $w \in \{a, b, c, d\}^{\mathbb{Z}^2}$ que si $w$ satisfait certaines contraintes locales

**Proposition** (Gamard, Richomme)

$\forall w,\ f(w)$ est $q$-quasipériodique

De plus, $f$ préserve :

- périodicité
- uniforme récurrence
- convergence des fréquences

# Et l'entropie ? (1/2)

- La substitution $f$ n'est définie que sur certains mots

# Et l'entropie ? (1/2)

- La substitution $f$ n'est définie que sur certains mots, qui sont tous d'entropie nulle.

# Et l'entropie ? (1/2)

- La substitution $f$ n'est définie que sur certains mots, qui sont tous d'entropie nulle.
- Les mots 2D obtenus sont d'entropie nulle.

# Et l'entropie ? (1/2)

- La substitution $f$ n'est définie que sur certains mots, qui sont tous d'entropie nulle.
- Les mots 2D obtenus sont d'entropie nulle.

**Question**

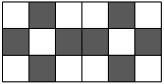
Quelles quasipériodes autorisent des mots 2D d'entropie positive ?

# Et l'entropie ? (1/2)

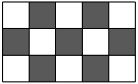
- La substitution $f$ n'est définie que sur certains mots, qui sont tous d'entropie nulle.
- Les mots 2D obtenus sont d'entropie nulle.

**Question**

Quelles quasipériodes autorisent des mots 2D d'entropie positive ?



- Celles ayant un bord pleine hauteur ou pleine largeur.

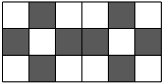


# Et l'entropie ? (1/2)

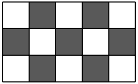
- La substitution $f$ n'est définie que sur certains mots, qui sont tous d'entropie nulle.
- Les mots 2D obtenus sont d'entropie nulle.

**Question**

Quelles quasipériodes autorisent des mots 2D d'entropie positive ?



- Celles ayant un bord pleine hauteur ou pleine largeur.
- D'autres ?



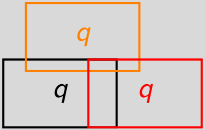
# Et l'entropie ? (2/2)

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Si un bloc $q$ possède un coin sans bord, alors tout mot 2D $q$-quasipériodique est d'entropie nulle.

**Idée de preuve**

Cette situation :




force la $4^{\text{ème}}$ occurrence de $q$ (en haut à droite).

Un carré $n \times n$ est donc uniquement déterminé par les occurrences de $q$ couvrant sa frontière.

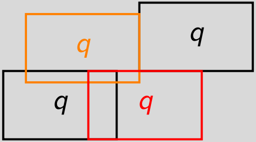
# Et l'entropie ? (2/2)

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Si un bloc $q$ possède un coin sans bord, alors tout mot 2D $q$-quasipériodique est d'entropie nulle.

**Idée de preuve**

Cette situation :




force la $4^{\text{ème}}$ occurrence de $q$ (en haut à droite).

Un carré $n \times n$ est donc uniquement déterminé par les occurrences de $q$ couvrant sa frontière.

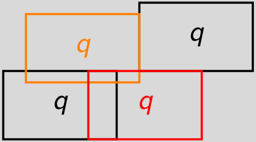
# Et l'entropie ? (2/2)

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Si un bloc $q$ possède un coin sans bord, alors tout mot 2D $q$-quasipériodique est d'entropie nulle.

**Idée de preuve**

Cette situation :




force la $4^{\text{ème}}$ occurrence de $q$ (en haut à droite).

Un carré $n \times n$ est donc uniquement déterminé par les occurrences de $q$ couvrant sa frontière.

Dernier cas : **ouvert**

# Quasipériodicité multi-échelles en 2D

**Rappel**

Tout mot **1D** $\mathbf{w}$ multi-échelles a

- Uniforme récurrence
- Entropie $0$
- Des fréquences qui convergent

**Question**

**Quid des mots 2D multi-échelles ?**

# Quasipériodicité multi-échelles en 2D

**Rappel**

Tout mot **1D** $\mathbf{w}$ multi-échelles a

- Uniforme récurrence
- Entropie $0$
- Des fréquences qui convergent

**Question**

**Quid des mots 2D multi-échelles ?**

**Théorème** (Gamard, Richomme)

Tout mot **2D** $\mathbf{w}$ multi-échelles a

1. entropie $0$
2. convergence des fréquences

# Quasipériodicité multi-échelles en 2D

## Rappel

Tout mot **1D** $\mathbf{w}$ multi-échelles a

- Uniforme récurrence
- Entropie $0$
- Des fréquences qui convergent

## Question

**Quid des mots 2D multi-échelles ?**

## Théorème (Gamard, Richomme)

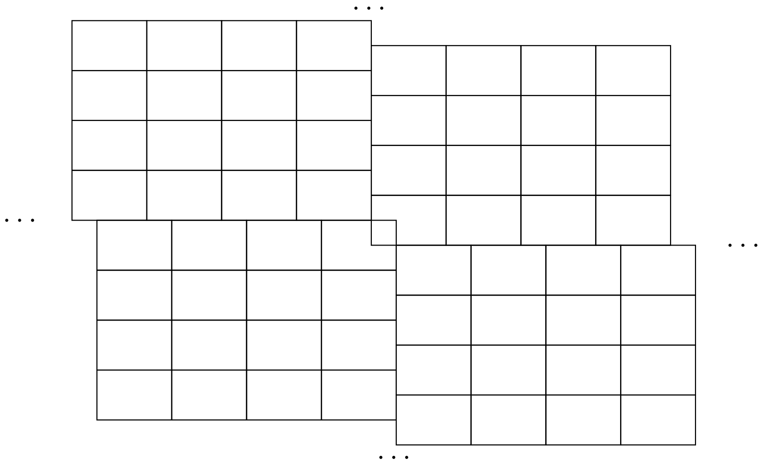
Tout mot **2D** $\mathbf{w}$ multi-échelles a

1. entropie $0$
2. convergence des fréquences

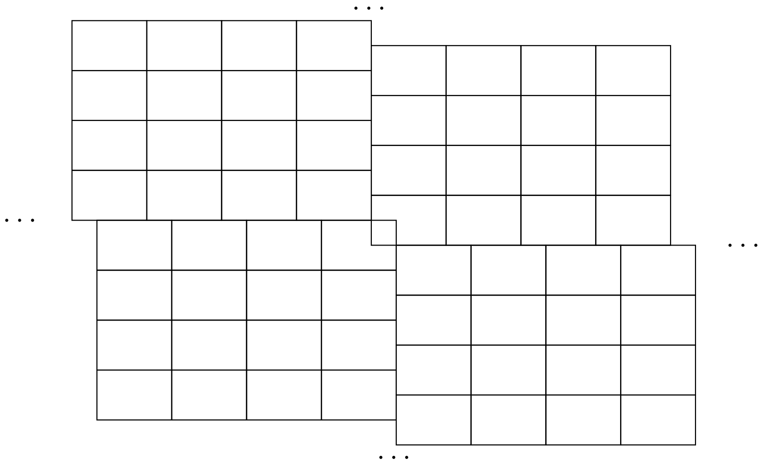
## Idées de preuve

1. Adaptation directe preuve 1D
2. Très calculatoire

# Uniforme récurrence des mots 2D m.-é.



# Uniforme récurrence des mots 2D m.-é.



$\cdots$ □■□■□■□■□■□ □■□■□■□■□■□ $\cdots$

# Récapitulatif 2D

**État de l'art**

- Quasipériodes des mots 2D infinis : $\emptyset$

**Contributions**

- Déterminer les quasipériodes « non-triviales »
  - Autoriser les irrégularités
  - $\exists$ Quasipériodes $\implies$ entropie $0$
- Propriétés des mots 2D multi-échelles

**Questions**

- Question de l'entropie : cas des $4$ coins
- Étudier l'ensemble des quasipériodes d'un mot 2D ?
- Liens avec les pavages ?

# Plan

# Conclusion

## 1D

**Contributions**

- Outil pour étudier les quasipériodes
- Caractérisation périodicité
- Sturmiens standard

**Questions**

- Généraliser sur $\mathbb{Z}$
- Quid des autres sturmiens ?
- Autres caractérisations ?

## 2D

**Contributions**

- Mots 2D quasipériodiques irréguliers
- Multi-échelles $\implies$ entropie $0$
- Multi-échelles $\implies$ fréquences

**Questions**

- Question de l'entropie
- Étudier les quasipériodes
- Quid de $\mathbb{N}^2$ ?

**Merci pour votre attention !**